Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 753-772

S. Forte (*)

Sopra alcuni tipi di potenziale elastico (**)

A Giorgio Sestini per il suo 70° compleanno

Introduzione

La ricerca della forma del potenziale elastico da attribuire ad una classe di corpi la più vasta possibile, è antico e dibattuto problema. Data l'impossibilità di controllare sperimentalmente se una forma sia più aderente alla realtà fisica di un'altra, soltanto criteri indiretti possono guidare alla soluzione del problema.

Sono state perciò proposte, in epoche diverse, forme del potenziale elastico (1) suggerite prevalentemente da criteri di semplicità, mentre, allo stesso tempo, si faceva strada l'opinione che non convenisse precisare la forma del potenziale stesso, ma piuttosto fosse utile ricercare soluzioni elastiche valide universalmente [**14**]. Tale ultima impostazione appare però insoddisfacente, in quanto la soluzione di problemi concreti impone la scelta di un potenziale elastico.

In questo lavoro si è cercato di paragonare i risultati che si ottengono applicando a deformazioni semplici forme di potenziale diverse e ciò allo scopo di avere qualche indicazione sulla maggiore o minore plausibilità fisica dell'una o dell'altra.

I potenziali scelti sono stati quelli suggeriti rispettivamente da Signorini [**9**]$_2$ e da Bordoni [**1**], applicati alla dilatazione uniforme, alla estensione semplice

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematiche Applicate « U. Dini », Facoltà di Ingegneria, Università, Via Diotisalvi 2, 56100 Pisa, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 28-II-1979.

(1) Cfr. [**1**], [**2**], [**3**], [**4**], [**5**], [**6**], [**7**]$_{1,2}$, [**8**], [**9**]$_{1,2}$.

e allo scorrimento di un corpo elastico omogeneo ed isotropo nella configurazione di riferimento.

I risultati sembrano indicare una migliore plausibilità fisica del potenziale di Signorini.

1. - Notazioni

Siano B_0 e B due diverse configurazioni del continuo $\mathscr{B}$ in esame; indico, come è abituale, con $\boldsymbol{F}$ il gradiente di deformazione $B_0 \to B$, con $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} = \boldsymbol{1} + 2\boldsymbol{E}$ il tensore di deformazione destro di Cauchy-Green.

Con x indicherò la posizione della generica particella di $\mathscr{B}$ in B_0.

Interverrà anche il tensore di deformazione inversa definito da $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{F}^T)^{-1} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{1} + 2\boldsymbol{e}$, dove $\boldsymbol{B}$ è il tensore di deformazione sinistro di Cauchy-Green.

Insieme, $\boldsymbol{T}$ sarà sempre il tensore degli sforzi di Cauchy, mentre, quando occorrerà, $\boldsymbol{T}_R$ sarà il tensore di Kirchhoff corrispondente.

Un solido è elastico quando $\boldsymbol{T}_R$ è una funzione di $\boldsymbol{F}$; un solido è iperelastico, quando esiste una funzione σ (detta potenziale elastico) tale che

$$\boldsymbol{T}_R = \varrho_0 \partial_{\boldsymbol{F}} \sigma \,. \tag{1.1}$$

In questa ϱ_0 è la densità materiale in B_0, indipendente dal posto se il corpo è omogeneo.

Indicherò brevemente con I_1, I_2, I_3 gli invarianti principali di $\boldsymbol{E}$. Questa terna può essere messa in corrispondenza biunivoca con la terna I_1, I_2, $J = \det \boldsymbol{F} > 0$ mediante la relazione

$$J = \sqrt{1 + 2I_1 + 4I_2 + 8I_3}\,.$$

Insieme $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ sono gli invarianti principali di $\boldsymbol{e}$, mentre

$$\bar{J} = \det \boldsymbol{F}^{-1} = \sqrt{1 + 2\bar{I}_1 + 4\bar{I}_2 + 8\bar{I}_3}\,.$$

Chiamerò contrazioni specifiche e_i, i valori propri di $\boldsymbol{e}$,

$$e_i > -\tfrac{1}{2} \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Con λ_i indicherò gli allungamenti principali

$$\lambda_i = (1 + 2e_i)^{-\frac{1}{2}} \qquad (i = 1, 2, 3)\,,$$

mentre con δ_i la differenza $\lambda_i - 1$ (allungamento principale unitario) o, che è lo stesso, $\delta_i = (1 + 2e_i)^{-\frac{1}{2}} - 1$.

t_i saranno i valori propri di $\boldsymbol{T}$, detti sforzi principali e T_i gli sforzi principali per unità di superficie indeformata

$$T_i = t_i(1 + 2e_{i+1})^{-\frac{1}{2}}(1 + 2e_{i+2})^{-\frac{1}{2}} \qquad (i = 1, 2, 3) .$$

Con a^i $(i = 1, 2, 3)$ indicherò una terna cartesiana ortogonale di assi.

Si supporrà il corpo $\mathscr{B}$ iperelastico, omogeneo ed isotropo nella configurazione di riferimento.

In questa ipotesi

$$\boldsymbol{T} = - \varrho_0 \bar{J}(\mathbf{1} + 2\boldsymbol{e})\,\partial_{\boldsymbol{e}}\hat{\sigma}(\boldsymbol{e}) ,$$

dove $\hat{\sigma}$ è una funzione di $\boldsymbol{e}$ solo attraverso i suoi invarianti principali.

Essendo $\partial_{\boldsymbol{e}}\hat{\sigma}(\boldsymbol{e})$ una funzione tensoriale isotropa di $\boldsymbol{e}$, ammette la rappresentazione

$$\partial_{\boldsymbol{e}}\hat{\sigma}(\boldsymbol{e}) = l\mathbf{1} + 2m\boldsymbol{e} + n\boldsymbol{e}^2 ,$$

con l, m, n dipendenti da $\boldsymbol{e}$ solo tramite i suoi invarianti principali, o, che è lo stesso, tramite $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{J}$.

In base all'identità di Caley-Hamilton $\boldsymbol{T}$ ammette la rappresentazione

$$\boldsymbol{T} = L\mathbf{1} + 2M\boldsymbol{e} + N\boldsymbol{e}^2 , \tag{1.2}$$

dove

$$\begin{aligned} L &= -\varrho_0 \bar{J}\,(\bar{J}\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\bar{J}} + \frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\bar{I}_1} + \bar{I}_1\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\bar{I}_2}) ,\\ M &= -\varrho_0 \bar{J}\,(\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\bar{I}_1} + \bar{I}_1\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\bar{I}_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\bar{I}_2}) ,\\ N &= 2\varrho_0 \bar{J}\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\bar{I}_2} . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Nel seguito supporrò B, configurazione di riferimento « naturale », ovvero una configurazione in cui il solido sia isotropo ed esente da forze esterne.

Una deformazione $B_0 \to B$ è infinitesima, se, posto $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} - \mathbf{1}$, si considera come parametro di piccolezza $\varepsilon = |\boldsymbol{H}|$.

Con un errore $o(\varepsilon)$ $\boldsymbol{C} \doteq \boldsymbol{B} \doteq \mathbf{1} + \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T$, $\boldsymbol{E} \doteq \frac{1}{2}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T) = \varepsilon$;

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{F}^T)^{-1}\boldsymbol{F}^{-1} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{H}^T)^{-1}(\mathbf{1} + \boldsymbol{H})^{-1} = [(\mathbf{1} + \boldsymbol{H})(\mathbf{1} + \boldsymbol{H}^T)]^{-1}$$

$$= (\mathbf{1} + \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T)^{-1} = \mathbf{1} - (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T) + \ldots$$

per cui, con un errore $o(\varepsilon)$

$$\boldsymbol{c} \doteq \mathbf{1} - (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T)\,, \qquad \boldsymbol{e} \doteq -\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T) = -\varepsilon = -\boldsymbol{E}\,.$$

Se in (1.2) si sviluppano in serie i coefficienti L, M, N come funzione di $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{J}$, con un errore $o(\varepsilon)$

$$\boldsymbol{T} = \lambda I_1 \mathbf{1} + 2\mu\varepsilon\,, \tag{1.4}$$

dove si è tenuto conto della condizione che B_0 sia una configurazione di riferimento « naturale ».

(1.4) è la ben nota legge di Hooke. I coefficienti di Lamé λ e μ soddisfano a

$$3\lambda + 2\mu > 0\,, \qquad \mu > 0\,. \tag{1.5}$$

Una relazione formalmente del tipo (1.1) è soddisfatta dai cosiddetti corpi termoelastici, per i quali σ, oltre che essere funzione di $\boldsymbol{F}$, dipende anche dalla temperatura della configurazione attuale θ e dalla temperatura uniforme τ della configurazione di riferimento.

In tal caso σ non differisce dall'energia libera ψ del sistema, di modo che si ha

$$\boldsymbol{T}_R = \varrho_0 \partial_{\boldsymbol{F}} \psi\,, \qquad \eta = -\partial_\theta \psi\,,$$

$\psi = \hat{\psi}(\boldsymbol{F}, \theta, \tau)$, η entropia specifica.

2. - Potenziali di Signorini e di Bordoni

(a) L'ipotesi che Signorini formula è che per un corpo termoelastico omogeneo ed isotropo nella configurazione di riferimento

$$\psi(e_1, e_2, e_3; \theta, \tau) = \hat{\psi}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}; \theta, \tau) = \frac{f(e_1, e_2, e_3)}{\bar{J}} - q(\theta, \tau)\,, \tag{2.1}$$

dove f è un polinomio simmetrico, di secondo grado nei suoi argomenti, a coefficienti funzione solo di θ e τ.

Tale ipotesi fornisce per $\hat{\varphi}$ la forma

$$\hat{\varphi}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}; \theta, \tau) = \frac{-p + m(\bar{I}_1 + 1) + n\bar{I}_1^2 - c\bar{I}_2}{\varrho_0 \bar{J}} - q, \tag{2.2}$$

dove p, m, n, c, q dipendono esclusivamente da θ e τ.

Tenuto conto della espressione generale dello sforzo in funzione degli invarianti della deformazione inversa, valida per solidi isotropi, si ha

$$\begin{aligned} L &= -p + (m - 2n + c)\bar{I}_1 - c\bar{I}_2 + n\bar{I}_1^2, \\ M &= \tfrac{1}{2}\{-2m + c - 2(2n + c)\bar{I}_1\}, \\ N &= 2c. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Naturalmente ogni relazione deformazione-sforzo deve ridursi per deformazioni isoterme infinitesime alla legge di Hooke.

Trascurando nella (1.2) i termini di ordine superiore al primo nelle e_{ij} ed essendo per deformazioni infinitesime $\boldsymbol{E} \doteq \varepsilon$, $\boldsymbol{e} \doteq -\varepsilon$, $I_1 \doteq -\bar{I}_1$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} = \{-p(\tau, \tau) - [m(\tau, \tau) - 2n(\tau, \tau) - c(\tau, \tau)]I_1\}\,\mathbf{1} \\ + \{2m(\tau, \tau) - c(\tau, \tau)\}\,\boldsymbol{e}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Paragonando la (2.4) alla legge di Hooke

$$p(\tau, \tau) = 0, \quad -m(\tau, \tau) + 2n(\tau, \tau) + c(\tau, \tau) = \lambda, \quad m(\tau, \tau) - \tfrac{1}{2}c(\tau, \tau) = \mu.$$

Poniamo $c(\tau, \tau) = c$, allora

$$m(\tau, \tau) = \mu + \frac{1}{2}c, \qquad n(\tau, \tau) = (\lambda + \mu - \frac{c}{2}). \tag{2.5}$$

Poichè m, n, c dipendono solo da θ e τ, le definizioni date in (2.5) valgono anche per deformazioni finite isoterme.

Per deformazioni finite isoterme

$$\boldsymbol{T}_s = (-\lambda\bar{I}_1 + \frac{1}{2}(\lambda + \mu - \frac{c}{2})\bar{I}_1^2 - c\bar{I}_2)\,\mathbf{1} - 2(\mu + (\lambda + \mu + \frac{c}{2})\bar{I}_1)\,\boldsymbol{e} + 2c\boldsymbol{e}^2, \tag{2.6}$$

e l'energia libera

$$\hat{\psi} = \frac{1}{\varrho_0 \bar{J}} \{(\mu + \frac{1}{2}c)(\bar{I}_1 + 1) + (\lambda + \mu - \frac{c}{2})\bar{I}_1^2 + c\bar{I}_2\}.$$

Signorini si limita al caso $c(\tau, \tau) = c \equiv 0$; il caso generale $c(\tau, \tau) \neq 0$ è stato esaminato da Tolotti [10].

Per il potenziale isotermo si ha

$$(2.7)\quad W_\tau = \varrho_0[\hat{\psi}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}; \tau, \tau) - \hat{\psi}(0,0,1; \tau,\tau)] = \frac{1}{\bar{J}}\{\mu(\bar{I}_1 + 1) + \frac{1}{2}(\lambda+\mu)\bar{I}_1^2\} - \mu\,.$$

W_τ risulta definita positiva per ogni trasformazione isoterma a partire da B_0 se e solo se sono verificate le seguenti condizioni

$$(2.8)\qquad \mu > 0\,, \qquad 9\lambda + 5\mu \geqslant 0\,.$$

(b) Per la formulazione di un diverso tipo di potenziale elastico per solidi isotropi omogenei, Bordoni trae spunto dall'osservazione che la legge di Hooke esprime la relazione tra deformazione e sforzo nel caso di una deformazione infinitesima ed isoterma.

Se la deformazione è nulla ($\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$) e il corpo assume una temperatura $\theta \neq \tau$, lo sforzo $\boldsymbol{T}$ è non nullo e deve risultare una trazione o una pressione uniforme, ovvero

$$\boldsymbol{T} = -\,p(\theta, \tau)\boldsymbol{1}\,.$$

Inoltre, sempre nell'ipotesi che la deformazione sia infinitesima e la temperatura variabile, le costanti di Lamé λ e μ dovranno essere sostituite da due funzioni m ed n dipendenti solo da θ e τ.

Perciò, per una deformazione infinitesima non isoterma di un corpo termoelastico omogeneo ed isotropo

$$\boldsymbol{T} = [-\,p(\theta, \tau) + n(\theta, \tau)I_1]\boldsymbol{1} + 2m(\theta, \tau)\varepsilon\,,$$

oppure, se teniamo conto che per deformazioni infinitesime $\boldsymbol{E} \doteq \varepsilon$, $\boldsymbol{e} \doteq -\,\varepsilon$, $I_1 = -\,\bar{I}_1$

$$(2.9)\qquad \boldsymbol{T} = -\,[p(\theta, \tau) + n(\theta, \tau)\bar{I}_1]\boldsymbol{1} - 2m(\theta, \tau)\boldsymbol{e}\,.$$

È ben noto che una relazione di primo grado nelle e_{ij} non può in generale essere valida per deformazioni finite [**9**]$_2$. La relazione deformazione-sforzo proposta da Bordoni è ottenuta da (2.9) moltiplicando il secondo membro per una opportuna funzione f dei tre invarianti di $\boldsymbol{e}$, $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{J}$.

$$\boldsymbol{T}_B = -\left\{[p(\theta,\tau) + n(\theta,\tau)\bar{I}_1]\mathbf{1} + 2m(\theta,\tau)\boldsymbol{e}\right\} f(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}) \,. \tag{2.10}$$

Ricaviamo da (2.10) la forma dell'energia libera ψ.

Da (2.10)

$$\begin{aligned} L &= -[p + n\bar{I}_1] f(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}) \,, \\ M &= -m f(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}) \,, \\ N &= 0 \,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dalla nullità di N e da (1.3) segue che $\partial\hat{\psi}/\partial\bar{I}_2 = 0$.

$\hat{\psi}$ risulta perciò indipendente da $\bar{I}_2$ e da (1.3) risultano indipendenti da $\bar{I}_2$ anche L e M e quindi $\boldsymbol{T}$ ed f.

$$\begin{aligned} L &= -\varrho_0 \bar{J} \left\{ \bar{J}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{J}} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{I}_1} \right\} = -[p + n\bar{I}_1] f(\bar{I}_1, \bar{J}) \,, \\ M &= -\varrho_0 \bar{J} \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{I}_1} = -m f(\bar{I}_1, \bar{J}) \,, \\ N &= 0 \,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Da $(2.12)_2$

$$f(\bar{I}_1, \bar{J}) = \frac{\varrho_0 \bar{J}}{m} \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{I}_1} \,.$$

Sostituendo f in (2.12),

$$\left\{ \bar{J}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{J}} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{I}_1} \right\} = \frac{1}{m}[p + n\bar{I}_1] \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{I}_1} \,.$$

$\hat{\psi}$ deve dunque soddisfare l'equazione

$$\left(\frac{p}{m} + \frac{n}{m}\bar{I}_1 - 1 \right) \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{I}_1} = \bar{J}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{J}} \,. \tag{2.13}$$

Soluzione di (2.13) è una qualunque funzione φ di $y = (m^2/n)[1 - b\bar{J}^{n/m} \cdot (1 - (p/m) - (n/m)\cdot\bar{I}_1)]$, con b funzione arbitraria di θ e τ.

Allora

$$\hat{\psi}(\bar{I}_1, \bar{J}; \theta, \tau) = \varphi(y) - q(\theta, \tau) , \tag{2.14}$$

con q funzione arbitraria; senza ledere la generalità possiamo supporre $\varphi(0) = 0$.

Per L e M si hanno allora le espressioni

$$L = - b\bar{J}^{(n/m+1)}\{p + n\bar{I}_1\}\varphi' , \qquad M = - b\bar{J}^{(n/m+1)} m\varphi' ,$$

dunque [v. $(2.12)_2$] $f = b\bar{J}^{(n/m+1)}\varphi'$ e

$$\boldsymbol{T} = - b\bar{J}^{(n/m+1)}\{(p + n\bar{I}_1)\mathbf{1} + 2m\boldsymbol{e}\}\varphi' . \tag{2.15}$$

Affinchè questa sia accettabile, deve ridursi per deformazioni infinitesime isoterme alla legge di Hooke.

Per deformazioni infinitesime isoterme (2.15) diviene

$$\boldsymbol{T} = - b(\tau, \tau) \left\{\left[p(\tau, \tau)\left(1 + \frac{n}{m}\right) I_1 - n(\tau, \tau) I_1\right] \mathbf{1} - 2m(\tau, \tau)\,\varepsilon\right\} \varphi'\Big|_{\substack{E=0\\ \theta=\tau}} . \tag{2.16}$$

Innanzitutto deve essere

$$\psi'\Big|_{\substack{E=0\\ \theta=\tau}} \neq 0 \qquad \text{e} \qquad b(\tau, \tau) \neq 0 .$$

Per l'arbitrarietà di ψ e di b possiamo supporre

$$\psi'\Big|_{\substack{E=0\\ \theta=\tau}} = 1 \qquad \text{e} \qquad b(\tau, \tau) = 1 .$$

Per $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, (2.15) si riduce a

$$\boldsymbol{T} = - p(\tau, \tau)\mathbf{1}$$

se la configurazione di riferimento è « naturale » $p(\tau, \tau) = 0$. Allora $n(\tau, \tau) = \lambda$, $m(\tau, \tau) = \mu$.

Da (2.14) segue per il potenziale isotermo

$$W_\tau = \varrho_0[\hat{\psi}(\bar{I}_1, \bar{J}; \tau, \tau) - \hat{\psi}(0, 1; \tau, \tau)] = \varrho_0[\varphi(y) - \varphi(0)] = \varrho_0\varphi(y) .$$

Osservazione. Si può dimostrare che se $\lambda > 0$, $\mu > 0$, allora $y \geqslant 0$ per qualunque trasformazione isoterma a partire da B_0.

Nell'ipotesi che $\lambda > 0$ e $\mu > 0$, basterà che φ abbia lo stesso segno del suo argomento, perchè W_T risulti definita positiva per ogni trasformazione isoterma a partire da B_0.

Nel seguito, quando faremo uso del potenziale di Bordoni, supporremo, in accordo a quanto fa lo stesso Bordoni, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\varphi(y) = y$.

3. - Trazione uniforme

Supponiamo che il corpo $\mathscr{B}$, omogeneo ed isotropo, subisca una deformazione omogenea $B_0 \to B$ del tipo

$$x \mapsto \alpha[\sum_1^3 \boldsymbol{a}^i \otimes \boldsymbol{a}^i]x \qquad (\alpha > 0)\,. \tag{3.1}$$

Per $\alpha > 1$ tale deformazione è una dilatazione uniforme, per $\alpha < 1$ una contrazione uniforme.

Da (3.1)

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{1}\,, \qquad \boldsymbol{C} = \alpha^2\boldsymbol{1}\,, \qquad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{C}^{-1} = \alpha^{-2}\boldsymbol{1} \\ &\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{1}) = \frac{1}{2}\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\boldsymbol{1} = e\boldsymbol{1} \qquad \left(e = \frac{1}{2}\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\right), \end{aligned} \tag{3.2}$$

per $0 < \alpha < 1$ (contrazione) $0 < e < +\infty$, per $\alpha > 1$ (dilatazione) $-\frac{1}{2} < e < 0$ $\delta_i = \delta = \alpha - 1$ $(i = 1, 2, 3)$.

Gli invarianti principali di $\boldsymbol{e}$ sono

$$\bar{I}_1 = 3e\,, \qquad \bar{I}_2 = 3e^2\,, \qquad \bar{I}_3 = e^3\,, \qquad \bar{J} = \alpha^{-3}\,. \tag{3.3}$$

La trasformazione sia isoterma.

(a) Il potenziale di Signorini ci fornisce la relazione deformazione-sforzo

$$\boldsymbol{T}_S = -e\{(3\lambda + 2\mu) + \tfrac{3}{2}(\lambda + \mu)e\}\boldsymbol{1}\,. \tag{3.4}$$

Gli sforzi principali t_i hanno dunque un comune valore t

$$t = -e\{(3\lambda + 2\mu) + \tfrac{3}{2}(\lambda + \mu)e\}\,.$$

Consideriamo gli sforzi principali per unità di superficie indeformata

$$T_i = T = -e\{(3\lambda + 2\mu) + \tfrac{3}{2}(\lambda + \mu)e\}(1 + 2e)^{-1} \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Per $e > 0$ $T < 0$, come è naturale trattandosi di una compressione. Invece per $-\frac{1}{2} < e < 0$, T è positivo finchè

$$h(e) = (3\lambda + 2\mu) + \tfrac{3}{2}(\lambda + \mu) e > 0 \ .$$

Ma h, funzione lineare di e, è crescente e per $e = -\frac{1}{2}$ assume valore positivo, quindi $T > 0$ per $-\frac{1}{2} < e < 0$, (come è naturale trattandosi di una estensione).

Inoltre, ovviamente, $T = 0$ per $e = 0$; $\lim T = -\infty$, $\lim T = +\infty$. Si constata facilmente che f è una funzione strettamente decrescente di e.

Esprimendo T in termini dell'allungamento unitario δ e poi sviluppando con la serie geometrica $1 - 1/(\delta + 1)^2$

$$T = (3\lambda + 2\mu)\delta(1 + \delta \frac{3}{2} (\frac{8\lambda + 5\mu}{3\lambda + 2\mu}) + \ldots) \ ,$$

che si riduce, com'è naturale, alla relazione dell'elasticità lineare quando si trascurino termini dell'ordine di δ^2.

(b) Nelle stesse ipotesi per la deformazione di $\mathscr{B}$, facciamo uso del potenziale di Bordoni

$$\boldsymbol{T} = -\bar{J}^{1+\lambda/\mu} [\lambda \bar{I}_1 \, \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{e}] = -\alpha^{-3(\lambda+\mu)/\mu} e (3\lambda + 2\mu) \, \mathbf{1} \ .$$

Gli sforzi principali t_i coincidono in un unico valore

$$t = -\alpha^{-3(\lambda+\mu)/\mu} e (3\lambda + 2\mu) \ .$$

Se si considerano gli sforzi principali riportati all'unità di superficie indeformata

$$T = -\alpha^{-3(\lambda+\mu)/\mu} e (3\lambda + 2\mu)(1 + 2e)^{-1} \ ,$$

poichè $1 + 2e = \alpha^{-2}$,

$$T = -e(1 + 2e)^{(3\lambda+\mu)/2\mu} (3\lambda + 2\mu) \ .$$

Essendo $3\lambda + 2\mu > 0$, per $-\frac{1}{2} < e < 0$ $T > 0$, per $e > 0$ $T < 0$, d'accordo con l'immediata intuizione fisica.

Naturalmente $T = 0$ per $e = 0$, ma anche per $e = -\frac{1}{2}$, contrariamente a quanto accadeva nel caso di Signorini.

Inoltre nell'intervallo $-\frac{1}{2} < e < 0$ T risulta positiva: esiste allora almeno un valore massimo di T nell'intervallo $(-\frac{1}{2}, 0)$.

Si constata facilmente che tale massimo è unico, e corrisponde al valore $e^* = -\frac{1}{3}(\mu/(\lambda+\mu))$ di e.

Il valore corrispondente di T è

$$T^* = \frac{\mu}{3(\lambda+\mu)}\left(1-\frac{2}{3}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{(3\lambda+\mu)/2\mu}(3\lambda+2\mu)$$

$$= \frac{\mu}{3(\lambda+\mu)}\left(\frac{3\lambda+\mu}{3(\lambda+\mu)}\right)^{(3\lambda+\mu)/2\mu}(3\lambda+2\mu) < \frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Invece per $e \to +\infty$ $T \to -\infty$.

Osserviamo che in estensione uniforme, per il potenziale di Signorini, T è strettamente monotono ed assume valore infinito nei casi limite, mentre, per il potenziale di Bordoni, T tende all'infinito nel caso limite in cui il corpo si riduca ad un punto, in estensione invece risulta prima crescente, raggiunge un valore massimo, poi decresce fino a zero quando il corpo si dilati all'infinito. Nel caso di Bordoni si perde dunque l'unicità nella corrispondenza deformazione-sforzo.

Esprimendo T in funzione dell'allungamento unitario δ

$$T = \delta(3\lambda+2\mu)\left(1-\delta\left(\frac{5}{2}+3\frac{\lambda}{\mu}\right)+\ldots\right),$$

espressione che dà ancora la forma dell'elasticità lineare in prima approssimazione, ma differisce dall'espressione ottenuta nel caso di Signorini nei termini di ordine superiore al primo.

4. - Estensione semplice

Supponiamo che il corpo $\mathscr{B}$, omogeneo ed isotropo subisca una deformazione omogenea $B_0 \to B$ del tipo

$$x \mapsto \alpha\left[\gamma\sum_{i=1}^{2}(a^i\otimes a^i)+a^3\otimes a^3\right]x\,, \tag{4.1}$$

dove α, γ sono costanti positive, $\gamma \neq 1$.

Tale deformazione prende il nome di estensione semplice parallelamente ad a^3.

Da (4.1)

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{F} = \alpha[\gamma \sum_{i=1}^{2} (a^i \otimes a^i) + a^3 \otimes a^3] \,, \\
&\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^2 = \alpha^2[\gamma^2 \sum_{i=1}^{2} (a^i \otimes a^i) + a^3 \otimes a^3] \,, \\
&\boldsymbol{c} = \boldsymbol{C}^{-1} = \alpha^{-2}[\gamma^{-2} \sum_{i=1}^{2} (a^i \otimes a^i) + a^3 \otimes a^3] \,, \\
&\boldsymbol{e} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{1}) = e' \sum_{i=1}^{2} (a^i \otimes a^i) + e a^3 \otimes a^3 \,,
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

dove

$$
e = \frac{1}{2} \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} \qquad \left(e > -\frac{1}{2}\right), \qquad\qquad e' = \frac{1}{2} \frac{1-\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2\gamma^2} \qquad \left(e' > -\frac{1}{2}\right).
$$

Gli invarianti principali di e sono

$$
\begin{aligned}
&\bar{I}_1 = 2e' + e \,, \qquad \bar{I}_2 = e'^2 + 2e'e \,, \qquad \bar{I}_3 = e'^2 e \,, \\
&\bar{J} = \gamma^{-2}\alpha^{-3} = \prod_i (1 + 2e_i)^{\frac{1}{2}} = (1 + 2e')(1 + 2e)^{\frac{1}{2}} \,.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

La trasformazione sia isoterma.

(a) Il potenziale di Signorini ci fornisce la relazione deformazione-sforzo

$$
\boldsymbol{T}_S = \{-\lambda \bar{I}_1 + \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)\bar{I}_1^2\}\boldsymbol{1} - 2\{\mu + (\lambda + \mu)\bar{I}_1\}\boldsymbol{e} \,. \tag{4.4}
$$

Gli sforzi principali t_1 e t_2 hanno un comune valore

$$
t_1 = t_2 = \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu) e^2 - \lambda e - 2(\lambda + \mu) e'^2 - 2(\lambda + \mu) e' \,.
$$

Se si suppone che t_1 e t_2 siano nulli ([2]) si ottiene un legame tra le contrazioni specifiche e ed e'

$$
e' = -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{e^2 - 2\,\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\, e + 1}\right) \tag{4.5}
$$

([2]) t_1 e t_2 sono omogenee (costanti), quindi se si suppone siano nulli sul contorno sono nulli ovunque.

dove si è scartata la radice $e' = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{e^2 - 2(\lambda/(\lambda+\mu))\,e + 1})$ per la condizione $e' > -\frac{1}{2}$.

Sia $g(e) = e^2 - 2(\lambda/(\lambda+\mu))\,e + 1 = (1 + 2e')^2$, deve risultare

$$g(e) > 0 \qquad \text{per ogni } e > -\tfrac{1}{2}\,. \tag{4.6}$$

Verifichiamo che le (2.8) sono condizioni sufficienti per la validità di (4.6).

Discende immediatamente dalle (2.8) che $\lambda + \mu > 0$. Questa condizione, insieme alle (2.8) ci assicura che $-5/4 \leqslant \lambda/(\lambda+\mu) < 1$.

Poichè $g(e)$ è minimo per $e_m = \lambda/(\lambda+\mu)$, $g(e_m) = 1 - \lambda^2/(\lambda+\mu)^2$, se $|\lambda/(\lambda+\mu)| < 1$ $g(e) > 0$ per ogni e.

Se invece $-5/4 \leqslant \lambda/(\lambda+\mu) \leqslant -1$ $g(e_m) \leqslant 0$; poichè $g(-\frac{1}{2}) = 5/4 + \lambda/(\lambda+\mu) \geqslant 0$, $e_m < -\frac{1}{2}$, $g(e)$ risulterà positiva per ogni $e > -\frac{1}{2}$, che è il caso che ha interesse fisico.

Per lo sforzo principale t_3 risulta

$$t_3 = -(\lambda+\mu)\left\{\left(e^2 + e - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - 1\right) + \left(e + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + 1\right)(g(e))^{\frac{1}{2}}\right\},$$

riportando t_3 all'unità di superficie indeformata, $T_3 = (\lambda+\mu)f(e)$ dove $f(e) = \{-(e^2 + e - \lambda/(\lambda+\mu) - 1)\,(g(e))^{-\frac{1}{2}} - (e + \lambda/(\lambda+\mu) + 1)\}$.

Nelle ipotesi in cui ci siamo posti f risulta una funzione C^∞ per $e > -\frac{1}{2}$, strettamente decrescente. Si può dimostrare che $\lim\limits_{e\to -1/2^+} f(e) > 0$ finito, $f(0) = 0$, $\lim\limits_{e\to+\infty} f(e) = -\infty$.

Essendo $\lambda + \mu > 0$, T_3 ha il segno opposto ad e, d'accordo con l'immediata intuizione fisica,

$$\lim_{e\to -1/2^+} T_3 > 0\,, \qquad T_3(0) = 0\,, \qquad \lim_{e\to+\infty} T_3 = -\infty\,.$$

Dimostriamo che nel caso della trazione (ovvero per $-\frac{1}{2} < e < 0$) una condizione sufficiente affinchè risulti, in accordo con l'esperienza, $\mathrm{d}^2T_3/\mathrm{d}\delta^2 < 0$, è che $|\lambda/(\lambda+\mu)| < 1$.

Poichè $e = \frac{1}{2}((1+\delta)^{-2} - 1)$

$$\frac{\mathrm{d}T_3}{\mathrm{d}\delta} = (\lambda+\mu)f'(e)\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\delta} = -(\lambda+\mu)\,f'(e)(1+\delta)^{-3}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2T_3}{\mathrm{d}\delta^2} = (\lambda+\mu)\{f''(e)\,(1+\delta)^{-6} + 3\,f'(e)(1+\delta)^{-4}\}\,,$$

$$f''(e) = 3\left\{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2\right\}g^{-3/2}\left(e^2 + e - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - 1\right).$$

Il polinomio $(e^2 + e - \lambda/(\lambda + \mu) - 1)$ ammette una radice minore di $-\frac{1}{2}$ e una radice positiva per $|\lambda(\lambda + \mu)| < 1$.

Perciò per $|\lambda/(\lambda + \mu)| < 1$, $f''(e)$ risulta negativo per ogni $e \in (-\frac{1}{2}, 0)$. In definitiva tutti i termini di (4.7) sono negativi, di qui la tesi.

(b) Il potenziale di Bordoni ci fornisce una relazione tra deformazione e sforzo

$$\boldsymbol{T}_B = -(1 + 2e')^{1+\lambda/\mu}(1 + 2e)^{(\mu+\lambda)/2\mu}\{\lambda(2e' + e)\mathbf{1} + 2\boldsymbol{e}\}\,. \tag{4.7}$$

Gli sforzi principali t_1 e t_2 hanno un comune valore t, noi supporremo $t = 0$. Si ottiene dunque un legame tra le contrazioni specifiche $\lambda(2e' + e) + 2\mu e' = 0$, ovvero $-e'/e = \lambda/2(\lambda + \mu)$. Da cui

$$e' = -e\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} > -\tfrac{1}{2}\,, \qquad \lambda, \mu > 0\,, \tag{4.8}$$

quindi dobbiamo supporre $e < (\lambda + \mu)/\lambda$.

In definitiva

$$-\frac{1}{2} < e < \frac{\lambda + \mu}{\lambda}\,. \tag{4.9}$$

Il rapporto $-e'/e$ risulta indipendente dall'ampiezza della deformazione e coincide con il modulo di Poisson. Calcoliamo T_3

$$T_3 = -(1 + 2e')^{\lambda/\mu}(1 + 2e)^{(\mu+\lambda)/2\mu}\big(\lambda(2e' + e) + 2e\big)\,. \tag{4.10}$$

Sostituendo in (4.10) il valore di e' dato da (4.8)

$$T_3 = -\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}e\Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}e\Big)^{\lambda/\mu}(1 + 2e)^{(\mu+\lambda)/2\mu}\,. \tag{4.11}$$

Il coefficiente $\mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$, indipendente dall'ampiezza della deformazione, è il modulo di Young. T_3 è nullo per $e = 0$, $e = -\frac{1}{2}$ e per $e = (\lambda + \mu)/\lambda$; inoltre nell'intervallo $-\frac{1}{2} < e < (\lambda + \mu)/\lambda$ ha il segno opposto ad e. Per $-\frac{1}{2} < e < 0$, T_3 ammette un punto di massimo $\hat{e}$, per $0 < e < (\lambda + \mu)/\lambda$, T_3 ammette un punto di minimo $\tilde{e}$.

$$\hat{e} = \frac{1}{2}\frac{\mu}{\lambda}\Big(1 - \sqrt{1 + \frac{4}{3}\frac{\lambda}{\mu}}\Big)\,, \qquad \tilde{e} = \frac{1}{2}\frac{\mu}{\lambda}\Big(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}\frac{\lambda}{\mu}}\Big)\,.$$

Nel caso del potenziale di Bordoni esiste dunque un valore massimo per le trazioni ed un valore minimo per le pressioni.

Dimostriamo che in trazione $(-\frac{1}{2} < e < 0)$ non è verificata la condizione

$$\frac{\mathrm{d}^2 T_3}{\mathrm{d}\delta^2} < 0 \,. \tag{4.12}$$

Infatti

$$\frac{\mathrm{d}^2\, T}{\mathrm{d}\,\delta^2} = -\mu\,\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\,\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^{(\lambda/\mu)-2}(1 + 2e)^{(\lambda+3\mu)/2\mu}\hat{f}(e)\,,$$

dove

$$\hat{f}(e) = \frac{1}{\mu^2(\lambda + \mu)}\{\mu^2(7\lambda + 5\mu) + 3\mu(4\mu^2 + 3\lambda\mu - 3\lambda^2)e$$
$$-3\mu(2\mu + 6\lambda + 3\lambda^2 + 6\lambda\mu)e^2 + 3\lambda^2(3\lambda + 4\mu)e^3\}\,.$$

Si verifica che $\hat{f}(0) > 0$ e $\hat{f}(-\frac{1}{2}) < 0$, il polinomio $\hat{f}(e)$ nell'intervallo in esame cambia dunque di segno.

Poichè il prodotto dei primi tre fattori di (4.13) è negativo per $-\frac{1}{2} < e < 0$, la disuguaglianza (4.12) è verificata per $e \in (E, 0)$ $E > -\frac{1}{2}$.

Concludendo, mentre per il potenziale di Signorini lo sforzo principale nella direzione dell'estensione risulta una funzione strettamente monotona del coefficiente di contrazione specifica e, ciò non è più vero nel caso di Bordoni.

Inoltre il potenziale di Bordoni è definito solo per $e \in \left(-\frac{1}{2}, (\lambda + \mu)/\lambda\right)$ e in trazione non è sempre verificata la disuguaglianza $\mathrm{d}^2T_3/\mathrm{d}\delta^2 < 0$, il che appare in disaccordo con l'esperienza.

5. - Scorrimento semplice

Esaminiamo un altro tipo di deformazione da $B_0 \to B$ definito da

$$x \mapsto \big(\mathbf{1} + k(a^1 \otimes a^2)\big)x \qquad (k \in R)\,. \tag{5.1}$$

Tale deformazione prende il nome di scorrimento semplice e k è detto entità di scorrimento. Da (5.1)

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F} = \mathbf{1} + k(a^1 \otimes a^2)\,, \qquad \boldsymbol{C} = \mathbf{1} + k(a^2 \otimes a^1 + a^1 \otimes a^2) + k^2(a^2 \otimes a^2)\,,\\
&\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}^{-1} = \mathbf{1} + k(a^2 \otimes a^1 + a^1 \otimes a^2) + k^2(a^1 \otimes a^1)\,,\\
&\boldsymbol{c} = \mathbf{1} - k(a^2 \otimes a^1 + a^1 \otimes a^2) + k^2(a^2 \otimes a^2)\,,\\
&\boldsymbol{e} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{c} - \mathbf{1}) = -\tfrac{1}{2}k(a^2 \otimes a^1 + a^1 \otimes a^2) + \tfrac{1}{2}k^2(a^2 \otimes a^2)\,.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Gli invarianti principali di e sono

$$(5.3)\qquad \bar{I}_1 = \tfrac{1}{2}k^2\,, \qquad \bar{I}_2 = -\tfrac{1}{4}k^2\,, \qquad \bar{I}_3 = 0\,, \qquad \bar{J} = 1\,.$$

Il corpo $\mathscr{B}$ sia omogeneo ed isotropo ed occupi inizialmente una configurazione di equilibrio naturale B_0 a temperatura uniforme τ.

Da (1.2)

$$(5.4)\qquad \boldsymbol{T} = L\mathbf{1} - (M + \tfrac{1}{4}Nk^2)\,k(a^2 \otimes a^1 + a^1 \otimes a^2) + \tfrac{1}{4}Nk^2(a^1 \otimes a^1) + \big(M + \tfrac{1}{4}(1 + k^2)N\big)\,k^2(a^2 \otimes a^2)\,,$$

dove L, M, N sono funzione degli invarianti di $\boldsymbol{e}$, ovvero di k^2.

La funzione

$$\hat{\mu}(k^2) = -\,(M + \tfrac{1}{4}Nk^2)$$

si chiama *modulo di scorrimento generalizzato*. Per deformazioni infinitesime $\hat{\mu}(0) = \mu$. $\hat{\mu}$ è una funzione pari di k, per cui la componente di taglio dello stress è una funzione dispari di k (come è fisicamente naturale). Si può verificare che $(t_2 - t_1)/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) = \hat{\mu}(K^2)$. Se il corpo soddisfa alla disuguaglianza di Baker-Ericksen (B-E) $\hat{\mu}(K^2) > 0$. Viceversa se $\hat{\mu}(K^2) > 0$, nel piano $1-2$ dello scorrimento il maggiore degli allungamenti principali λ_i corrisponde al maggiore degli sforzi principali.

Osserviamo che in (5.4) le componenti normali del tensore degli sforzi T_{11}, T_{22}, T_{33} non possono essere trascurate per deformazioni finite, in tal caso infatti L, M, N dovrebbero essere nulli, e quindi $\hat{\mu}(k^2) = 0$. Il materiale dunque, in una configurazione di equilibrio naturale sarebbe soggetto a scorrimento semplice con sforzi nulli.

In assenza delle componenti normali del tensore degli sforzi, è naturale pensare che il corpo si dilati o si contragga (effetto Kelvin). Tra le due componenti normali dello stress T_{11} e T_{22} e la componente di taglio T_{12} sussiste la relazione (deducibile immediatamente da (5.4))

$$T_{22} - T_{11} = T_{12}\,k\,,$$

allora è necessario che $T_{22} \neq T_{11}$ (effetto Poynting).

(a) Supponiamo che la legge deformazione-sforzo derivi dal potenziale di Signorini. Il corpo subisca uno scorrimento semplice e la trasformazione sia isoterma.

In questo caso $N = 0$, $\hat{\mu}(k^2) = -M = \mu + (\lambda + \mu)$, $\bar{I}_1 = \mu + \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)\,k^2$.

Dalla disuguaglianza (2.8) segue che $\mu(k^2) > 0$.

$$(5.5) \qquad \boldsymbol{T}_s = \{-\frac{1}{2}\lambda k^2 + \frac{1}{8}(\lambda + \mu)k^4\}\mathbf{1} - \{2\mu + (\lambda + \mu)k^2\}\boldsymbol{e}$$

$$= \{-\frac{1}{2}\lambda k^2 + \frac{1}{8}(\lambda + \mu)k^4\}\mathbf{1} + \{\mu + \frac{1}{2}(\lambda+\mu)\, k^2\, \}k(a^2 \otimes a^1 + a^1 \otimes a^2)$$

$$- \{\mu + \frac{1}{2}(\lambda + \mu)k^2\}\, k^2(a^2 \otimes a^2)\,.$$

Da (5.5) si deduce $T_{11} \neq T_{22}$ (effetto Poynting) e $T_{11} = T_{33}$; mentre, in generale, se $N \neq 0$, T_{11} e T_{33} sono indipendenti (v. (5.4)). L'uguaglianza delle due componenti normali del tensore degli sforzi T_{11} e T_{33} è dovuta alla semplificazione fatta ponendo $c = 0$. Da (5.5) inoltre risulta $T_{12} = \frac{1}{2}k\{2\mu + (\lambda + \mu)k^2\}$, $T_{22} = -\frac{1}{2}k^2\{(\lambda + 2\mu) + \frac{3}{4}(\lambda + \mu)k^2\}$.

La forza di contatto sulle superfici di normale a^2, ha una componente tangenziale funzione dispari di k (infinitesima del primo ordine rispetto a k), e una componente normale funzione pari di k (infinitesima del secondo ordine rispetto a k).

Calcoliamo le componenti normale e tangenziale (risp. n e t) della forza di contatto sui piani inclinati di un angolo φ rispetto a piani di normale a^1.

$$n = -\frac{1}{2}(\lambda + 4\mu)\frac{k^2}{k^2+1} - (\frac{11}{8}\lambda + \frac{15}{8}\mu)\frac{k^4}{k^2+1} - \frac{3}{8}(\lambda + \mu)\frac{k^6}{k^2+1}\,,$$

$$t = \mu\frac{k}{k^2+1} + \frac{1}{2}(\lambda + \mu)\frac{k^3}{k^2+1}\,.$$

Mentre la componente normale della tensione è funzione pari della entità di scorrimento (infinitesima del secondo ordine rispetto a k), la componente tangenziale è funzione dispari (infinitesima del primo ordine).

(b) Supponiamo adesso che la relazione deformazione-sforzo derivi dal potenziale di Bordoni.

Anche in questo caso $N = 0$, $\hat{\mu}(k^2) = -M = \mu > 0$. Nel caso del potenziale di Bordoni il modulo di scorrimento generalizzato è indipendente dall'entità di scorrimento e coincide con il modulo della elasticità lineare.

$$(5.6) \qquad \boldsymbol{T}_B = -\tfrac{1}{2}\lambda k^2\mathbf{1} - 2\mu\boldsymbol{e} = -\tfrac{1}{2}\lambda k^2\,\mathbf{1} + \mu k(a^2 \otimes a^1 + a^1 \otimes a^2) - \mu k^2(a^2 \otimes a^2).$$

Da (5.6) si deduce $T_{11} \neq T_{22}$ (effetto Poynting) e $T_{11} = T_{33}$. Mentre nel caso di Signorini l'uguaglianza delle due componenti normali del tensore degli sforzi

T_{11} e T_{33} è dovuta alla semplificazione fatta ponendo in (2.6) $c = 0$, nel caso di Bordoni essa nasce invece dal carattere particolare del potenziale proposto. Da (5.6) inoltre risulta

$$T_{12} = \mu k\,, \qquad T_{22} = -\tfrac{1}{2}k^2(\lambda + 2\mu)\,.$$

La forza di contatto sulle superfici di normale a^2 ha una componente tangenziale funzione dispari di k (infinitesima del primo ordine rispetto a k) e una componente normale funzione pari di k (infinitesima del secondo ordine rispetto a k). Tali componenti coincidono con quelle ottenute nel caso di Signorini a meno di termini $o(k^2)$.

Calcoliamo le componenti normale e tangenziale della forza di contatto sui piani inclinati di un angolo φ rispetto ai piani di normale a^1.

$$n = -\frac{1}{2}(\lambda + 4\mu)\frac{k^2}{k^2+1} - \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\frac{k^4}{k^2+1}\,, \qquad t = \mu\frac{k}{k^2+1}\,.$$

La componente normale della forza di contatto è dunque una funzione pari di k (infinitesima del secondo ordine rispetto a k), mentre la componente tangenziale è una funzione dispari di k (infinitesima del primo ordine rispetto a k). I valori di t e di n desunti dal potenziale di Signorini e di Bordoni coincidono a meno di termini $o(k^2)$.

Conclusioni

I potenziali di Signorini e di Bordoni soddisfano entrambi a condizioni di plausibilità fisica. Si riducono per deformazioni infinitesime al potenziale di Hooke; in entrambi i casi (con ipotesi non restrittive) il potenziale isotermico W_T risulta definito positivo. Gli sforzi principali per unità di superficie indeformata T_i risultano positivi in estensione e negativi in compressione (in accordo con l'intuizione fisica).

In estensione semplice e in estensione uniforme il potenziale di Signoriui dà luogo a sforzi principali per unità di superficie indeformata strettamente monotoni, mentre nel caso di Bordoni ciò non è più vero e si perde dunque la unicità nella corrispondenza deformazione-sforzo.

La condizione $d^2T/d\delta^2$ suggerita dalle esperienze fatte sottoponendo corpi a trazione semplice, verificata nel caso del potenziale di Signorini, non è valida per ogni $e \in (-\frac{1}{2}, 0)$ nel caso di Bordoni.

In scorrimento semplice l'espressione del tensore degli sforzi data dal potenziale di Bordoni non è che l'approssimazione di quella di Signorini a meno di termini $o(k^2)$.

I risultati ottenuti nell'esame dei due potenziali di Signorini e di Bordoni sembrano dunque indicare una migliore plausibilità fisica del potenziale di Signorini.

References

[1] P. G. BORDONI, *Sopra le trasformazioni termoelastiche finite di certi solidi omogenei ed isotropi*, Rend. Mat. e Appl. **12** (1953), 1-30.

[2] P. CHADWICK, *Thermo-mechanics of rubberlike materials*, Philos. Trans. Roy. Soc. London **276** (1974), 371-403.

[3] G. GRIOLI, *On the thermodynamic potential for continuums with reversible transformations—some possible types*, Meccanica J. **1** (1966), 15-20.

[4] F. JOHN, *Plane strain problems for a perfectly elastic materials of harmonic type*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 239-296.

[5] M. MOONEY, *A theory of large elastic deformation*, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **11** (1940), 582-592.

[6] R. W. OGDEN, *Large deformation isotropic elasticity—on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **326** (1972), 565-584.

[7] R. S. RIVLIN: $[\cdot]_1$ *Large elastic deformations of isotropic materials* (I, II, III, IV), Philos. Trans. Roy. Soc. London **240** (1948), 459-490, 491-508, 509-525; **241** (1948), 379-397; $[\cdot]_2$ *Large elastic deformations of isotropic materials* (V), Proc. Roy. Soc. London **195** (1949), 463-473.

[8] B. R. SETH, *Finite strain in elastic problems*, Philos. Trans. Roy. Soc. London **234** (1935), 231-264.

[9] A. SIGNORINI: $[\cdot]_1$ *Deformazioni elastiche finite: elasticità di 2° grado*, Atti II Congresso Mat. Ital. (1942), 56-71; $[\cdot]_2$ *Trasformazioni termoelastiche finite* (Memoria 2°), Ann. Mat. Pura Appl. (4) **30** (1949), 1-72.

[10] C. TOLOTTI, *Sulla più generale elasticità di 2° grado*, Rend. Sem. Mat. Univ. Roma **3** (1942), 1-20.

[11] C. TRUSDELL, *The Mechanical foundations of elasticity and fluid-dynamics*, J. of Rat. Mech. and Anal. **1** (1952), 125-300.

[12] C. TRUSDELL and W. NOLL, *The non linear field theories*, H.d.P. III/3 (1965).

[13] C. TRUSDELL and R. TOUPIN, *The classical field theories*, H.d.P. III/1 (1960), 226-881.

[14] C. C. WANG and C. TRUESDELL, *Introduction to rational elasticity*, Noordhoff International Publishing, Leyden 1973.

Summary

Since it is impossible to verify by experiments whether the form of an elastic potential fits physical phenomena better than another, only indirect tests can guide to the solution of the problem.

In this paper we tried to compare the results obtained applying different forms of elastic potential (the form due to Signorini and the one due to Bordoni) to simple deformations, in order to get some information on which one has the best physical acceptability.

* * *