Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 607-613

RENATO NARDINI (*)

# Superfici di discontinuità nella magnetodinamica dei fluidi dielettrici non viscosi (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

## 1. - Introduzione

A un primo lavoro sulle superfici di discontinuità in magnetofluidodinamica (MFD) studiate col metodo delle varietà caratteristiche dei sistemi differenziali [**4**]$_1$ (1956), ne sono seguiti sullo stesso argomento altri di vari Autori: si possono segnalare due lavori di G. Mattei [**3**]$_1$ (1967) e [**3**]$_2$ (1972), nei quali è riportata una bibliografia che si può ritenere completa fino al 1971. Seguono poi altri tre lavori dello stesso Autore, parte dei quali si riferisce all'argomento in questione in quanto inquadrato nel problema più generale delle onde in MFD: si tratta più precisamente dei lavori [**3**]$_3$ (1972) n. **10**, [**3**]$_4$ (1973) n. **9** e [**3**]$_5$ (1974) nn. dal **7** al **13**; c'è infine da segnalare un lavoro di M. Ignat [**1**] (1976). Sullo stesso metodo ma nell'ambito della magnetoelasticità si può ricordare il lavoro [**4**]$_2$ (1958).

Qui ci si occupa del caso particolare di un fluido dielettrico, non viscoso, omogeneo (anche dal punto di vista elettromagnetico), dotato di carica elettrica spaziale $\varrho_e$, in moto in presenza di un campo magnetico $\boldsymbol{H}$ e di un campo elettrico $\boldsymbol{E}$.

Dopo aver richiamato i punti essenziali del metodo usato (n. **2**) e aver introdotto le equazioni che reggono il fenomeno (n. **3**), si ricavano (n. **4**) le con-

---

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Piazza di Porta S. Donato 5, 40127 Bologna, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 15-I-1979.

dizioni di compatibilità dinamica, che danno luogo (n. **5**) a *superfici di discontinuità debole di ordine uno* e a *superfici materiali di discontinuità*: la denominazione qui adottata è quella proposta da G. Mattei in [**3**]$_2$ n. **4** per indicare nel primo caso i fronti d'onda, ossia le superfici attraverso le quali sussiste una discontinuità di prima specie per almeno una derivata parziale del primo ordine di una o più funzioni scalari o vettoriali incognite che compaiono nel sistema di equazioni differenziali del primo ordine del problema, mentre sono continue tutte le funzioni incognite; nel secondo caso si tratta invece di superfici di discontinuità solidali col fluido in moto. Infine (n. **6**) si fa distinzione fra fluidi incompressibili e compressibili.

## 2. - Cenni sul metodo usato e relative notazioni

Seguendo il Levi-Civita [**2**], sia

$$z(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{2.1}$$

l'equazione di una superficie $\sigma$ mobile in funzione del tempo $t = x_0$ rispetto al sistema cartesiano ortogonale $S_3(\mathrm{O}, x_1 x_2 x_3)$ a cui è riferito il moto del fluido.

I valori

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

sono legati alle componenti $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ del versore $\boldsymbol{n}$ normale, in un istante assegnato, alla $\sigma$ dalle relazioni

$$\alpha_i = \frac{p_i}{g}\,(i = 1, 2, 3)\,, \qquad g = \pm\,|\mathrm{grad}\, z|\ (^1); \tag{2.3}$$

inoltre, detta $a$ la velocità di avanzamento di $\sigma$ rispetto ad $S_3$ nella direzione di $\boldsymbol{n}$ e posto

$$p_0 = \frac{\partial z}{\partial x_0}\,, \tag{2.4}$$

(1) Per le considerazioni che faremo non è necessario specificare il segno di $g$ e quindi il verso di $\boldsymbol{n}$.

si ha la formula

$$a = -\frac{p_0}{g}\,. \tag{2.5}$$

Com'è noto, nello spazio cinematico $S_4(O, x_0, x_1, x_2, x_3)$ la (2.1) rappresenta la varietà caratteristica $\Sigma$ del fenomeno.

Si supponga ora che attraverso $\Sigma$ abbiano una discontinuità di prima specie le derivate parziali prime di una certa funzione scalare $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ o di un certo vettore $\boldsymbol{u}(x_0, x_1, x_2, x_3)$: indicando con la lettera $\Delta$ premessa ad un simbolo il salto attraverso la $\Sigma$ della quantità rappresentata da tale simbolo, si ha

$$\Delta\frac{\partial f}{\partial x_i} = l p_i\,, \qquad \Delta\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} = \boldsymbol{l} p_i \qquad\qquad (i = 0, 1, 2, 3)\,, \tag{2.6}$$

dove $l$ e $\boldsymbol{l}$ sono i corrispondenti parametri che caratterizzano le discontinuità in questione.

In base alle (2.6), dalle equazioni differenziali (del prim'ordine) del problema si possono ricavare le cosidette *condizioni di compatibilità dinamica*, le quali, dato che nelle equazioni tutte le derivate parziali prime si presentano linearmente, risultano lineari e omogenee nei detti parametri. Dalle dette condizioni si può dedurre infine la possibilità di esistenza dei tipi di superfici di discontinuità di cui si è detto al n. **1**.

## 3. - Equazioni che reggono il fenomeno

Sia $\boldsymbol{v}$ la velocità di una particella fluida, $\varrho$ la densità materiale, $p$ la pressione, $\boldsymbol{F}$ la forza di massa di natura non elettromagnetica; le costanti $\mu$ ed $\varepsilon$ siano rispettivamente la permeabilità magnetica e la costante dielettrica del fluido.

Il vettore $\boldsymbol{u}$ densità di corrente elettrica si esprimerà soltanto mediante la corrente di convezione e si avrà

$$\boldsymbol{u} = \varrho_e \boldsymbol{v} = \varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{E}\boldsymbol{v}\,. \tag{3.1}$$

Tenendo conto di ciò anche per quanto riguarda la forza deflettente di Lorentz $\mu\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H}$, le equazioni della MFD sono allora

$$\begin{aligned} &\varrho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\operatorname{grad} p + \varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E} + \mu\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) + \varrho\boldsymbol{F}\,,\\ &\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \varepsilon\operatorname{div}\boldsymbol{E}\boldsymbol{v} + \varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\,, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\,, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nella $(3.2)_2$ non si trascura la corrente di spostamento in accordo col fatto che non si trascura la densità di carica spaziale, che è in generale dello stesso ordine di grandezza.

Per il momento non precisiamo se il fluido è o non è compressibile.

## 4. - Condizioni di compatibilità dinamica

Ricaviamo ora le relazioni che intercorrono fra le discontinuità, attraverso un'eventuale varietà caratteristica $\Sigma$, delle derivate che compaiono nelle (3.2), sempre tenendo presente che attraverso la $\Sigma$ i vettori $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ e la $p$ si suppongono continui; si ha allora

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} &\varrho\Delta\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\Delta\operatorname{grad}p + \varepsilon\Delta\operatorname{div}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}+\mu\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})\,,\\ &\Delta\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \varepsilon\Delta\operatorname{div}\boldsymbol{E}\boldsymbol{v} + \varepsilon\Delta\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\,,\quad \Delta\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu\Delta\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\,,\quad \Delta\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0\,. \end{aligned}$$

Indichiamo con $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{e}$ ed $\boldsymbol{h}$ i vettori caratteristici delle discontinuità presentate attraverso la $\Sigma$ dalle derivate prime rispettivamente di $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$; analogamente sia $\lambda_p$ il parametro relativo alle discontinuità delle derivate prime di $p$. Ricordando (2.1) e posto

$$(4.2)\qquad s = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x_0}\,,$$

poichè è (si veda $[4]_1$ n. **8**)

$$\Delta\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = s\boldsymbol{w}\,,\qquad \Delta\operatorname{grad}p = \lambda_p g\boldsymbol{n}\,,\qquad \Delta\operatorname{div}\boldsymbol{E} = g\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}\,,$$

$$\Delta\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = g\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{h}\,,\qquad \Delta\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = p_0\boldsymbol{e}\,,$$

dalle (4.1) si ricavano le seguenti equazioni di compatibilità dinamica

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} &\varrho s\boldsymbol{w} = -\lambda_p g\boldsymbol{n} + \varepsilon g\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}(\boldsymbol{E}+\mu\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})\,,\\ &g\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{h} = \varepsilon g\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}\boldsymbol{v} + \varepsilon p_0\boldsymbol{e}\,,\quad g\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e} = -\mu p_0\boldsymbol{h}\,,\qquad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{h} = 0\,. \end{aligned}$$

**4. - Superfici di discontinuità**

Ricavando $\boldsymbol{h}$ da $(4.3)_3$ e sostituendolo in $(4.3)_2$ si ha un'unica equazione vettoriale in $\boldsymbol{e}$ sotto la forma

$$\xi \boldsymbol{e} + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e} \boldsymbol{b} = 0 \,, \tag{5.1}$$

con $\xi = 1 - a^2/c^2$, $\boldsymbol{b} = (a/c^2)\, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{n}$ $\quad (c^2 = 1/\varepsilon\mu)$.

Eguagliando a zero il determinante dei coefficienti delle componenti $e_1$, $e_2$, $e_3$ di $\boldsymbol{e}$ nel sistema lineare omogeneo delle tre equazioni scalari equivalenti alla (5.1) si ricava la cosidetta *equazione delle varietà caratteristiche* che è così espressa

$$\begin{vmatrix} \xi + n_1 b_1 & n_2 b_1 & n_3 b_1 \\ n_1 b_2 & \xi + n_2 b_2 & n_3 b_2 \\ n_1 b_3 & n_2 b_3 & \xi + n_3 b_3 \end{vmatrix} = \xi^2(\xi + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b}) = 0 \,.$$

Il problema dà così luogo a due equazioni; la prima di esse $\xi = 0$ dà

$$a = c \,, \tag{5.2}$$

che corrisponde alla superficie di discontinuità dovuta fisicamente al ben noto fronte d'onda elettromagnetico esistente in un mezzo dielettrico, di cui la (5.2) dà la velocità di propagazione.

Poichè in base alle (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5) si ha $s = p_0 + g v_n = g(- a + v_n)$, l'equazione $\xi + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ dà

$$s = 0 \,, \tag{5.3}$$

che rappresenta una superficie materiale di discontinuità, che si sposta con velocità $a = v_n$ e sulla quale, in base alle $(4.3)_1$, il campo complessivo $\boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}$ risulta avere solo componente normale; inoltre moltiplicando la $(4.3)_1$ scalarmente per $\boldsymbol{n}$ si ottiene

$$\lambda_p = \varepsilon \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e} (\boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{n} \,. \tag{5.4}$$

Moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{n}$ la $(4.3)_2$ si ottiene

$$s \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e} = 0 \,, \tag{5.5}$$

per cui si prospettano due casi: il primo corrisponde a $s \neq 0$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e} = 0$; ciò fa sì che nelle (4.3) si abbia netta separazione fra fenomeni fluidodinamici descritti dalla sola $(4.3)_1$ mancante dell'ultimo termine e fenomeni elettromagnetici descritti dalle rimanenti (4.3), che portano, com'è noto, alla (5.2) valida però sotto l'ipotesi che sul fronte d'onda elettromagnetico $\Sigma$ il parametro $\boldsymbol{e}$ ha solo componente tangenziale. Inoltre dall'equazione $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e} = 0$ si deduce che attraverso $\Sigma$ non c'è discontinuità nella densità di carica spaziale $\varrho_e$. Il secondo caso ripropone la (5.3).

## 6. - Caso del fluido incompressibile o compressibile

(A) Se il fluido è incompressibile, le (3.2) vanno completate con l'equazione

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 , \tag{6.1}$$

da cui si deduce l'ulteriore condizione di compatibilità dinamica

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{w} = 0 . \tag{6.2}$$

Per $s \neq 0$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e} = 0$ (assenza nel moto fluido di interazione elettromagnetica) a seguito della (6.2) dalla $(4.3)_1$ si ottiene $\lambda_p = 0$, $\boldsymbol{w} = 0$, e quindi, com'è ben noto, non esistono superfici di discontinuità debole nella sola fluidodinamica.

Nel caso in cui invece è $s = 0$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e} \neq 0$, ossia in presenza di interazione fra moto fluido e campo elettromagnetico, sulla superficie materiale di discontinuità è $\lambda_p \neq 0$ e vale la (5.4), mentre la componente tangenziale di $\boldsymbol{w}$ risulta indeterminata.

(B) Se il fluido è compressibile ed isoentropico, le (3.2) vanno completate con le equazioni

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} + \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 , \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0 , \qquad p = p(\varrho, S) , \tag{6.3}$$

dove $S$ indica l'entropia specifica.

Detti $\lambda_\varrho$ e $\lambda_S$ rispettivamente i parametri relativi alle discontinuità delle derivate parziali prime di $\varrho$ e di $S$, le (6.3) danno le ulteriori condizioni di compatibilità dinamica

$$s\lambda_\varrho + g\varrho\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{w} = 0 , \qquad s\lambda_S = 0 . \tag{6.4}$$

D'altra parte, in base a $(6.3)_3$ è

$$\lambda_p = c_S^2 \lambda_\varrho + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\varrho \lambda_S \,, \tag{6.5}$$

essendo $c_S$ la velocità del suono. Da $(6.4)_2$ si ricava (cfr. anche G. Mattei $[\mathbf{3}]_2$ n. **5**) che, se è $s \neq 0$ e perciò, per quanto si è visto al n. **5**, nel moto fluido manca l'interazione elettromagnetica, è $\lambda_S = 0$, ossia per quanto riguarda le superfici di discontinuità non solidali col fluido la derivata lagrangiana dell'entropia è continua attraverso di esse e il comportamento del fluido isoentropico è identico a quello del fluido barotropico (per il quale la $(6.3)_3$ diventa $p = p(\varrho)$).

Se poi è $s = 0$, ossia sulle superfici materiali di discontinuità, la $(6.4)_1$ si riconduce alla (6.2), ossia il fluido compressibile ha lo stesso comportamento di quello incompressibile.

## Bibliografia

[**1**] M. Ignat, *Sulle superfici di discontinuità debole di ordine* 1 *in un plasma rarefatto radiativo,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **61** (1976), 455-463.

[**2**] T. Levi Civita, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa,* Zanichelli, Bologna 1931.

[**3**] G. Mattei: $[\bullet]_1$ *Varietà caratteristiche e propagazione ondosa in un plasma magnetizzato privo di urti,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **21** (1967), 745-763; $[\bullet]_2$ *Superfici di discontinuità in fisica dei plasmi,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **26** (1972), 437-461; $[\bullet]_3$ *Propagazione di onde magnetofluidodinamiche in un plasma incomprimibile,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **94** (1972), 315-344; $[\bullet]_4$ *Propagazione di onde magnetofluidodinamiche in un plasma comprimibile,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **22** (1973), 149-172; $[\bullet]_5$ *Radiative magnetogasdynamics: basic equations and nonlinear wave propagation,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **10** (1974), 150-173.

[**4**] R. Nardini: $[\bullet]_1$ *Sui fronti d'onda nella magneto-idrodinamica,* Riv. Mat. Univ. Parma (1) **7** (1956), 3-32; $[\bullet]_2$ *Sui fronti d'onda nella magneto-elasticità,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **28** (1958), 225-243.

## Summary

*We study, in the case of non linear and non steady equations, the surfaces of weak discontinuity of order one and the material surfaces of discontinuity in a non conducting, non viscous, homogeneous, compressible or incompressible fluid, which moves in the presence of non vanishing charge density and of a electromagnetic field.*

* * *