Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 715-724

PAOLO SANTORO (*)

Contributi allo studio del centro per le equazioni differenziali autonome non linearizzabili (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. – Sia $\boldsymbol{R}^p$ lo spazio vettoriale di dimensione p sul corpo reale $\boldsymbol{R}$ e sia $\boldsymbol{C}^p$ lo spazio vettoriale di dimensione p sul corpo complesso $\boldsymbol{C}$. Se $x \in \boldsymbol{C}$ indichiamo con $\bar{x}$ il suo coniugato.

Indicato con $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ i versori $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $\boldsymbol{e}_p = (0, 0, \ldots, 1)$ se $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^p$ porremo $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{p} x_k \boldsymbol{e}_k$; ed inoltre se $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{p} x_k \boldsymbol{e}_k$ ed $\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{p} y_k \boldsymbol{e}_k$, indichiamo con $\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{k=1}^{p} \bar{x}_k \boldsymbol{e}_k$, $\boldsymbol{xy} = \sum_{k=1}^{p} x_k y_k$; $|\boldsymbol{x}| = (\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{x}})^{1/2}$, $\operatorname{Re} \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} + \bar{\boldsymbol{x}})/2$; $\operatorname{Im} \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})/2i$.

Sia $\mathscr{A}$ un aperto in $\boldsymbol{C}^p$ (ovvero in $\boldsymbol{R}^p$) e sia $\boldsymbol{0} \in \mathscr{A}$. Indichiamo con $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{C}^p)$ l'insieme delle funzioni $\boldsymbol{f}$: $\mathscr{A} \to \boldsymbol{C}^p$ continue e tali che: (i) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ per $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$; (ii) $\mathscr{A}$ sia semplicemente connesso; (iii) l'equazione

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{E}$$

ammetta una sola soluzione $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0)$ per ogni $\boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{A}$ essendo $\boldsymbol{u}$: $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{C}^p \to \boldsymbol{C}^p$ tale che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0)], \qquad \boldsymbol{u}(0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0 .$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Applicata, Via S. Marta 3, 50129 Firenze, Italy.

(**) Ricevuto: 6-II-1979.

In modo analogo si definisce l'insieme $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}^p)$ delle funzioni f: $\mathscr{A} \subset \boldsymbol{R}^p \to \boldsymbol{R}^p$. Se $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0)$ è definita per ogni $t > 0$ indichiamo

$$\gamma(T, \boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}\ .$$

Si dice che si ha un *centro* per l'equazione (E) se qualunque sia $\boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{A}$, $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ esiste $T = T(\boldsymbol{x}_0)$ per cui $\gamma(T, \boldsymbol{x}_0)$ è una curva chiusa, semplice di Jordan, cioè $\boldsymbol{u}(T, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{u}(0, \boldsymbol{x}_0)$ ed inoltre $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0) \neq \boldsymbol{u}(t', \boldsymbol{x}_0)$ per $0 < t,\ t' < T$.

L'insieme delle $f \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{C}^p)$ per cui si ha un centro per l'equazione (E) non è vuoto; basti osservare che si ha un centro per l'equazione lineare $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}$ matrice tale che $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{\lambda \in \boldsymbol{C}\colon \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0\}$ abbia autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non nulli, distinti, con parte reale nulla, e tali che λ_h/λ_k è razionale qualunque siano h e k.

Naturalmente segue che se $f \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}^{2p})$ si può avere un centro per l'equazione (E).

D'altra parte è noto all'autore che se $f \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}^3)$ non può mai presentarsi il caso del centro (cfr. ad es. [**2**]).

Sia $\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}^p$, $\boldsymbol{x}(t) = \sum_{k=1}^{p} x_k(t)\, \boldsymbol{e}_k$; ponendo $x_k(t) = \varrho_k(t) \exp\big(i\theta_k(t)\big)$, si ha $\boldsymbol{x}(t) = \sum_{k=1}^{p} \varrho_k(t) \exp\big(i\theta_k(t)\big)\, \boldsymbol{e}_k$.

In particolare per ogni soluzione $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0)$ dell'equazione (E) scriveremo

$$\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=1}^{p} \varrho_k(t, \boldsymbol{x}_0) \exp\big(i\theta_k(t, \boldsymbol{x}_0)\big)\, \boldsymbol{e}_k\ . \tag{1}$$

Evidentemente si ha un centro per l'equazione (E) se e solo se qualunque sia $\boldsymbol{x}_0 = \sum x_k^0 \boldsymbol{e}_k \in \mathscr{A}$ esiste $T = T(\boldsymbol{x}_0)$ per il quale si abbia, per $k = 1, 2, \ldots, p$,

$$\varrho_k(T, \boldsymbol{x}_0) \exp\big(i\theta_k(T, \boldsymbol{x}_0)\big) = \varrho_k(0, \boldsymbol{x}_0) \exp\big(i\theta_k(0, \boldsymbol{x}_0)\big) = x_k^0\ . \tag{2}$$

Posto $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p\}$,

$$\gamma_k(T, \boldsymbol{x}_0) = \{z \in \boldsymbol{C}\colon z = \varrho_k(t, \boldsymbol{x}_0) \exp\big(i\theta_k(t, \boldsymbol{x}_0)\big),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}\ ,$$

diremo che per $\gamma_k(T, \boldsymbol{x}_0)$ vale la *proprietà F* se esiste $T(x_k^0)$ tale che $\gamma_k\big(T(x_k^0), \boldsymbol{x}_0\big)$ è la frontiera di un insieme Ω_k aperto e limitato, semplicemente connesso di $\boldsymbol{C}$ e $0 \in \Omega_k$.

Se per ogni $\boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{A}' = \{\boldsymbol{x} = \sum x_k \boldsymbol{e}_k \in \mathscr{A},\ x_k \neq 0\}$

(a) vale la proprietà F per $\gamma_k\big(T(x_k^0), \boldsymbol{x}_0\big)$ per $k = 1, 2, \ldots, p$,

(b) il rapporto $T(x_k^0)/T(x_h^0)$ è un numero razionale per $1 \leqslant h,\ k \leqslant p$, si ha un centro per l'equazione (E).

Nel n. **2** di questa nota si trovano condizioni necessarie e condizioni sufficienti perchè valgano le proprietà (a) e (b).

Nel n. **3**, si dimostra che le proprietà (a) e (b) non possono valere nel caso $f \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}^{2p+1})$.

Nel n. **4** si esaminano le condizioni (a), (b) alla luce delle definizioni di rango numerico e di spettro locale, ritrovando le condizioni necessarie per l'esistenza di un centro che sono nella teoria classica delle equazioni lineari e quasi lineari.

L'ipotesi (a) per l'esistenza di un centro è intuitiva ma restrittiva. Nel n. **5** si osserva che la teoria svolta nel n. **2** può essere generalizzata.

Alcune altre osservazioni ed un esempio chiudono il lavoro.

2. – Se per $\gamma_k(T(x_k^0), \boldsymbol{x}_0)$ vale la proprietà F, allora dalla formula integrale di Cauchy per le funzioni olomorfe, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k(T(x_k^0), x_0)} (1/s)\, \mathrm{d}s = 1\,. \tag{3}$$

Poniamo in (E) $\boldsymbol{f} = \sum_{k=1}^{p} f_k \boldsymbol{e}_k$ e, per $k = 1, 2, \ldots, p$, indichiamo con $\varphi_k\colon \mathscr{A}' \to \boldsymbol{C}$ le funzioni definite da $\varphi_k(\boldsymbol{x}) = x_k f_k(\boldsymbol{x})/|x_k|^2$.

Proposizione 1. *Da* (1) *si ha*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log \varrho_k^2(t, \boldsymbol{x}_0) = 2 \operatorname{Re} \varphi_k[\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0)]\,, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \theta_k(t, \boldsymbol{x}_0) = \operatorname{Im} \varphi_k[\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0)]\,. \tag{5}$$

Dim. Posto $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=1}^{p} u_k(t, \boldsymbol{x}_0)\, \boldsymbol{e}_k$, si ha $\dot{\boldsymbol{u}}(t, \boldsymbol{x}_0) = f_k[\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0)]$ e quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log \varrho_k^2(t, \boldsymbol{x}_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log \bar{u}_k u_k = \frac{\bar{u}_k \dot{u}_k + \dot{\bar{u}}_k u_k}{|u_k|^2} = 2 \operatorname{Re} \varphi_k[\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0)]\,,$$

$$2i \operatorname{Im} \varphi_k[u(t, \boldsymbol{x}_0)] = \frac{\bar{u}_k \dot{u}_k - \dot{\bar{u}}_k u_k}{|u_k|^2} = 2i\dot{\theta}_k(t, \boldsymbol{x}_0)\,. \qquad \text{c.v.d.}$$

Proposizione 2. *Se per* $\gamma_k(T, \boldsymbol{x}_0)$ *vale la proprietà* F, *allora l'insieme delle* $\boldsymbol{x} \in \mathscr{A}'$ *per cui* $\operatorname{Re} \varphi_k(\boldsymbol{x}) = 0$ *non è vuoto.*

Dim. Se per γ_k vale la proprietà F allora esiste $T(x_k^0)$ per cui $\log \varrho_k^2(T(x_k^0), \boldsymbol{x}_0) = \log \varrho_k^2(0, \boldsymbol{x}_0)$. L'affermazione segue dal teorema di Rolle-Fermat e da (4). c.v.d.

Proposizione 3. *Se per $\gamma_k(T, \boldsymbol{x}_0)$ vale la proprietà F, allora l'insieme delle $\boldsymbol{x} \in \mathscr{A}'$ per cui $\operatorname{Im} \varphi_k(\boldsymbol{x}) \neq 0$ non è vuoto.*

Dim. Se per γ_k vale la proprietà F, vale (3) ed inoltre è $\log \varrho_k^2(T(x_k^0), \boldsymbol{x}_0) = \log |x_k^0|^2$. Se fosse $\operatorname{Im} \varphi_k(\boldsymbol{x}) = 0$ per qualunque $\boldsymbol{x} \in \mathscr{A}'$ si avrebbe

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k(T(x_k^0), \boldsymbol{x}_0)} (1/s)\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k(T(x_k^0), \boldsymbol{x}_0)} (\bar{s}/|s|^2)\, \mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{T(x_k^0)} \frac{\bar{u}_k(t, \boldsymbol{x}_0)\, \dot{u}_k(t, \boldsymbol{x}_0)}{|u_k(t, \boldsymbol{x}_0)|^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{T(x_k^0)} \operatorname{Im} \varphi_k[u(t, \boldsymbol{x}_0)]\, \mathrm{d}t = 0$$

e saremmo caduti in assurdo. c.v.d.

Indichiamo con $\boldsymbol{Q}$ l'insieme dei numeri razionali e con Ξ l'insieme delle funzioni $\boldsymbol{\tau}\colon \mathscr{A} \to \boldsymbol{Q}^p$, $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}) = (\tau_1(\boldsymbol{x}), \tau_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \tau_p(\boldsymbol{x}))$. Poniamo inoltre $\boldsymbol{\theta}(t, \boldsymbol{x}_0) = (\theta_1(t, \boldsymbol{x}_0), \theta_2(t, \boldsymbol{x}_0), \ldots, \theta_p(t, \boldsymbol{x}_0))$.

Proposizione 4. *Valgono per l'equazione* (E) *le proprietà* (a) *e* (b) *del n.* **1**, *allora la proprietà* (b) *è equivalente alla seguente*

(b)$'$ *esistono $p-1$ e solo $p-1$ funzioni $\boldsymbol{\tau}_j \in \Xi$ $(j = 1, 2, \ldots, p-1)$ linearmente indipendenti tali che $\boldsymbol{\tau}_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\theta}(T, \boldsymbol{x}) = 0$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathscr{A}$ e per $j = 1, 2, \ldots, p-1$.*

Dim. Nelle ipotesi poste si ha un centro per l'equazione (E). Esiste quindi $T(\boldsymbol{x}_0)$ tale che

$$\boldsymbol{u}(T(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=1}^{p} \varrho_k(T(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x}_0) \exp i\theta_k(T(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x}_0)\, \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{u}(0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$$

e $\gamma_k(T(x_k^0), \boldsymbol{x}_0)$ è frontiera di un insieme aperto semplicemente connesso. Allora posto $T(x_0) = T$, si ha $\theta_k(T, \boldsymbol{x}_0) = 2n_k(\boldsymbol{x}_0)\pi$, $(n_k(\boldsymbol{x}_0)$ intero$)$ e $\theta_k(T, \boldsymbol{x}_0)/\theta_h(T, \boldsymbol{x}_0) = n_k(\boldsymbol{x}_0)/n_h(\boldsymbol{x}_0)$ e quindi la proprietà (b$'$).

Viceversa valgano (b)$'$ ed (a), allora $\theta_k(T, \boldsymbol{x}_0)/\theta_h(T, \boldsymbol{x}_0) = \tau(\boldsymbol{x}_0) \in \boldsymbol{Q}$. Sia $T(x_k^0) \neq 0$ tale che $\theta_k(T(x_k^0), \boldsymbol{x}_0) = 2\pi$, allora $T = n_k(\boldsymbol{x}_0)T(x_k^0)$, $(n_k(\boldsymbol{x}_0)$ intero$)$ e $T(x_h^0)/T(x_k^0) = n_h(\boldsymbol{x}_0)/n_k(\boldsymbol{x}_0) \in \boldsymbol{Q}$ e quindi vale (b). c.v.d.

Proposizione 5. *Esistano* $p-1$ *e solo* $p-1$ *vettori* $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \ldots, \boldsymbol{\tau}_p$ $(\boldsymbol{\tau}_k \in \boldsymbol{Q}^p)$ *linearmente indipendenti per cui è*

$$\sum_{k=1}^{p} \tau_j^k \operatorname{Im} \varphi_k(\boldsymbol{x}) = 0 , \qquad \boldsymbol{\tau}_j = (\tau_j^1, \tau_j^2, \ldots, \tau_j^p) , \tag{6}$$

allora vale la proprietà (b)$'$.

Dim. Sia $\boldsymbol{\gamma}(0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$ e, quindi, sia $\varrho_k(0, \boldsymbol{x}_0) = x_k^0$, $\theta_k(0, \boldsymbol{x}_0) = 0$, allora da (6) tenuto conto di (5) si ha

$$\sum_{k=1}^{p} \tau_j^k \dot{\theta}_k(t, \boldsymbol{x}_0) = 0 , \qquad \sum_{k=1}^{p} \tau_j^k \theta_k(0, \boldsymbol{x}_0) = 0 \quad (j = 1, 2. \ldots, p-1) ,$$

ovvero $\sum_{k=1}^{p} \tau_j^k \theta_k(t, \boldsymbol{x}_0) = 0$ e ciò implica $\theta_k(t, \boldsymbol{x}_0)/\theta_h(t, \boldsymbol{x}_0) \in \boldsymbol{Q}$ per ogni t. c.v.d.

3. - Proposizione 6. *Se è* $\operatorname{Im} f_k(\boldsymbol{x}) = 0$ (*oppure* $\operatorname{Re} f_k(\boldsymbol{x}) = 0$) *qualunque sia* $\boldsymbol{x} \in \mathscr{A}'$, *allora per* $\gamma_k(T, \boldsymbol{x}_0)$ *non vale la proprietà* F.

Dim. Sia $\operatorname{Im} f_k(\boldsymbol{x}) = 0$; allora, posto $u_k(t, \boldsymbol{x}_0) = \varrho_k(t, \boldsymbol{x}_0) \exp\big(i\theta_k(\mathrm{t}, \boldsymbol{x}_0)\big)$, si ha

$$\dot{u}_k = \dot{\varrho}_k(t, \boldsymbol{x}_0) \exp i\theta_k(t, \boldsymbol{x}_0) + i\dot{\theta}_k(t, \boldsymbol{x}_0)\, \varrho_k(t, \boldsymbol{x}_0) \exp i\theta_k(t, \boldsymbol{x}_0) = f_k[u(t, \boldsymbol{x}_0)] \in \boldsymbol{R} ,$$

cioè $\theta_k = k\pi$ qualunque siano t, $\boldsymbol{x}_0$ e perciò la (3) non può essere soddisfatta. c.v.d.

Osservazione 1. Se $\boldsymbol{f}\colon \mathscr{A} \subset \boldsymbol{R}^p \to \boldsymbol{R}^p$, allora l'equazione

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{E_r}$$

può essere complessificata in vari modi, eccone alcuni.

(a) Se $\boldsymbol{f}$ è analitica reale e se $\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})\colon \boldsymbol{C}^p \to \boldsymbol{C}^p$ è tale che, posto $\boldsymbol{x} = \operatorname{Re} \boldsymbol{z}$, si abbia $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\operatorname{Re} \boldsymbol{z}) = \operatorname{Re} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})$, allora la complessificazione è evidente. Tipico caso è l'equazione lineare $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{A}$ matrice, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^p$) che ha la stessa trattazione di $\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{C}^p$.

(b) Se $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{p} f_k(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{e}_k$, si pone $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{p} \big(f_k(\boldsymbol{x}) + i f_k(\boldsymbol{y})\big)\, \boldsymbol{e}_k$ e si consideri l'equazione $\dot{\boldsymbol{x}} + i\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y})$.

(c) Se $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{p} x_k \boldsymbol{e}_k \in \boldsymbol{R}^p$, si pone

$$(7) \qquad \boldsymbol{z} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{q} (x_{2k-1} + i x_{2k}) \boldsymbol{e}_k & \text{se } p = 2q \ (q \text{ intero}), \\ \sum_{k=1}^{q} (x_{2k-1} + i x_{2k}) \boldsymbol{e}_k + x_{2q+1} \boldsymbol{e}_{q+1} & \text{se } p = 2q+1, \end{cases}$$

allora l'equazione (E_r) è trascritta nella forma

$$(\mathrm{E}_r) \qquad \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}),$$

dove

$$(7)' \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{q} \big(f_{2k-1}(\boldsymbol{z}) + i f_{2k}(\boldsymbol{z})\big) \boldsymbol{e}_k & \text{se } p = 2q, \\ \sum_{k=1}^{q} \big(f_{2k-1}(\boldsymbol{z}) + i f_{2k}(\boldsymbol{z})\big) e_k + f_{2q+1}(\boldsymbol{z})\, e_{q+1} & \text{se } p = 2q+1. \end{cases}$$

Corollario. *Se $\boldsymbol{f}\colon \mathscr{A} \subset \boldsymbol{R}^{2p+1} \to \boldsymbol{R}^{2p+1}$, allora per l'equazione* (E) *non possono aversi le proprietà* (a) *e* (b) *enunciate nel n.* **1**.

Dim. Discende da (7), (7)$'$ e dalla Proposizione 6. c.v.d.

4. - Proposizione 7. *Se per ogni $\gamma_k(T, \boldsymbol{x}_0)$ vale la proprietà F, allora gli insiemi*

$$\mathscr{A}_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathscr{A} \colon \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},\ \mathrm{Im} \frac{\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|^2} \neq 0\} \quad ed \quad \mathscr{A}_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathscr{A} \colon \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},\ \mathrm{Re} \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|^2} = 0\}$$

sono non vuoti.

Dim. È

$$\mathrm{Im} \frac{\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|^2} = \sum_{k=1}^{p} \frac{|x_k|^2}{|\boldsymbol{x}|^2} \mathrm{Im} \frac{\overline{x}_k f_k(\boldsymbol{x})}{|x_k|^2} = \sum_{k=1}^{p} \frac{|x_k|^2}{|\boldsymbol{x}|^2} \mathrm{Im}\, \varphi_k(\boldsymbol{x}).$$

Se fosse $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})/|\boldsymbol{x}|^2 = 0$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathscr{A}$, allora comunque si prendono p vettori $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_p$ appartenenti ad $\mathscr{A}$, linearmente indipendenti,

$\boldsymbol{x}_j = (x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^p)$ si avrebbe $\sum_{k=1}^{p} \frac{|x_{jk}|^2}{|\boldsymbol{x}_j|} \operatorname{Im} \varphi_k(\boldsymbol{x}_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, p)$ e quindi $\varphi_k(\boldsymbol{x}_j) = 0$ per ogni $\boldsymbol{x}_j \in \mathscr{A}$ e per ogni k, contro la Proposizione 3. Quindi l'insieme $\mathscr{A}_1$ non è vuoto.

Analogamente, utilizzando la Proposizione 2, si dimostra che l'insieme $\mathscr{A}_2$ non è vuoto. c.v.d.

Indichiamo con $\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{C}^p)$ l'insieme delle funzioni continue che soddisfano le condizioni (i) ed (iii) ed inoltre

(ii)$'$ esistono due costanti $K = K(\boldsymbol{f})$ ed $m = m(\boldsymbol{f})$ positive tali che

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| < K|\boldsymbol{x}| \text{ per } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}, m) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^p \colon |\boldsymbol{x}| < m\} \subset \mathscr{A} .$$

Sia $\psi(\boldsymbol{x}) \colon \boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}, m) \setminus \{\boldsymbol{0}\} \to \boldsymbol{C}$ la funzione definita da $\psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})/|\boldsymbol{x}|^2$; si definisce *rango numerico* $n_0(\boldsymbol{f})$ l'insieme

$$n_0(\boldsymbol{f}) = \bigcap_{0<\alpha\leqslant m} \text{chiusura } \psi\big(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}, \alpha) \setminus \{\boldsymbol{0}\}\big) .$$

Si dimostra (cfr. [**1**], [**3**]) che

– $n_0(\boldsymbol{f})$ è un sottoinsieme di $\boldsymbol{C}$ non vuoto, compatto, connesso;

– se $\mu \in n_0(\boldsymbol{f})$, esiste una successione $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset \mathscr{A}$ tale che $\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{0}$, $\varphi(\boldsymbol{x}_n) \to \mu$;

– se $\boldsymbol{f}$ è lineare, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}$ matrice $p \times p$, allora $n_0(\boldsymbol{f}) = \omega(\boldsymbol{A}) = \{\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \colon |\boldsymbol{x}| = 1\}$ chiusura $\sigma(\boldsymbol{A}) = \omega(\boldsymbol{A})$.

Proposizione 8. *Se esiste* $\mu \in n_0(\boldsymbol{f})$ *tale che* $\operatorname{Re} \mu = 0$, $\operatorname{Im} \mu \neq 0$, *allora gli insiemi* $\mathscr{A}_1$ *ed* $\mathscr{A}_2$ *sono non vuoti e la loro intersezione non è vuota.*

Dim. Basti osservare che esiste, per definizione, una successione $\{\boldsymbol{x}_n\}$ in $\mathscr{A}$ tale che $\boldsymbol{x}_n \neq 0$, $\boldsymbol{x}_n \to 0$, ed infine $\boldsymbol{x}_n \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)/|\boldsymbol{x}_n|^2 \to \mu$. L'affermazione della proposizione segue allora dalla proprietà dei limiti. c.v.d.

Se $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{C}^p)$ e $\lambda \in \boldsymbol{C}$ indichiamo con $d_0(\lambda - \boldsymbol{f})$ il numero

$$d_0(\lambda - \boldsymbol{f}) = \liminf_{\boldsymbol{x}\to 0} \frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \lambda\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{x}|} .$$

Si definisce *spettro locale* $\sigma(\boldsymbol{f})$ *di* $\boldsymbol{f}$ *in* $\boldsymbol{0}$ l'insieme

$$\sigma(\boldsymbol{f}) = \{\lambda \in \boldsymbol{C} \colon d_0(\lambda - \boldsymbol{f}) = 0\} .$$

È noto che (cfr. [1], [3]):

– se f è lineare, allora $\sigma(f)$ coincide con lo spettro usuale delle matrici;

– se f è differenziabile in $\mathbf{0}$ ed $f'(\mathbf{0})$ è la derivata, allora lo spettro locale di f in $\mathbf{0}$ coincide con lo spettro della matrice $f'(\mathbf{0})$;

– $\sigma(f) \subset n_0(f)$.

In accordo con la teoria classica per le equazioni differenziali quasi lineari si ha

Proposizione 9. *Se per ogni $\mu \in \sigma(f)$ si ha* $\operatorname{Re}\mu = 0$, $\operatorname{Im}\mu \neq 0$ *allora i due insiemi $\mathscr{A}_1$ ed $\mathscr{A}_2$ definiti in Proposizione* 8, *sono non vuoti e la loro intersezione è non vuota.*

Dim. Segue dalla constatazione che $\sigma(f) \subset n_0(f)$ e dalla Proposizione 8. c.v.d.

5. – Osservazione 2. Si osservi che la proprietà F può essere sostituita da quella più generale *proprietà* F': esiste $T(x_k^0)$ per cui è

$$(3)' \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k(T(x_k^0),\,x_0)} (1/s)\, ds = n(x_k^0) \in \boldsymbol{N} \text{ (interi)} \qquad \text{per } \boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{A}'.$$

Infatti in tal caso le Proposizioni 1, 2, 3, continuano a valere insieme alle loro conseguenze.

Osservazione 3. Qualora si consideri l'equazione (E_r), $\mathscr{A}$ limitato, $f\colon \mathscr{A} \subset \boldsymbol{R}^{2p} \to \boldsymbol{R}^{2p}$; $f \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}^{2p})$, (oppure $f \in \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{R}^{2p})$) ed esista $\boldsymbol{J}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B} \subset \boldsymbol{R}^{2p}$, $\boldsymbol{J}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathscr{B}$ limitato, $\boldsymbol{J}$ iniettiva e suriettiva, provvista di derivata $\boldsymbol{J}'(\boldsymbol{x})$ continua (quindi $\boldsymbol{J}'(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathscr{A}$) conviene talvolta prima di complessificare l'equazione ridursi all'equazione

$$(\mathrm{E}_r)' \qquad \dot{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}))^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))\,,$$

essendo $\boldsymbol{g}$ tale che $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{J}$ è l'identità in $\mathscr{A}$.

Osservazione 4. Indichiamo con $\boldsymbol{P}$ il polidisco $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^p\colon |x_k| < r_k\ (k = 1, \dots, p)\}$ e con $\operatorname{Fr}\boldsymbol{P}$ la frontiera distinta di $\boldsymbol{P}$, cioè $\operatorname{Fr}\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^p\colon |x_k| = r_k\ (k = 1, \dots, p)\}$. Siano $D_1, D_2, \dots, D_p$ aperti semplicemente connessi limitati, contenuti in C e tali che $O \in D_k$ $(k = 1, 2, \dots, p)$ e sia $\mathscr{A} = \prod D_k$

($\prod$ = prodotto cartesiano). Indichiamo con Δ il disco $\Delta=\{z\in \boldsymbol{C}\colon |z|<1\}$. Sia J_k un isomorfismo analitico di D_k su Δ tale che $J_k(0)=0$, $J'_k(0)>0$ (per il teorema fondamentale delle trasformazioni conformi un tale isomorfismo esiste). Sia $\boldsymbol{J}\colon \mathscr{A}\to \boldsymbol{C}^p$ definito da

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} J_1(x_1) & 0 & \dots & 0\\ 0 & J_2(x_2) & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & J_p(x_p)\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} J_1^{-1}(x_1) & 0 & \dots & 0\\ 0 & J^{-1}(x_2) & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & J^{-1}(x_p)\end{pmatrix}.$$

Sia $\boldsymbol{P}$ un polidisco contenuto nella sfera unitaria $\boldsymbol{B}(0,1)$ allora $\boldsymbol{J}^{-1}(\mathrm{Fr}\,\boldsymbol{P}) = \mathrm{Fr}\,\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{P})$ (= frontiera di Shilov di $\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{P})$). Quindi se l'equazione $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ammette soluzioni tali che $\gamma(T,\boldsymbol{x}_0)$ è sulla frontiera distinta di un polidisco, l'equazione $\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})$, dove $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{x}))'\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{x})$ ammette soluzini $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{z}_0)$ analitiche tali che

$$\Gamma(t,\boldsymbol{z}_0)=\{\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}^p;\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{z}_0),\ t\in\boldsymbol{R}\}\subset \mathrm{Fr}\,\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{P})\,.$$

Esempio. Per l'equazione

$$\text{(I)}\qquad \dot z_1=z_2\,,\qquad \dot z_2=-z_1\,,$$

$(z_1,z_2)\in\boldsymbol{C}^2$, si ha un centro, e si ha anche un centro per l'equazione

$$\text{(II)}\qquad \dot\xi=\frac{-\eta}{\eta+1}(\xi+i)^2,\qquad \dot\eta=\frac{-i\xi}{\xi+i}(\eta+1)^2,$$

$(\xi,\eta)\in\boldsymbol{C}^2$, ottenuta da (I) mediante la sostituzione lineare

$$(z_1,z_2)\to\Big(\frac{i\xi}{\xi+i},\frac{\eta}{\eta+1}\Big);\quad (z_1,z_2)\in\boldsymbol{P}=\{(z_1,z_2)\in\boldsymbol{C}^2,\ |z_1|<1,\ |z_2|<1\}\,,$$

e si ha anche un centro per il sistema

$$\dot x=\frac{(-u^2+v^2+u)(x^2-y^2-2y+1)-2xv(y+1)}{(u+1)^2+v^2},$$

$$\dot y=\frac{2(u^2-v^2+u)(xy+1)-v(x^2-y^2-2y+1)}{(u+1)^2+v^2},$$

$$\dot u=\frac{-x(u^2-v^2+2u+1)-2(x^2-y^2-y)(uv+v)}{x^2+(y+1)^2},$$

$$\dot v=\frac{-2(x^2-y^2-y)(u^2-v^2+2u+1)-x(uv+v)}{x^2+(y+1)^2},$$

dove $(x,y,u,v)\in\mathscr{A}=\{(x,y,u,v)\in R^4;\ x^2+y^2<1,\ u^2+v^2<1\}$.

Bibliografia

[1] M. Furi and A. Vignoli, *Spectrum for nonlinear maps and bifurcation in the non differentiable case*, Ann. Mat. Pura Appl. **13** (1977).

[2] R. Reissig, G. Sansone and R. Conti, *Nonlinear differential equations of higher order*, Noordhoff. Int. Publ. Comp. Leyden.

[3] P. Santoro, *Stabilità esponenziale per sistemi non linearizzabili*, « Equadiff 78 », Firenze.

* * *