Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 523-532

PAOLO UDESCHINI (*)

Equazioni hamiltoniane linearizzate del campo gravitazionale einsteiniano (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

Alle equazioni gravitazionali di Einstein si può dare forma lagrangiana di equazioni di campo, grazie ad una opportuna densità lagrangiana.

È noto come dalla forma lagrangiana si possa passare a quella hamiltoniana introducendo, accanto ai potenziali gravitazionali, opportune variabili coniugate.

Nell'ipotesi di campi deboli, si studiano qui le equazioni hamiltoniane linearizzate, unitamente alle equazioni di vincolo, tenendo presente il significato geometrico delle variabili hamiltoniane.

Si ottiene anche una forma ridotta delle equazioni, particolarizzando il sistema di coordinate.

I risultati ottenuti vengono poi collegati con quelli ben noti, relativi alle equazioni lagrangiane, che portano ad equazioni d'onda di d'Alembert.

1. - Equazioni di campo

Le equazioni einsteiniane del campo gravitazionale, riguardanti le dieci funzioni potenziali $g_{\alpha\beta}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$ che individuano la metrica

---

(*) Indirizzo: P.le Baracca 1, 20123 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 29-XII-1978.

spazio-temporale, possono dedursi da un principio di azione stazionaria $\delta A = 0$, essendo

$$A = \int_\tau \mathscr{L}\, \mathrm{d}^4 x \tag{1}$$

l'azione costruita con una densità lagrangiana $\mathscr{L}$ ($\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3$ e τ regione spazio-temporale qualsiasi).

Nel caso del puro campo gravitazionale, si può assumere

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}(\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}\,\Gamma^{\mu}_{\beta\nu} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\mu})\,, \tag{2}$$

dove $\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}$ sono i simboli di Christoffel di seconda specie e $g = \|g_{\alpha\beta}\|$.

Le equazioni di campo nella forma di Eulero-Lagrange sono allora

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g^{\alpha\beta}{}_{,\nu}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} \equiv \sqrt{-g}\,(R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\, R g_{\alpha\beta}) = 0\,, \tag{3}$$

ove $g^{\alpha\beta}_{,\nu} = \partial g^{\alpha\beta}/\partial x^\nu$, $R_{\alpha\beta}$ è il tensore di Riemann contratto ed $R = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$.

Per la formulazione hamiltoniana della teoria conviene assumere, accanto ai potenziali $g_{\alpha\beta}$, come variabili dinamiche coniugate, i momenti densità $p^{\alpha\beta}$ definiti dalle relazioni

$$p^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{g}_{\alpha\beta}} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,0}}\,. \tag{4}$$

I valori delle variabili dinamiche sulla generica ipersuperficie spaziale $x^0 = \text{cost.}$ individuano lo stato fisico del campo gravitazionale.

L'hamiltoniana H è espressa dall'integrale spaziale (esteso all'ipersuperficie $x^0 = \text{cost.}$)

$$H = \int \mathscr{H}\, \mathrm{d}^3 x\,, \tag{5}$$

essendo $\mathscr{H}$ la densità hamiltoniana, dedotta da quella lagrangiana ($\mathrm{d}^3x = \mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3$).

È utile decomporre il tensore metrico spazio-temporale $g_{\alpha\beta}$ (di segnatura $- + + +$), e di conseguenza gli altri enti ad esso connessi, così da mettere in evidenza gli elementi tensoriali delle ipersuperfici tridimensionali spaziali $x^0 = \text{cost.}$ (indicheremo pertanto con lettere greche $\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2, 3$ gli indici spazio-temporali e con lettere latine $i, j, \ldots = 1, 2, 3$ gli indici spaziali sull'ipersuperficie $x^0 = \text{cost.}$)

$$(6) \qquad g_{\alpha\beta} \left| \begin{array}{l} g_{00} = \dfrac{1}{g^{00}} + \nu^r \nu_r \\ g_{0r} = \nu_r \\ g_{ij} = h_{ij} \end{array} \right. \qquad g^{\alpha\beta} \left| \begin{array}{l} g^{00} \\ g^{0i} = -g^{00}\nu^i \\ g^{ij} = h^{ij} + \dfrac{1}{g^{00}} g^{0i} g^{0j} = h^{ij} + g^{00}\nu^i \nu^j . \end{array} \right.$$

Il tensore metrico dell'ipersuperficie $x^0 =$ cost. è $g_{ij} = h_{ij}$ nella forma covariante ed h^{ij}, tale che $g_{jr}h^{ir} = \delta^i{}_j$, nella forma controvariante; ν_r sono le componenti di un vettore, g_{00} e g^{00} sono scalari. Il determinante ${}^3g = \|g_{ij}\|$ della metrica dell'ipersuperficie tridimensionale spaziale $x^0 =$ cost. è legato a quello g della metrica spazio-temporale dalla relazione $\sqrt{{}^3g} = \sqrt{-g}\sqrt{-g^{00}}$.

Poichè le otto variabili $g_{\alpha 0}$, $p^{\alpha 0}$ possono essere eliminate dal novero di variabili dinamiche, lo stato fisico del campo gravitazionale è individuato su ciascuna ipersuperficie $x^0 =$ cost. soltanto da dodici variabili coniugate: i sei potenziali superficiali $g_{ij} = h_{ij}$ ed i sei momenti coniugati $p^{ij} = \partial\mathscr{L}/\partial\dot{g}_{ij}$, che costituiscono una densità tensoriale superficiale dell'ipersuperficie $x^0 =$ cost. A questi compete l'espressione esplicita

$$(7) \qquad p^{ij} = \sqrt{{}^3g}\,(h^{ir}h^{js} - h^{ij}\,h^{rs})\,\frac{\Gamma^0_{rs}}{\sqrt{-g^{00}}}\,,$$

da cui, introducendo il secondo tensore fondamentale $b_{rs} = \Gamma^0_{rs}/\sqrt{-g^{00}}$ dell'ipersuperficie $x^0 =$ cost., si ottiene l'espressione lineare in b_{rs}

$$(8) \qquad p^{ij} = \sqrt{{}^3g}\,(b^{ij} - bh^{ij})$$

(ove $b = b_{rs}h^{rs}$ è l'invariante lineare di b_{ij}).

I momenti p^{ij} sono funzioni soltanto del primo e del secondo tensore fondamentale dell'ipersuperficie $x^0 =$ cost. e hanno quindi carattere tensoriale sull'ipersuperficie stessa.

Nella teoria hamiltoniana della gravitazione, lo stato fisico del campo gravitazionale è dunque caratterizzato da entrambi i tensori fondamentali g_{ij}, b_{ij} che danno la metrica e la configurazione dell'ipersuperficie $x^0 =$ cost. nello spazio-tempo.

Il legame fra le velocità lagrangiane $\dot{g}_{ij}$ e i momenti è il seguente

$$(9) \qquad \dot{g}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}\,\sqrt{{}^3g}}\,(p_{ij} - \tfrac{1}{2}pg_{ij}) + \nu_{i/j} + \nu_{j/i},$$

dove $p = p_r{}^r$ e la barra è simbolo di derivazione tensoriale sull'ipersuperficie.

L'espressione esplicita della hamiltoniana (5) è

$$(10) \qquad H = \int\Big(\frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}\mathscr{H}^* + g_{0r}\mathscr{H}^r\Big)\,\mathrm{d}^3x\,,$$

dove le due densità $\mathcal{H}^*$, $\mathcal{H}^r$ (scalare la prima e vettoriale la seconda) sono funzioni soltanto delle variabili dinamiche g_{ij}, p^{ij} e delle loro derivate spaziali

$$\mathcal{H}^* = \frac{1}{\sqrt{{}^3g}}(p_{ij}p^{ij} - \tfrac{1}{2}p^2) + \sqrt{{}^3g}\,{}^3R\,, \tag{11}$$

$$\mathcal{H}^r = -2p^{rs}_{/s} = h^{rj}(p^{is}g_{is,j} - 2(p^{is}g_{ij})_{,s})\,, \tag{12}$$

essendo ${}^3R$ l'invariante di curvatura dell'ipersuperficie $x^0 = \text{cost.}$.

Sussistono le quattro equazioni di vincolo che traducono l'annullarsi di $\mathcal{H}^*$ e di $\mathcal{H}^r$

$${}^3R + \frac{1}{{}^3g}(p_{ij}p^{ij} - \tfrac{1}{2}p^2) = 0\,, \qquad p^{rs}{}_{/s} = 0\,. \tag{13}$$

Pertanto i momenti p^{ij} costituiscono una densità solenoidale i cui due invarianti lineare e quadratico sono linearmente legati all'invariante di curvatura dell'ipersuperficie $x^0 = \text{cost.}$.

Le equazioni canoniche $\dot{g}_{ij} = \delta H/\delta p^{ij}$, $\dot{p}^{ij} = -\,\delta H/\delta g_{ij}$, ove δ è simbolo di derivata variazionale, assumono esplicitamente l'espressione

$$\begin{aligned} \dot{g}_{ij} &= \frac{2}{\sqrt{-g^{00}}\,\sqrt{{}^3g}}(p_{ij} - \tfrac{1}{2}\,pg_{ij}) + \nu_{i/j} + \nu_{j/i}\,, \\ \dot{p}^{ij} &= \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}\,\sqrt{{}^3g}}\left((\tfrac{1}{2}p^{rs}p_{rs} - \tfrac{1}{4}p^2)h^{ij} + pp^{ij} - 2p^{ir}p_r{}^j\right) \end{aligned} \tag{14}$$

$$-\frac{\sqrt{{}^3g}}{\sqrt{-g^{00}}}({}^3R^{ij} - \tfrac{1}{2}\,{}^3Rh^{ij}) + \sqrt{{}^3g}\left(\frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}\right)_{,rs}(h^{ri}h^{sj} - h^{rs}h^{ij})$$
$$+ (p^{ij}\nu^r)_{/r} - p^{ir}\nu^j{}_{/r} - p^{jr}\nu^i{}_{/r}\,.$$

2. - Campi deboli

Per deboli campi gravitazionali, è possibile scegliere un sistema di coordinate (quasi galileiano) per il quale $g_{\alpha\beta}$ differisce di poco dai valori galileiani $\eta_{\alpha\beta}$ ($\eta_{\alpha\beta} = -1, +1, 0$, secondo la solita convenzione per gli indici).

In prima approssimazione, poniamo semplicemente

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \underset{1}{g_{\alpha\beta}} = \eta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}\,, \tag{15}$$

ove $\underset{1}{g_{\alpha\beta}} \equiv \gamma_{\alpha\beta}$ sono quantità piccole, $|\gamma_{\alpha\beta}| \ll 1$, tali da poter trascurare le po-

tenze di ordine superiore a quelle che si considerano nelle varie equazioni.
Anche $g^{\alpha\beta}$ differisce da $\eta^{\alpha\beta}$ per quantità piccole e si ha

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta} \qquad \text{con} \qquad \gamma^{\alpha\beta} = \gamma_{\mu\nu}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} . \tag{16}$$

La densità lagrangiana (2) assume allora un'espressione quadratica nelle derivate prime (ordinarie) spazio-temporali dei potenziali

$$\underset{1}{\mathscr{L}} = \tfrac{1}{4}(- g_{\alpha\mu,\nu}\, g^{\alpha\mu,\nu} + 2g_{\nu\alpha,\mu}\, g^{\mu\nu,\alpha} - 2g_{\alpha\nu,}{}^{\alpha}\, \gamma^{,\nu} + \gamma_{,\nu}\, \gamma^{,\nu}) , \tag{17}$$

ove $\gamma = \gamma_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$, od anche, per comodità di calcolo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\mathscr{L}} = \tfrac{1}{4}\,(- g_{\alpha\nu,\mu}\, g^{\alpha\nu,\mu} + (g_{\nu\mu,\alpha} + g_{\mu\alpha,\nu})\, g^{\alpha\nu,\mu} - 2g^{\alpha\nu,\mu}\, \eta_{\mu\alpha}\, g^{\lambda\omega,\tau}\, \eta_{\lambda\omega}\, \eta_{\tau\nu} + \\ + g^{\alpha\nu,\mu}\, \eta_{\alpha\nu}\, g^{\lambda\tau,\varrho}\, \eta_{\lambda\tau}\, \eta_{\varrho\mu}) ,\end{aligned} \tag{17'}$$

cosicchè le equazioni lagrangiane $\partial/\partial x^{\mu}(\partial\mathscr{L}/\partial g^{\alpha\nu}{}_{,\mu}) - \partial\mathscr{L}/\partial g^{\alpha\nu} = 0$ risultano linearizzate

$$\begin{aligned}- (g_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}g\eta_{\alpha\beta}),{}^{\mu}{}_{\mu} + (g_{\alpha\mu,}{}^{\mu} - \tfrac{1}{2}\gamma_{,\alpha})_{,\beta} \\ + (g_{\beta\mu,}{}^{\mu} - \tfrac{1}{2}\gamma_{,\beta})_{,\alpha} - (g_{\varrho\mu} - \tfrac{1}{2}\gamma\eta_{\varrho\mu})^{,\varrho\mu}\eta_{\alpha\beta} = 0 .\end{aligned} \tag{18}$$

Nell'approssimazione considerata, una soluzione delle (18) è definita a meno della trasformazione « di gauge »

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - (\xi_{\beta,\alpha} + \xi_{\alpha,\beta}) , \tag{19}$$

indotta dal più generale cambiamento di coordinate che rispetti la condizione di « campo debole », del tipo

$$\bar{x}^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^0 x^1 x^2 x^3) , \tag{20}$$

ove ξ^{α} e le sue derivate prime sono infinitesimi dello stesso ordine di $\gamma_{\alpha\beta}$.
La condizione di armonicità per le coordinate: $(\bar{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\bar{\gamma}\eta_{\alpha\beta})^{,\beta} = 0$ equivale ad un'opportuna scelta per ξ_{α} nel passaggio da $g_{\alpha\beta}$ a $\bar{g}_{\alpha\beta}$, e precisamente

$$\Box\, \xi_{\alpha} = \gamma_{\alpha\beta,}{}^{\beta} - \tfrac{1}{2}\gamma_{,\alpha} \equiv (\gamma_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\gamma\eta_{\alpha\beta})^{,\beta} . \tag{21}$$

Le (18), in coordinate armoniche, assumono la classica espressione

$$\Box\, g_{\alpha\beta} = 0 , \qquad \text{con la condizione} \qquad (g_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\gamma\eta_{\alpha\beta})^{,\beta} = 0 , \tag{22}$$

essendo $\Box$ l'operatore di d'Alembert dello spazio-tempo minkowskiano.

3. - Equazioni hamiltoniane per campi deboli

La decomposizione (6) del tensore metrico spazio-temporale risulta, per campi deboli

$$\begin{aligned} &g_{ij} = h_{ij} = \delta_{ij} + \gamma_{ij}\,, && h^{ij} = \delta^{ij} - \gamma^{ij}\,, \\ &g_{0i} = \gamma_{0i}\,, && g^{0i} = -\gamma^{0i}\,, \\ &g_{00} = -1 + \gamma_{00}\,, && g^{00} = -1 - \gamma^{00}\,, \end{aligned} \tag{23}$$

e si ha pertanto

$$\sqrt{{}^3g} = 1 + \tfrac{1}{2}{}^3\gamma\,, \quad \text{ove } {}^3\gamma = \gamma_{ij}\delta^{ij}\,, \quad \sqrt{-g^{00}} = 1 + \tfrac{1}{2}\gamma^{00}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}} = 1 - \tfrac{1}{2}\gamma^{00}\,.$$

Il secondo tensore fondamentale dell'ipersuperficie $x^0 = \text{cost.}$ diventa

$$b_{rs} = \frac{\Gamma^0_{rs}}{1 + \frac{1}{2}\gamma^{00}} = \frac{-\Gamma_{rs0}}{1 + \frac{1}{2}\gamma^{00}} = \tfrac{1}{2}\gamma_{rs,0}\,, \tag{24}$$

ed il suo legame con i momenti

$$p^{ij} = b^{ij} - b\delta^{ij}\,, \qquad b_{ij} = p_{ij} - \tfrac{1}{2}p\,\delta_{ij}\,, \tag{25}$$

ove $p = p^{ij}\delta_{ij} = -2b = -2b^{ij}\delta_{ij}$.

Si ottiene poi, sempre nell'approssimazione considerata

$$\begin{aligned} 2\,{}^3R_{ij} &= \gamma_{ir,j}{}^{r} + \gamma_{jr,i}{}^{r} - {}^3\gamma_{,ij} - \gamma_{ij,r}{}^{r} \equiv (\gamma_{ir,}{}^{r} - \tfrac{1}{2}{}^3\gamma_{,i})_{,j} + (\gamma_{jr,}{}^{r} - \tfrac{1}{2}{}^3\gamma_{,j})_{,i} - \gamma_{ij,r}{}^{r}\,, \\ {}^3R &= R_{ij}\delta^{ij} = \gamma_{ij,}{}^{ij} - {}^3\gamma_{,j}{}^{j}\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Le due densità scalare e vettoriale $\mathscr{H}^*$, $\mathscr{H}^r$ (11) e (12) diventano

$$\mathscr{H}^* = (1 - \tfrac{1}{2}{}^3\gamma)(p_{ij}p^{ij} - \tfrac{1}{2}p^2) + (1 + \tfrac{1}{2}{}^3\gamma)(\gamma^{ij}{}_{,ij} - {}^3\gamma_{,i}{}^{i})\,, \tag{27}$$

$$\mathscr{H}^r = -2p^{rs}{}_{,s} - 2p^{is}\gamma^{r}_{i,s} + p^{is}\gamma_{is,}{}^{r}\,, \tag{28}$$

quindi la densità hamiltoniana ha l'espressione

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &= (1 - \tfrac{1}{2}\gamma^{00})\mathscr{H}^* + g_{0r}\mathscr{H}^r \\ &= p_{ij}p^{ij} - \tfrac{1}{2}p^2 + (1 - \tfrac{1}{2}\gamma^{00} + \tfrac{1}{2}{}^3\gamma)(\gamma_{ij,}{}^{ij} - {}^3\gamma_{,i}{}^{i}) - 2g_{0r}\,p^{rs}{}_{,s}\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Le equazioni hamiltoniane (14) risultano

$$\dot{g}_{ij} = \frac{2}{\sqrt{-g^{00}}\,\sqrt{{}^3g}}\,(p_{ij} - \tfrac{1}{2}p\delta_{ij}) + v_{i,j} + v_{j,i}\,,$$

$$\dot{p}^{ij} = -\frac{\sqrt{{}^3g}}{\sqrt{-g^{00}}}\,({}^3R^{ij} - \tfrac{1}{2}{}^3R\delta^{ij}) + \sqrt{{}^3g}\,\Big(\frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}\Big)_{,rs}\,(\delta^{ri}\delta^{sj} - \delta^{rs}\delta^{ij})$$

e quindi, sempre in prima approssimazione, tenendo presente le (26)

$$\begin{aligned} &\dot{\gamma}_{ij} = 2p_{ij} - p\delta_{ij} + v_{i,j} + v_{j,i} \\ (30)\qquad &\dot{p}^{ij} = -\tfrac{1}{2}\big((\gamma^{ir}{}_{,r} - \tfrac{1}{2}{}^3\gamma_{,}{}^{i})^{,j} + (\gamma^{jr}{}_{,r} - \tfrac{1}{2}{}^3\gamma_{,}{}^{j})^{,i} - \gamma^{ij}{}_{,r}{}^{r}\big) + \tfrac{1}{2}(\gamma^{rs}{}_{,rs} - {}^3\gamma_{,r}{}^{r})\,\delta^{ij} \\ &\qquad\qquad - \gamma^{00,ij} + \tfrac{1}{2}\gamma^{00}{}_{,r}{}^{r}\,\delta^{ij}\,. \end{aligned}$$

In definitiva il quadro delle equazioni hamiltoniane per campi deboli, unite a quelle di vincolo di prima approssimazione, è il seguente

$$\begin{aligned} &\dot{\gamma}_{ij} = 2p_{ij} - p\delta_{ij} + v_{i,j} + v_{j,i}\,, \\ (31)\qquad &\dot{p}^{ij} = -\tfrac{1}{2}(\gamma^{ir}{}_{,r}{}^{j} + \gamma^{jr}{}_{,r}{}^{i} - {}^3\gamma^{,ij} - \gamma^{ij}{}_{,r}{}^{r}) - \tfrac{1}{2}\gamma^{00,ij} + \tfrac{1}{2}\gamma^{00}{}_{,r}{}^{r}\,\delta^{ij} \\ &\gamma_{ij,}{}^{ij} - {}^3\gamma_{,i}^{\ i} = 0\,, \qquad p^{ij}{}_{,j} = 0\,. \end{aligned}$$

Tenendo presente il legame lineare (25) fra i momenti coniugati ed il secondo tensore fondamentale dell'ipersuperficie $x^0 = \text{cost.}$, le equazioni hamiltoniane (31) possono esprimersi in termini dei due tensori fondamentali di detta ipersuperficie, oltre che dei parametri $v_i = g_{0i}$ e g^{00} (legati, com'è noto, alla normale dell'ipersuperficie)

$$\begin{aligned} &\dot{g}_{ij} = 2b_{ij} + 2b\delta_{ij} + v_{i,j} + v_{j,i}\,, \\ (31)'\qquad &\dot{b}^{ij} - \dot{b}\delta^{ij} = \tfrac{1}{2}(h^{ir}{}_{,r}{}^{j} + h^{rj}{}_{,r}{}^{i} + {}^3\gamma_{,}{}^{ij} - h^{ij}{}_{,r}{}^{r}) + \tfrac{1}{2}g^{00,ij} - \tfrac{1}{2}g^{00}{}_{,r}{}^{r}\,\delta^{ij}\,, \\ &\qquad\qquad \gamma^{ij}{}_{,ij} - {}^3\gamma_{\ i}{}^{i} = 0\,, \qquad b^{ij}{}_{,j} - b^{,i} = 0\,. \end{aligned}$$

Una forma particolarmente semplice si può però ottenere per opportuna scelta del sistema di coordinate sull'ipersuperficie $x^0 = \text{cost.}$ di metrica $ds^2 = (\delta_{ij} + \gamma_{ij})\,dx^i\,dx^j$.

Scritte le (31) nel modo seguente

$$\begin{aligned} &\dot{\gamma}_{ij} = 2p_{ij} - p\delta_{ij} + v_{i,j} + v_{j,i}\,, \\ (32)\qquad &\dot{p}^{ij} = -\tfrac{1}{2}\big((\gamma^{ir}{}_{,r} - \tfrac{1}{2}{}^3\gamma^{,i})^{,j} + (\gamma^{jr}{}_{,r} - \tfrac{1}{2}{}^3\gamma^{,j})^{,i}\big) + \tfrac{1}{2}\gamma^{ij}{}_{,r}{}^{r} - \tfrac{1}{2}\gamma^{00,ij} + \tfrac{1}{2}\gamma^{00}{}_{,r}{}^{r}\,\delta^{ij}\,, \\ &\qquad\qquad (\gamma_{ij,}{}^{i} - {}^3\gamma_{,j})^{,j} = 0\,, \qquad p^{ij}{}_{,j} = 0 \end{aligned}$$

e assunto un sistema di coordinate (armoniche sull'ipersuperficie) per cui

$$\gamma_{ij,}{}^{i} - \tfrac{1}{2}{}^{3}\gamma_{,j} \equiv (\gamma_{ij} - \tfrac{1}{2}{}^{3}\gamma\delta_{ij})^{,i} = 0\,, \tag{33}$$

si ottiene infatti

$$\begin{gathered} \dot{g}_{ij} = 2p_{ij} - p\delta_{ij} + v_{i,j} + v_{j,i}\,, \\ \dot{p}^{ij} = -\tfrac{1}{2}\Delta(h^{ij} + g^{00}\delta^{ij}) + \tfrac{1}{2}g^{00,ij}\,, \\ \Delta\,{}^{3}\gamma = 0\,, \qquad p^{ij}{}_{,j} = 0\,, \end{gathered} \tag{34}$$

dove Δ è l'operatore di Laplace.

Dalla forma hamiltoniana delle equazioni dei campi deboli si possono dedurre le equazioni lagrangiane corrispondenti. Derivando la prima equazione (31) rispetto ad x^0 e tenendo conto della seconda, si ottiene, previa eliminazione dei momenti

$$\ddot{\gamma}_{ij} = -\gamma_{ir,j}{}^{r} - \gamma_{jr,i}{}^{r} + \gamma_{ij,r}{}^{r} + {}^{3}\gamma_{,ij} - \gamma^{00}{}_{,ij} + \dot{g}_{0i,j} + \dot{g}_{0j,i}\,, \tag{35}$$

ossia, raccogliendo opportunamente i termini,

$$\ddot{\gamma}_{ij} = -(\gamma_{i\alpha} - \tfrac{1}{2}\gamma\eta_{i\alpha})_{,j}{}^{\alpha} - (\gamma_{j\alpha} - \tfrac{1}{2}\gamma\eta_{j\alpha})_{,i}{}^{\alpha} + \gamma_{ij,r}{}^{r}\,. \tag{35'}$$

Assumendo il sistema di coordinate che soddisfi alle tre condizioni

$$(\gamma_{i\alpha} - \tfrac{1}{2}\gamma\eta_{i\alpha})^{,\alpha} = 0\,, \tag{36}$$

si ottiene

$$\Box\gamma_{ij} \equiv \Box g_{ij} = 0 \tag{37}$$

e cioè si ritrova per i potenziali superficiali g_{ij} l'equazione delle onde di D'Alembert.

Le condizioni (36) per le coordinate spazio-temporali, scritte nel modo seguente

$$(\gamma_{ij} - \tfrac{1}{2}{}^{3}\gamma\delta_{ij})^{,j} - v_{i,0} - \tfrac{1}{2}g^{00}{}_{,i} = 0\,, \tag{36'}$$

mostrano che per passare dalla forma hamiltoniana ridotta (34) alla forma lagrangiana ridotta (37) occorre aggiungere alle condizioni (33) (per le coordinate superficiali) le ulteriori condizioni per g_{0i} e g^{00}: $g_{0i,0} + \frac{1}{2}g^{00}{}_{,i} = 0$ che involgono i parametri estrinseci alle ipersuperfici $x^0 = \text{cost.}$.

Così, nell'impostazione hamiltoniana, basta imporre le tre condizioni (36) alle coordinate per dare la forma tipica di equazioni delle onde alle equazioni di campo riguardanti i potenziali g_{ij}.

Ciò si accorda con quanto deducibile dalle equazioni einsteiniane di campo (3), espresse opportunamente, per l'impostazione del problema di Cauchy, nel sistema

$$R^0_\alpha - \tfrac{1}{2} R g^0_\alpha = 0 \,, \qquad R_{ij} = 0 \,. \tag{38}$$

Anche nel problema di Cauchy, le $g_{\alpha 0}$ sono spogliate di significato intrinseco, mentre tale significato compete alle sei g_{ij}. Le equazioni $R^0_\alpha - \frac{1}{2} R g^0_\alpha = 0$ costituiscono quattro equazioni « di vincolo » che devono essere verificate anche dai dati iniziali (valori, su di una ipersuperficie spaziale, dei potenziali g_{ij} e delle loro derivate prime temporali $\dot{g}_{ij}$) e sono equivalenti ai quattro vincoli hamiltoniani. Le rimanenti equazioni $R_{ij} = 0$ costituiscono le equazioni di evoluzione e per campi deboli, in prima approssimazione, diventano

$$\eta^{\varrho\sigma}(\gamma_{i\sigma,\varrho j} + \gamma_{j\varrho,i\sigma} - \gamma_{ij,\varrho\sigma} - \gamma_{\varrho\sigma,ij}) = 0 \,,$$

ossia

$$(\gamma_{i\nu,}{}^{\nu} - \tfrac{1}{2}\gamma_{,i})_{,j} + (\gamma_{j\nu,}{}^{\nu} - \tfrac{1}{2}\gamma_{,j})_{,i} - \gamma_{ij,\nu}{}^{\nu} = 0 \,, \tag{39}$$

che coincidono con le (35′) e pertanto si riducono alla forma di equazioni di d'Alembert con le tre condizioni (36).

Nell'impostazione hamiltoniana le « velocità lagrangiane » $\dot{g}_{ij}$ sono sostituite dai momenti p^{ij} e quindi dal secondo tensore fondamentale b^{ij} della generica ipersuperficie $x^0 = \text{cost.}$. Mentre il primo tensore fondamentale g_{ij} riassume i potenziali gravitazionali, il secondo tensore fondamentale si può collegare ad una sorta di energia cinetica del campo.

Considerata l'espressione dell'hamiltoniana in termini di g_{ij} e b^{ij}

$$H = \int \Big(\frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}(b_{ij}b^{ij} - b^2 + {}^3R) - 2g_{0r}(b^{rs} - bh^{rs})_{,s}\Big)\sqrt{{}^3g}\,\mathrm{d}^3x \,, \tag{40}$$

ed interpretando come « parte cinetica » T dell'energia di campo la parte dell'hamiltoniana individuata dai termini quadratici nei momenti p^{ij}, e quindi nei b^{ij}, si ha nell'approssimazione considerata

$$T = \int (p_{ij}p^{ij} - \tfrac{1}{2}p^2)\,\mathrm{d}^3x \equiv \int (b^{ij}b_{ij} - b^2)\,\mathrm{d}^3x \equiv \int \varepsilon^r_{ih}\varepsilon_{rkj} b^{ij} b^{hk}\,\mathrm{d}^3x \equiv \int B\,\mathrm{d}^3x \,, \tag{41}$$

dove B è l'invariante di seconda specie del tensore b^{ij}, costruito col tensore di Ricci ε_{ijr} dell'ipersuperficie $x^0 = \text{cost.}$.

Bibliografia

[1] R. ADLER, M. BAZIN and M. SCHIFFER, *Introduction to General Relativity*, Mc Graw-Hill, New York 1975.

[2] R. ARNOWITT, S. DESER and C. W. MISNER, *The dynamics of general relativity*, in *Gravitation*, J. Wiley, New York-London 1962.

[3] P. G. BERGMANN and A. B. KOMAR, *Observables and commutation relations*, in *Les théories relativistes de la gravitation*, Paris 1962.

[4] S. DESER, *Décomposition covariante et énergie du champ gravitationnel*, Ann. Ist. H. Poincaré (A) **8** (1968).

[5] P. A. M. DIRAC: $[\bullet]_1$ *Generalized Hamiltonian dynamics*, Proc. Roy. Soc. (A) **246** (1958), 326; $[\bullet]_2$ *The theory of gravitation in Hamiltonian form*, Proc. Roy. Soc. (A) **246** (1958), 333; $[\bullet]_3$ *The energy of the gravitational field*, in *Les théories relativistes de la gravitation*, Paris 1962.

[6] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme*, Paris 1955.

[7] P. UDESCHINI: $[\bullet]_1$ *Hamiltonian formalism in einsteinian gravitation: geometrical aspect*, Meccanica **3** (1968), 148; $[\cdot]_2$ *Sulla formulazione hamiltoniana della teoria della gravitazione nell'indirizzo di Dirac*, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Symposia Mathematica **12** (1973), 235.

[8] S. WEINBERG, *Gravitation and Cosmology*, J. Wiley & Sons, Inc., New York 1972.

* * *