

D. QUILGHINI (\*)

## Applicando il teorema fondamentale della statica degli olonomi (\*\*)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

### 1. - Introduzione

Indichiamo con  $S$  un sistema materiale costituito da  $s$  parti rigide  $S_r$  ( $r = 1, \dots, s$ ) variamente vincolate tra di loro e con l'esterno mediante un certo numero di vincoli olonomi, bilateri e fissi, del tipo

$$(1) \quad f(\dots, P, \dots) = f(\dots, x, y, z, \dots) = 0,$$

dove  $f$  è una funzione di classe  $C^n$  delle coordinate  $x, y, z$ , in un dato riferimento cartesiano  $\Sigma$  (che diremo fisso), dei punti  $P$  di  $S$  in cui sono realizzati i vincoli. I vincoli siano poi in numero tale da consentire ad  $S$  possibilità di movimento. Sia  $C^*$  una configurazione di  $S$ , cioè un assetto delle  $s$  parti rigide  $S_r$  che rispetta i vincoli imposti. Assunta  $C^*$  come configurazione di riferimento, per le ipotesi fatte sui vincoli, possiamo pensare l'insieme  $\mathcal{C}$  delle configurazioni  $C$  di  $S$ , relativo a  $C^*$ , come costituito da tutte le possibili configurazioni di  $S$  che si ottengono da  $C^*$  per movimenti continui di  $S$  che rispettano i vincoli. Così se  $C_1$  e  $C_2$  appartengono a  $\mathcal{C}$  potremo passare dall'una all'altra configurazione mediante una successione continua di configurazioni tutte appartenenti a  $\mathcal{C}$  senza violare i vincoli. Riservandoci di precisare meglio questo concetto, esprimeremo tale proprietà dicendo che  $\mathcal{C}$  è connesso. Per la necessità di definire  $\mathcal{C}$

---

(\*) Indirizzo: Istituto di Matematica Applicata « G. Sansone », Facoltà di Ingegneria, Università, Via S. Marta 3, 50126 Firenze, Italy.

(\*\*) Ricevuto: 19-III-1979.

in via geometrica da una  $C^*$  si consideri, ad esempio, una asticciola  $AB$  con gli estremi vincolati ad una parabola. È evidente che invertendo le posizioni degli estremi sulla parabola si verificano ancora i vincoli ma la configurazione  $AB$  non è ottenibile per movimenti continui da  $BA$ .

Come è noto, (cfr. [6], vol. II, cap. XVI, § 2, n. 10, pag. 323), possiamo definire come configurazioni di equilibrio di  $S$  in  $\Sigma$  quelle in corrispondenza alle quali può esistere, per ogni  $S_r$ , un complesso di reazioni vincolari, relative all'atto di moto nullo in  $\Sigma$ , esercitate su  $S_r$  tramite i vincoli, dall'esterno come da altre parti di  $S$ , tali da verificare con le forze attive esercitate su  $S_r$  le equazioni cardinali della statica. Se i vincoli sono lisci da questa definizione si ha che fra tutte le possibili configurazioni di  $S$  quelle di equilibrio (e soltanto quelle) sono caratterizzate dall'essere

$$(2) \quad \delta \mathcal{L} \leq 0,$$

per qualunque sistema di spostamenti virtuali. Per dedurre da quest'ultima le equazioni che determinano le configurazioni di equilibrio di  $S$  in  $\mathbb{C}$ ,

$$(3) \quad Q_h = 0 \quad (h = 1, \dots, l),$$

occorre che, con riferimento a  $\mathbb{C}$ ,  $S$  sia olonomo. Cioè (cfr. loc. cit. in [6], § 1, n. 3, pag. 307), oltre ad essere  $S$  a vincoli olonomi lisci, devono esistere  $l$  parametri  $q_h$ , tra loro indipendenti, ciascuno liberamente variabile in un intervallo aperto <sup>(1)</sup>  $I_h \subset \mathbf{R}$ , tali che l'insieme  $\mathbb{C}$  sia in corrispondenza biunivoca con i punti

$$q \equiv (q_1, \dots, q_l) \in I_1 \times \dots \times I_l$$

del rettangolo  $I_1 \times \dots \times I_l$  aperto su  $\mathbf{R}^l$ . In queste ipotesi le  $q_h$  sono dette coordinate lagrangiane (o libere) di  $S$ .

Non tutti i sistemi  $S$  sono olonomi nel senso sopra detto, non esistendo sempre un sistema di coordinate lagrangiane libere mediante le quali rappresentare, in corrispondenza biunivoca, tutto l'insieme  $\mathbb{C}$  di configurazioni di  $S$  dedotto da una data configurazione di riferimento. In tali casi occorre ricoprire  $\mathbb{C}$  con un gruppo di insiemi  $\mathbb{C}^v$  ( $v = 1, \dots, N$ ) in ciascuno dei quali determinare un opportuno riferimento lagrangiano libero, in generale diverso da un insieme all'altro. Utilizzando un solo gruppo di parametri, che solo localmente ha il carattere di riferimento lagrangiano libero, può accadere che

---

<sup>(1)</sup> Questa condizione non è spesso espressamente indicata ma è essenziale per dedurre le (3) dalla (2).

dalle (3) non si ritrovino tutte le configurazioni di equilibrio di  $S$  in  $C$ , o meglio che le (3) cessino di sussistere proprio in corrispondenza a configurazioni per le quali è verificata la (2).

Si consideri l'esempio di Figura 1 dove  $S$  è costituito da due aste rigide  $AB$  e  $BC$ , omogenee pesanti, poste in un piano verticale ( $O; x, z$ ), mutuamente cernierate in  $B$  mentre l'estremo  $C$  è cernierato in un punto fisso dell'asse  $z$  ed  $A$  è vincolato a scorrere sull'asse  $x$ . Sia  $|\overline{OC} - \overline{CB}| < \overline{BA} < \overline{OC} + \overline{CB}$ . Manifestamente il sistema ha un sol grado di libertà.

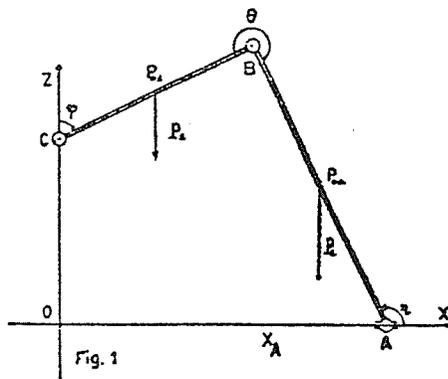


Figura 1

Usando come parametro l'angolo  $\varphi$  (cfr. Fig.) e scrivendo corrispondentemente la (3) da questa non si trovano i valori  $\varphi_0$  (minimo) e  $\varphi_1$  (massimo) di  $\varphi$  cui corrispondono le configurazioni di equilibrio con  $AB$  verticale, la (2) è peraltro verificata in tali configurazioni pur essendovi  $Q \neq 0$  essendo qui  $\delta\varphi = 0$ . Il parametro  $\varphi$  non può essere assunto come coordinata lagrangiana libera per tutto  $C$ , sia perchè varia in un intervallo chiuso (e perciò nei suoi estremi dalla (2) non può dedursi la (3) non essendo ivi  $\delta\varphi$  arbitrario) sia perchè (e questo accade per ogni parametro che individui l'orientamento dell'asta  $CB$ ) ad ogni valore di  $\varphi \in (\varphi_0, \varphi_1)$  corrispondono due configurazioni di  $S$  in  $C$ . Una identica situazione si verifica usando per rappresentare tutto  $C$  l'angolo  $\eta$ ; in questo caso la (3) non dà i valori  $\eta_0$  (minimo) ed  $\eta_1$  (massimo) di  $\eta$  cui corrispondono le configurazioni (di equilibrio) con  $CB$  verticale. Se usiamo di altri parametri, ad esempio  $\theta$  (o un qualunque altro parametro geometricamente equivalente) oppure l'ascissa  $x_A$ , si ha ancora che ad ogni valore del parametro corrispondono in  $C$  due possibili configurazioni, esclusi i valori estremi, cui non corrispondono configurazioni di equilibrio ma dove la grandezza  $Q$  non è definita. Usando di  $\theta$  o di  $x_A$  risulta poi necessario operare delle

scelte di segno per esprimere le coordinate cartesiane di  $P_{01}$  e di  $P_{02}$  (in particolare le quote) a seconda delle due diverse configurazioni che corrispondono allo stesso valore del parametro. Ciò equivale di fatto ad una suddivisione di  $\mathcal{C}$  in sottoinsiemi in ciascuno dei quali (a parte la complicazione dei calcoli)  $\delta\mathcal{L}$  e quindi la (3), si scrive in forma diversa.

## 2. - Premesse geometriche

Ritornando nel seguito su questo esempio, chiariamo lo schema geometrico mediante il quale conveniamo di rappresentare un dato sistema del tipo  $S$ . Penseremo ogni  $S_r$  solidale a tutto uno spazio rigido  $\Sigma_r$ , (che potrà anche essere un piano se  $S$  è piano). Presi i punti mediante i quali  $S_r$  è vincolato alle altre parti di  $S$  ed, eventualmente all'esterno, nonchè quelli ai quali possiamo pensare di applicare (in modo equivalente secondo le equazioni cardinali della statica) la risultante  $F_r$  e gli elementi della coppia di momento  $M_r$ , delle forze attive direttamente applicate su  $S_r$ , costruiamo con questi e con altri punti di  $\Sigma_r$  che eventualmente possano rendersi necessari, una struttura reticolare aperta, strettamente indeformabile costituita da  $p_r \geq 4$  ( $p_r \geq 3$  se  $S$  è piano) punti solidali a  $\Sigma_r$  tale che i  $v_r = 3p_r - 6$  ( $v_r = 2p_r - 3$  se  $S$  è piano) vincoli di rigidità (che sono del tipo (1)) che imponiamo tra i  $p_r$  punti siano tra loro indipendenti (cfr. [6], vol. II, cap. XIV, § 1, n. 4, pag. 229; [3], vol. I, cap. XIV, § 3, nn. 13 e seg.ti, pag. 609; [1], cap. VIII, § 1, n. 2, pag. 197; [4], cap. XVII, c), § 1, pag. 389) in guisa cioè che qualunque quaterna di punti tra loro direttamente legati con 6 vincoli di rigidità non sia complanare, che ogni tetraedro così costruito sia esterno agli altri e che due tetraedri consecutivi abbiano al più in comune una faccia e giacciano, rispetto a questa, da bande opposte.

In tal modo  $S$ , pur essendo costituito da parti rigide, viene pensato come un sistema di  $m$  punti  $P_j$ ,  $m = \sum_r^{1...s} p_r$ , vincolati tra loro e con l'esterno mediante  $g$  relazioni vincolari del tipo

$$(1)_1 \quad f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_j, y_j, z_j, \dots, x_m, y_m, z_m) = f_k(P_1, \dots, P_j, \dots, P_m) = 0,$$

( $k = 1, \dots, g$ ) essendo le  $f_k$  funzioni di classe  $C^n$  delle coordinate dei punti  $P_j$  variabili in relazione a tutte le possibili configurazioni  $C \in \mathcal{C}$ .

Se, come supponiamo, i vincoli imposti tra le diverse parti di  $S$  e con l'esterno sono semplici <sup>(2)</sup>, tra loro indipendenti ed in numero tale da consentire ad  $S$  pos-

<sup>(2)</sup> Tali cioè che ogni  $f_k(P_1, \dots, P_j, \dots, P_m) = 0$  rappresenti, anche analiticamente, una sola relazione vincolare, (cfr. loc. cit. in [3], p. 611 e sgti).

sibilità di movimento, dovrà essere  $g \leq 3m - 1$  e, per come sono stati strutturati i punti di ogni  $\Sigma_r$ , le  $(1)_1$  sono tra loro indipendenti. La matrice jacobiana delle  $f_k$  avrà perciò caratteristica massima, cioè  $g$ , per ogni possibile valore delle coordinate dei punti  $P_j$  in corrispondenza ad una qualunque  $C \in \mathcal{C}$ . Sia ora  $\bar{C} \in \mathcal{C}$  e  $\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j$  i valori delle coordinate dei punti  $P_j$  (in  $\Sigma$ ) in corrispondenza a  $\bar{C}$ . Tali valori soddisfano le  $(1)_1$  ed ivi la caratteristica della matrice jacobina delle  $f_k$  è  $g$ , perciò (cfr. [5], vol. II, cap. II, n. 7, pag. 62) è possibile determinare  $l = 3m - g$  coordinate dei punti  $P_j$  (od anche  $l$  parametri a queste geometricamente equivalenti) che indichiamo, come solitamente si fa, con  $q_h$ ,  $h = 1, \dots, l$  tra loro indipendenti e ciascuna liberamente variabile in un intervallo aperto  $\Delta I_h \subset \mathbf{R}$ , di centro  $\bar{q}_h$ , tali che per  $q \equiv (q_1, \dots, q_l) \in \Delta I_1 \times \dots \times \Delta I_l \equiv \Delta I$  le coordinate dei punti  $P_j$  si esprimono in un ed in un sol modo come funzioni di classe  $C^n$  delle  $q_h$ , in guisa da verificare le  $(1)_1$  ed assumono i valori  $\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j$ , per  $q_h = \bar{q}_h$ . A parte le  $q_h$ , che richiediamo espressamente variabili in intervalli aperti (l'esempio di Figura 1 ne mette in evidenza la necessità) le altre coordinate possono anche variare in intervalli chiusi, o parzialmente chiusi. Comunque al variare del punto  $q \in \Delta I$  il punto  $(x_1, y_1, z_1, \dots, x_j, y_j, z_j, \dots, x_m, y_m, z_m)$  descrive, in un intorno connesso  $\Delta \mathbf{R}^{3m} \subset \mathbf{R}^{3m}$ , una varietà connessa di dimensione  $l$ , subordinata in  $\Delta \mathbf{R}^{3n}$  dalle  $(1)_1$ , i cui punti sono in corrispondenza biunivoca, bicontinua, etc., con i punti  $q \in \Delta I$ . Quindi ad ogni  $q \in \Delta I$  corrisponde una ed una sola configurazione  $C$  di  $S$  appartenente ad un sottoinsieme  $\bar{\Delta C} \subset \mathcal{C}$  intorno a  $\bar{C}$  e viceversa. Stante la connessione di  $\Delta I$  anche  $\bar{\Delta C}$  è connesso nel senso che se  $C_1$  e  $C_2$  appartengono a  $\bar{\Delta C}$  possiamo passare dall'una all'altra configurazione tramite una successione continua di configurazioni  $C \in \bar{\Delta C}$ , rispettando le  $(1)_1$ , e ciò mediante una traiettoria di punti  $q \in \Delta I$ . Ricordando la definizione già ricordata di sistema olonomo, diremo che  $S$  è olonomo per  $C \in \bar{\Delta C}$  con riferimento alle coordinate lagrangiane (libere)  $q_h$ ,  $h = 1, \dots, l$ , ed ha ivi  $l$  gradi di libertà.

Possiamo estendere la definizione di sistema olonomo ad  $l$  gradi di libertà.

Siano  $\mathcal{C}^1$  e  $\mathcal{C}^2$  due insiemi, appartenenti, come  $\bar{\Delta C}$ , a  $\mathcal{C}$ , di possibili configurazioni di  $S$  in ciascuno dei quali  $S$  è olonomo ad  $l$  gradi di libertà, rappresentabile in  $\mathcal{C}^1$  mediante le coordinate lagrangiane libere  $q_h^1$  e, in  $\mathcal{C}^2$ , mediante le coordinate lagrangiane libere  $q_h^2$  ( $h = 1, \dots, l$ ).

Diremo che  $\mathcal{C}^1$  e  $\mathcal{C}^2$  sono tra loro non disgiunti, od anche interconnessi, se esiste almeno una configurazione  $C \in \mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}^2$ . Così se  $C_1 \in \mathcal{C}^1$  e  $C_2 \in \mathcal{C}^2$  sarà possibile, rispettando i vincoli, passare da  $C_1$  a  $C_2$  e viceversa, tramite una successione continua di configurazioni  $C$  di  $S$  appartenenti all'unione  $\mathcal{C}^1 \cup \mathcal{C}^2$ . In questo senso diremo che  $\mathcal{C}^1 \cup \mathcal{C}^2$  è connesso e che  $S$  è olonomo ad  $l$  gradi di libertà in  $\mathcal{C}^1 \cup \mathcal{C}^2$ , anche se è rappresentabile mediante le  $q_h^1$  in  $\mathcal{C}^1$  e le  $q_h^2$  in  $\mathcal{C}^2$ ,  $h = 1, \dots, l$ . Ovviamente, variando le  $q_h^1$  e le  $q_h^2$  in intervalli aperti se  $C \in \mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}^2$ , esiste tutto un sottoinsieme connesso  $\Delta C \subset \mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}^2$ , che contiene  $C$ ,

e dove  $S$  è rappresentabile sia con le  $q_h^1$  che con le  $q_h^2$ . Siano ora  $C^r$  ( $r = 1, \dots, N$ )  $N$  insiemi connessi di configurazioni di  $S$  appartenenti all'insieme  $C$  ottenuto da una data configurazione di riferimento, in ciascuno dei quali  $S$  è olonomo ad  $l$  gradi di libertà, rappresentabile con le coordinate lagrangiane libere  $q_h^r$  ( $h = 1, \dots, l; r = 1, \dots, N$ ) inoltre  $C^1$  sia interconnesso con  $C^2$ ,  $C^2$  con  $C^3$  e, via dicendo,  $C^{N-1}$  con  $C^N$ . In tale ipotesi diremo che  $S$  è olonomo in  $C^1 \cup C^2 \cup \dots \cup C^N$ , ancorchè le coordinate libere che individuano  $S$  siano diverse dall'uno all'altro insieme. Ovviamente, per quanto già detto,  $C^1 \cup C^2 \cup \dots \cup C^N$  è connesso nel senso già precisato; se poi tale insieme coincide con l'insieme  $C$  delle configurazioni di  $S$ , deducibili da una data configurazione di riferimento  $C^*$  per movimenti continui che rispettano i vincoli, diremo che  $S$  è olonomo in  $C$  ad  $l$  gradi di libertà e che gli  $N$  insiemi  $C^r$  sono una copertura completa di  $C$ .

Così il sistema  $S$  di cui alla Fig. 1 è olonomo ad 1 grado di libertà nel senso qui precisato. L'insieme  $C$  delle sue configurazioni, ciascuno interconnesso con il successivo può essere coperto coi seguenti quattro insiemi di configurazioni,

$$C^1 \equiv \{C | C \in C, x_B > 0\},$$

$$C^2 \equiv \{C | C \in C, x_B < x_A\},$$

$$C^3 \equiv \{C | C \in C, x_B < 0\},$$

$$C^4 \equiv \{C | C \in C, x_A < x_B\},$$

dove, come coordinata lagrangiana libera si può assumere l'angolo  $\eta \in (\eta_0, \eta_1)$  in  $C^1$  ed in  $C^3$  e l'angolo  $\varphi \in (\varphi_0, \varphi_1)$  in  $C^2$  ed in  $C^4$ . Facilmente si verifica che  $C^1$  e  $C^3$  sono disgiunti, così come  $C^2$  e  $C^4$ . Scrivendo ora la (3), separatamente per i quattro insiemi indicati, si ritrovano tutte le configurazioni di equilibrio.

Si possono fare molti esempi per i quali l'insieme  $C$  delle configurazioni non può essere posto in corrispondenza biunivoca con un solo sistema di coordinate lagrangiane liberamente variabili in intervalli aperti. Così lo stesso pendolo ad asta (la sua varietà rappresentativa è una circonferenza); volendo mantenere la biunivocità della corrispondenza e la variabilità della coordinata lagrangiana in un intervallo aperto, si devono considerare almeno due sottoinsiemi  $C^1$  e  $C^2$ , ovviamente interconnessi, e quindi due carte di rappresentazione (cfr. [2], cap. III, 1.9, iv, pag. 60).

Nel caso del bipendolo, sistema a due gradi di libertà, la sua varietà rappresentativa è una varietà prodotto, ed è un toro, anche in questo caso occorrono più carte per rappresentare il sistema (cfr. [2], cap. III, 3.1, pag. 66) e sono peraltro indispensabili almeno tre insiemi per ricoprire completamente  $C$ .

Un altro esempio geometricamente interessante è quello della Figura 2 dove le tre aste  $AB, BC$  e  $CD$  sono mutuamente cernierate in  $B$  e in  $C$ , con cerniere cilindriche di collegamento, mentre  $D$  è una cerniera fissa ed il punto  $A$  può scorrere lungo la stessa orizzontale per  $D$ . Le aste siano omogenee pesanti e, posto  $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c$ , sia poi  $a > b > c, a < b + c$ . Il sistema, che ha due gradi di libertà, presenta 12 configurazioni di equilibrio, quattro con  $DC$  e  $CB$  verticali, quattro con  $DC$  e  $BA$  verticali e le altre quattro con  $CB$  e  $BA$  verticali.

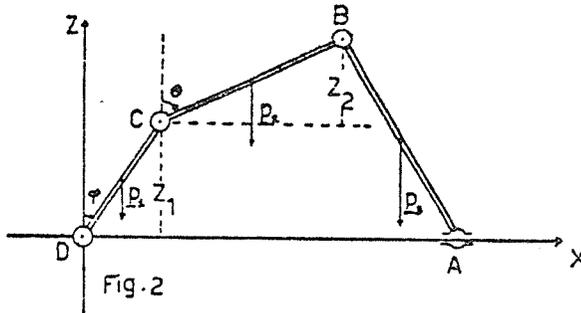


Figura 2

Pensando di rappresentare tutto  $C$  mediante gli angoli  $\varphi$  e  $\theta$  (cfr. la Figura 2) e scrivendo corrispondentemente le (3) si ritrovano soltanto le prime quattro configurazioni di equilibrio (e facendo attenzione). Se poi assumiamo gli eccessi di quota  $z_1$  e  $z_2$ , mediante le (3) non troveremmo alcuna configurazione di equilibrio. Il fatto è che la coppia  $(\varphi, \theta)$  come la coppia  $(z_1, z_2)$  non possono essere assunte come coordinate lagrangiane libere per tutto  $C$ . Infatti mentre  $\varphi$  e  $\theta$  sono tra loro vincolati da

$$(4) \quad -a \leq b \cos \theta + c \cos \varphi \leq a,$$

$z_1$  e  $z_2$  risultano vincolati dalle relazioni

$$(5) \quad -c \leq z_1 \leq c, \quad -a \leq z_1 + z_2 \leq a, \quad -b \leq z_2 \leq b.$$

Volendo determinare un gruppo di insiemi così da ricoprire completamente  $C$  e in ciascuno dei quali  $S$  sia olonomo rispetto ad una opportuna coppia di variabili lagrangiane libere ci rendiamo subito conto delle complicazioni che si devono superare. Difficoltà del genere si incontrano anche per l'esempio di Figura 1 e nello studio dell'insieme delle configurazioni di ogni cinematismo meccanico. Poiché la determinazione delle configurazioni di equilibrio di un

cinematismo, soggetto a date forze, è essenziale corrispondendo tali configurazioni ai punti morti, sembra di un qualche interesse per le applicazioni studiare un metodo che consenta di determinare le configurazioni di equilibrio di un dato sistema a vincoli olonomi lisci, e olonomo secondo la definizione qui data, usando di un sol gruppo di parametri, che indicheremo ancora con  $q_h$ , per tutto l'insieme  $\mathcal{C}$  delle sue configurazioni, ancorchè tali parametri abbiano il carattere di coordinate lagrangiane libere soltanto localmente.

Sia ora  $S$  olonomo ad  $l$  gradi di libertà,  $\mathcal{C}^v$  una copertura completa di  $\mathcal{C}$  e  $q^v \equiv (q_1^v, \dots, q_l^v) \in \mathbf{I}_1^v \times \dots \times \mathbf{I}_l^v \equiv \mathbf{I}^v$  la rappresentazione lagrangiana di  $S$  in  $\mathcal{C}^v$  ( $v = 1, \dots, N$ ). Sia  $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione che ad ogni  $C \in \mathcal{C}$  associa un numero reale, che indichiamo ancora con  $\varphi$ . Diremo che  $\varphi$  è di classe  $C^n$  se, pensata come funzione delle variabili  $(q_1^v, \dots, q_l^v) \in \mathbf{I}^v$  per  $C \in \mathcal{C}^v$ , essa è di classe  $C^n$  rispetto a tali variabili e inoltre, se  $C \in \mathcal{C}^v \cap \mathcal{C}^{v+1}$  si ha, in corrispondenza a  $C$

$$\varphi(q_1^v, \dots, q_l^v) = \varphi(q_1^{v+1}, \dots, q_l^{v+1}), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_h^v} = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial q_k^{v+1}} \frac{\partial q_k^{v+1}}{\partial q_h^v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_k^{v+1}} = \sum_h \frac{\partial \varphi}{\partial q_h^v} \frac{\partial q_h^v}{\partial q_k^{v+1}},$$

e così via fino alle derivate di ordine  $n$ .

Posto, per  $C \in \mathcal{C}^v$

$$\delta \varphi = \sum_h \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_h^v} \right)_C \delta q_h^v,$$

dove  $(\partial \varphi / \partial q_h^v)_C$  è la derivata di  $\varphi$  rispetto a  $q_h^v$  valutata in  $C$ , mentre i  $\delta q_h^v$  sono dei numeri reali soddisfacenti la condizione che risulti  $q_h^v + \delta q_h^v \in \mathbf{I}_h^v$  e per il resto arbitrari (da qui la necessità che  $\mathbf{I}_h^v$  sia un intervallo aperto), diremo che  $\delta \varphi$  è la variazione virtuale di  $\varphi$  valutata in  $C$ .

In particolare chiameremo spostamento virtuale  $\delta P_j$ , di un dato punto  $P_j$  di  $S$ , relativo alla configurazione  $C \in \mathcal{C}^v$ , il vettore

$$\delta P_j = \sum_h \left( \frac{\partial P_j}{\partial q_h^v} \right)_C \delta q_h^v$$

con ovvio significato dei simboli.

Osserviamo subito che mentre i punti  $P_j$  soddisfano i vincoli altrettanto non è detto per i punti  $P_j + \delta P_j$ , e può verificarsi il caso che, in una data configurazione, gli spostamenti virtuali di parte dei punti di  $S$  siano soltanto quelli identicamente nulli, nonostante l'arbitrarietà dei  $\delta q_h^v$ . Basta per questo che, in quella configurazione, sia  $(\partial P_j / \partial q_h^v)_C = 0$  ( $h = 1, \dots, l$ ). Come esempio si consideri ancora il sistema di Figura 1 in una delle due configurazioni con  $AB$  verticale. In tali configurazioni gli spostamenti virtuali di tutti i punti del-

l'asta  $BC$  possono essere soltanto quelli nulli, mentre ciò non si verifica per i punti dell'asta  $BA$ , dove, mentre è nullo ogni possibile spostamento virtuale di  $B$ , gli spostamenti virtuali di  $A$  sono lungo l'asse  $x$ , così, per effetto di un possibile spostamento virtuale a partire da una di queste configurazioni l'asta  $AB$  si allungherebbe, violando i vincoli.

### 3. - Equazioni di equilibrio

Con le solite ipotesi per  $S$  siano  $q_h: C \rightarrow R$  ( $h = 1, \dots, l$ )  $l$  funzioni di classe  $C^n$  ciascuna delle quali associa ad ogni  $C \in C$  un numero reale che indichiamo ancora con  $q_h$ : Essendo  $C$  connesso (nel senso già precisato) l'immagine  $\mathcal{Q}_h \subset R$  di  $C$ , ottenuta tramite la funzione  $q_h$ , cioè l'intervallo di variabilità del valore  $q_h$ , è connesso ma non è detto che sia aperto, potendo essere chiuso o parzialmente chiuso. Così lo spazio  $\mathcal{Q}$  dei punti  $q \equiv (q_1, \dots, q_l)$  costituito da tutte le possibili elluple ordinate di valori  $q_h$  ottenuti al variare di  $C \in C$ , potrà avere una frontiera  $\partial\mathcal{Q}$  che fa parte di  $\mathcal{Q}$ . Supponiamo ora che le  $q_h$  verifichino le seguenti condizioni.

(1) Esiste un intero  $I$  tale che ogni punto  $q = (q_1, \dots, q_l) \in \mathcal{Q}$  è l'immagine di un numero intero non nullo  $i \leq I$  di configurazioni  $C \in C$ .

(2) Preso comunque un punto  $\bar{q} = (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_l) \in \mathcal{Q} - \partial\mathcal{Q}$  e indicata con  $\bar{C} \in C^r$  una delle configurazioni di  $C$  che hanno per immagine in  $\mathcal{Q}$  il punto  $\bar{q}$ , di coordinate lagrangiane libere  $\bar{q}_k^r$  in  $I_k^r$  ( $k = 1, \dots, l$ ), esiste un intorno  $\Delta\bar{q}^r \subset I_1^r \times \dots \times I_l^r = I^r$  di centro  $(\bar{q}_1^r, \dots, \bar{q}_l^r)$  e un intorno  $\Delta\bar{q} \subset \mathcal{Q} - \partial\mathcal{Q}$  di centro  $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_l)$  dove le funzioni

$$(6) \quad q_h = q_h(q_1^r, \dots, q_l^r)$$

sono invertibili; è cioè possibile esprimere in tali intorni le coordinate libere  $q_k^r$  in uno ed in un sol modo come funzioni delle  $q_h$ , nella forma

$$(6)_1 \quad q_k^r = q_k^r(q_1, \dots, q_l) \quad (k = 1, \dots, l).$$

In altri termini è possibile determinare un insieme  $\bar{A}C^r$  intorno a  $\bar{C}$  tale che per  $C \in \bar{A}C^r$  le  $q_h$  possono essere assunte come coordinate lagrangiane libere.

(3) La frontiera  $\partial\mathcal{Q}$  di  $\mathcal{Q}$ , ove esista, può essere definita da un numero finito  $t$  di relazioni del tipo

$$(7) \quad \Phi_u(q_1, \dots, q_l) = 0 \quad (u = 1, \dots, t),$$

essendo le  $\Phi_u$  funzioni di classe  $C^n$  dei loro argomenti,

In tal modo, a meno di un cambiamento di segno, lo spazio  $\mathcal{Q}$  di tutte le possibili elluple ordinate  $(q_1, \dots, q_i)$  resta definito da un certo numero di relazioni del tipo

$$(8) \quad \Phi_u(q_1, \dots, q_i) \leq 0,$$

ed avremo  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}_1 \times \dots \times \mathcal{Q}_i \subset \mathbf{R}^i$ .

Se un gruppo di funzioni  $q_h$  verificano le condizioni sopra dette diremo che le  $q_h$  costituiscono un sistema di parametri lagrangiani di  $S$ , ancorchè possono non avere il carattere di coordinate lagrangiane libere.

Come esempi si vedano l'angolo  $\varphi$  o l'angolo  $\eta$  del sistema di Figura 1, od anche, ed è un esempio più significativo, gli eccessi di quota  $z_1$  e  $z_2$  del sistema di Figura 2. Mentre ad ogni  $C \in \mathbb{C}$  corrisponde uno ed un sol punto  $(z_1, z_2)$  dell'esagono  $Z$  definito dalle (5) (che possono sempre essere scritte nella forma (8)) rappresentato nella Figura 3 (contenuto nel rettangolo  $Z_1 \times Z_2$ ),

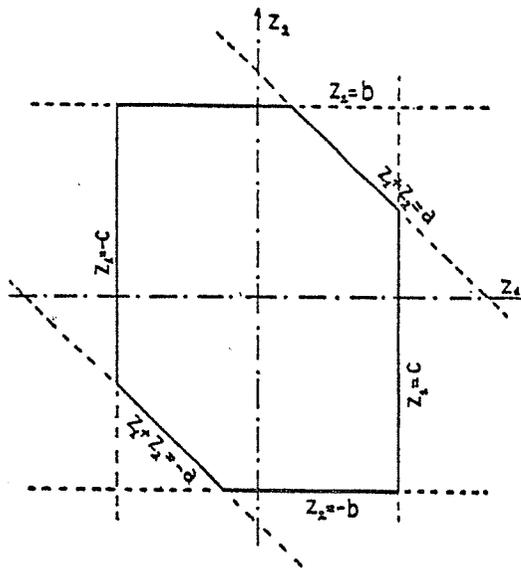


Figura 3

ad ogni punto  $z = (z_1, z_2) \in Z - \partial Z$  corrispondono 8 configurazioni di  $S$ , ad ogni punto  $z = (z_1, z_2) \in \partial Z$  ( $\partial Z$  è definita dalle (5) scritte per uguaglianza), esclusi i vertici dell'esagono, corrispondono 4 configurazioni ed, infine, ai vertici dell'esagono corrispondono 2 configurazioni (di equilibrio per aste pesanti).

Un altro esempio, sul quale torneremo, si ha sempre per il sistema di Figura 2, con la coppia  $(\varphi, \theta)$ .

Tornando al generale sia  $\{\dots P_i \dots\} \subset \{\dots P_j \dots\}$  l'insieme degli  $n$  punti  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ai quali, secondo lo schema di cui al n. 2, pensiamo applicate le forze attive agenti su  $S$ . La (2) si scrive, come noto

$$(2)_1 \quad \sum_i F_i \times \delta P_i \leq 0 \quad \forall \delta P_i.$$

Prendiamo adesso in considerazione tutte le possibili configurazioni  $C \in \mathbb{C}$  cui corrispondono punti  $q \equiv (q_1, \dots, q_l) \in \mathcal{Q} - \partial \mathcal{Q}$ . Sia  $\bar{C} \in \mathbb{C}^r$  una tale configurazione alla quale corrisponderà un sol punto  $\bar{q} \equiv (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_l) \in \mathcal{Q} - \partial \mathcal{Q}$ . Per la condizione (2) sarà possibile determinare un sottoinsieme  $\bar{\mathcal{A}}\mathbb{C}^r \subset \mathbb{C}^r$  tale che, con riferimento alle  $q_k^v \in \mathbf{I}_k^v$ ,  $k = 1, \dots, l$ , le  $q_h$  ( $h = 1, \dots, l$ ) si comportano per  $C \in \bar{\mathcal{A}}\mathbb{C}^r$  come coordinate lagrangiane libere, possiamo perciò scrivere in  $\bar{C}$

$$(9) \quad \delta P_i = \sum_h \left( \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \right)_{\bar{C}} \delta q_h.$$

Infatti in  $\bar{C} \in \bar{\mathcal{A}}\mathbb{C}^r$  è

$$(10) \quad \delta P_i = \sum_k \left( \frac{\partial P_i}{\partial q_k^v} \right)_{\bar{C}} \delta q_k^v,$$

e quindi per le (6)<sub>1</sub> segue la (9). Perciò, se esistono configurazioni di equilibrio  $C \in \mathbb{C}$  che hanno per immagine punti  $q = (q_1, \dots, q_l) \in \mathcal{Q} - \partial \mathcal{Q}$ , dalla (2)<sub>1</sub>, con il solito significato dei simboli, saranno caratterizzate dall'aversi

$$(11) \quad \sum_h (Q_h)_C \delta q_h \leq 0,$$

qualunque siano i  $\delta q_h$  tali che risulti ancora  $(q_1 + \delta q_1, \dots, q_l + \delta q_l) \in \mathcal{Q} - \partial \mathcal{Q}$ . L'arbitrarietà dei  $\delta q_h$  in ogni  $\bar{C}$  segue infatti dalla (6), dall'arbitrarietà dei  $\delta q_k^v$  e dalla supposta invertibilità locale delle (6).

In tal modo le eventuali configurazioni di equilibrio in  $\mathbb{C}$  cui corrispondono punti  $q = (q_1, \dots, q_l) \in \mathcal{Q} - \partial \mathcal{Q}$  sono ancora da ricercarsi tra le soluzioni delle equazioni del tipo (3)

$$(3)_1 \quad Q_h(q_1, \dots, q_l) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, l),$$

che soddisfano però le (8) scritte per disequaglianza.

Come esempio si consideri ancora il sistema di Figura 2 usando come parametri lagrangiani la coppia  $(\varphi, \theta)$  (tanto per fissare le ipotesi variabili negli

intervalli  $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ ,  $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ . Dalle (3)<sub>1</sub> scritte in questo caso si ha  $\sin \varphi = 0$ ,  $\sin \theta = 0$ , e quindi le seguenti quattro soluzioni  $(0, 0)$ ,  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, 0)$  e  $(\pi, \pi)$ . Ma mentre le soluzioni  $(0, \pi)$  e  $(\pi, 0)$  verificano le (4) scritte in senso forte e, ciascuna di queste, dà luogo a due configurazioni di equilibrio, ciascuna di esse essendo l'immagine di due configurazioni di  $S$ , le altre due soluzioni  $(0, 0)$  e  $(\pi, \pi)$  non soddisfano le (4) scritte in senso forte, difatti a tali coppie di valori per  $\varphi, \theta$  non corrisponde alcuna configurazione di  $S$ .

Analizziamo adesso cosa può dirsi in generale per le configurazioni  $C \in \mathcal{C}$  che hanno per immagine punti  $q = (q_1, \dots, q_l) \in \partial \mathcal{Q}$ .

Sia  $\Delta \partial \mathcal{Q}$  una parte connessa della frontiera  $\partial \mathcal{Q}$  di  $\mathcal{Q}$  ( $\Delta \partial \mathcal{Q}$  potrebbe essere costituita anche da un solo punto  $q$ ) e siano

$$(12) \quad \Phi_1(q_1, \dots, q_l) = 0, \dots, \Phi_u(q_1, \dots, q_l) = 0, \dots, \Phi_v(q_1, \dots, q_l) = 0,$$

$v$  ( $1 \leq v \leq l$ ) relazioni tra loro indipendenti che caratterizzano in punti  $q = (q_1, \dots, q_l) \in \Delta \partial \mathcal{Q}$ . Sia ora  $\bar{C} \in \mathcal{C}^v$  una delle configurazioni di  $S$  che ha per immagine il punto  $\bar{q} \in \Delta \partial \mathcal{Q}$ , e siano  $\bar{q}_k^v$  i valori che assumono le coordinate lagrangiane libere in  $\bar{C} \in \mathcal{C}^v$ . Scegliamo un  $\bar{\Delta} > 0$  tale che risulti  $(\bar{q}_k^v - \bar{\Delta}, \bar{q}_k^v + \bar{\Delta}) \subset I_k^v$  ( $k=1, \dots, l$ ). Al variare liberamente delle  $q_k^v \in (\bar{q}_k^v - \bar{\Delta}, \bar{q}_k^v + \bar{\Delta})$  si ha un sottoinsieme  $\bar{\Delta} \mathcal{C}^v \subset \mathcal{C}^v$  che contiene sia configurazioni che hanno per immagine punti  $q \in \Delta \partial \mathcal{Q}$  (ad esempio la configurazione  $\bar{C}$  cui corrisponde il punto  $\bar{q} \in \Delta \partial \mathcal{Q}$  in corrispondenza ai valori  $\bar{q}_k^v$  delle coordinate lagrangiane libere) sia configurazioni che hanno per immagine punti  $q \in \mathcal{Q} - \partial \mathcal{Q}$ . Ma per le configurazioni  $C \in \bar{\Delta} \mathcal{C}^v$  cui corrispondono punti  $q \in \mathcal{Q} - \partial \mathcal{Q}$  possiamo, come per la (11), scrivere

$$\delta \mathcal{L} = \sum_h (Q_h(q_1, \dots, q_l))_C \delta q_h.$$

Perciò se, e soltanto se, esistono finiti i limiti

$$(13) \quad \lim_{q_k^v \rightarrow \bar{q}_k^v} Q_h(q_1(q_1^v, \dots, q_l^v), \dots, q_l(q_1^v, \dots, q_l^v)),$$

$$\lim_{q_k^v \rightarrow \bar{q}_k^v} \delta q_h = \lim_{q_k^v \rightarrow \bar{q}_k^v} \sum_k \frac{\partial q_h(q_1^v, \dots, q_l^v)}{\partial q_k^v} \delta q_k^v,$$

( $h = 1, \dots, l$ ) comunque  $q_k^v \rightarrow \bar{q}_k^v$  ( $k = 1, \dots, l$ ) si ha in  $\bar{C}$

$$\delta \mathcal{L} = \sum_h (Q_h(q_1, \dots, q_l))_{\bar{C}} (\delta q_h)_{\bar{C}}.$$

Quindi, dalla (2), se esistono dei punti  $q \in \Delta \partial \mathcal{Q}$  che sono immagini di configurazioni di equilibrio di  $S$ , ed esistono i limiti (13), per le  $q_h$  che costitui-

seono il punto  $q = (q_1, \dots, q_l) \in \Delta\partial\mathcal{Q}$ , deve aversi

$$(14) \quad \sum_n Q_n(q_1, \dots, q_l) \delta q_n \leq 0.$$

Dalla (14) non seguono però equazioni del tipo (3), infatti per  $q \in \Delta\partial\mathcal{Q}$  le  $\delta q_n$  non sono tutte arbitrarie, dovendo ivi le  $q_n$  verificare le (12). In un certo senso si verifica una situazione analoga a quella relativa alle configurazioni di confine o, comunque, che si verifica quando si aggiungono dei vincoli (cfr. [3], vol. I, cap. VI, nn. 7-8, pagg. 299-301) dalle (12) avremo così, per  $q \in \Delta\partial\mathcal{Q}$ ,

$$(15) \quad \sum_n \frac{\Phi_u(q_1, \dots, q_l)}{\partial q_n} \delta q_n = 0 \quad (u = 1, \dots, v).$$

Distinguiamo adesso due casi: (a)  $1 \leq v < l$ , (b)  $v = l$ .

Caso (a). Dalla (15), tenuto conto che le (12) sono tra loro indipendenti, potremo esprimere uno, o più gruppi, di  $v$  variazioni  $\delta q_{n_i}$  ( $i = 1, \dots, v$ ) come funzioni lineari delle rimanenti  $l - v$  variazioni  $\delta q_{n_i}$  ( $i = v + 1, \dots, l$ ). Precisamente avremo tanti possibili gruppi di  $v$  variazioni  $\delta q_{n_i}$  ( $i = 1, \dots, v$ ) esprimibili linearmente per le rimanenti, per quanti sono i minori di ordine  $v$ , a determinante non nullo, estraibili dalla matrice a  $v$  righe ed  $l$  colonne costruita sui coefficienti delle (15).

Sia  $\delta q_{n_i}$  ( $i = 1, \dots, v$ ) uno di tali gruppi, ad esempio l'essesimo, avremo, dalle (15)

$$\delta q_{n_i} = \sum_j^{v+1 \dots l} a_{n_i}^{h_j} \delta q_{n_j}.$$

sostituendo nella (14) avremo una relazione del tipo

$$\sum_j^{v+1 \dots l} G_{n_j}^{(s)}(q_1, \dots, q_l) \delta q_{n_j} \leq 0 \quad \forall \delta q_{n_j},$$

essendo le  $l - v$  variazioni  $\delta q_{n_j}$  ( $j = v + 1, \dots, l$ ) arbitrarie. Da qui si hanno allora le  $l - v$  equazioni

$$(16)_s \quad G_{n_j}^{(s)}(q_1, \dots, q_l) = 0 \quad (j = v + 1, \dots, l),$$

a queste devono poi aggiungersi le  $v$  equazioni (12). Naturalmente di equazioni del tipo (16)<sub>s</sub> ne avremo tante quanti sono i possibili gruppi di varia-

zione  $\delta q_{h_i}$  esprimibili mediante le rimanenti  $l-v$ , ed ad ogni gruppo equazioni del tipo (16)<sub>s</sub> devono sempre aggiungersi le (12). In conseguenza, se  $r$  sono i gruppi distinti di variazioni  $\delta q_{h_i}$  esprimibili in funzione delle rimanenti, avremo  $r$  sistemi

$$(17) \quad G_{h_j}^{(s)}(q_1, \dots, q_l) = 0, \quad \Phi_u(q_1, \dots, q_l) = 0 \quad (s=1, \dots, r; j=v+1, \dots, l; u=1, \dots, v),$$

le soluzioni dei quali individuano i punti  $q = (q_1, \dots, q_l) \in \Delta \partial \mathcal{Q}$  immagini di configurazioni di equilibrio del sistema.

Come esempio si consideri il sistema di Figura 2, dove come parametri si assumono ancora gli angoli  $\varphi$  e  $\theta$ . Abbiamo già visto che per valori di  $\varphi$  e  $\theta$  che verificano in senso forte le (4), tali cioè che  $(\varphi, \theta) \in \mathcal{Q} - \partial \mathcal{Q}$ , si hanno quattro configurazioni di equilibrio di  $\mathcal{S}$ . Vediamo adesso se esistono configurazioni di equilibrio cui corrispondono coppie  $(\varphi, \theta)$  sulla parte  $\Delta \partial \mathcal{Q}$  di frontiera definita dalla prima delle (4) scritta per uguaglianza

$$(4)_1 \quad c \cos \varphi + b \cos \theta = -a.$$

Ora è

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} (cp_1 + 2cp_2 + cp_3) \operatorname{sen} \varphi \delta \varphi + \frac{1}{2} (bp_2 + bp_3) \operatorname{sen} \theta \delta \theta.$$

Da qui, esistendo il limite di  $\delta \mathcal{L}$ , con l'espressione sopra scritta, anche per  $\varphi$  e  $\theta$  che verificano la (4)<sub>1</sub>, per le eventuali configurazioni di equilibrio per le quali è verificata la (4)<sub>1</sub> dovrà aversi

$$(18) \quad (cp_1 + 2cp_2 + cp_3) \operatorname{sen} \varphi \delta \varphi + (bp_2 + bp_3) \operatorname{sen} \theta \delta \theta \leq 0,$$

e, insieme, per la (4)<sub>1</sub>

$$(19) \quad c \operatorname{sen} \varphi \delta \varphi + b \operatorname{sen} \theta \delta \theta = 0.$$

Da quest'ultima esprimendo, per  $\operatorname{sen} \varphi \neq 0$ ,  $\delta \varphi$  in funzione di  $\delta \theta$ , sostituendo nella (18), per l'arbitrarietà di  $\delta \theta$ , si ha, dalla (18) stessa  $\operatorname{sen} \theta = 0$ , (equazione questa del tipo delle (16)<sub>s</sub>), facendo sistema con la (4)<sub>1</sub> si ha l'unica soluzione reale  $\theta = \pi$ ,  $\cos \varphi = -(a-b)/c$ , cui corrispondono due configurazioni di equilibrio con le aste  $AB$  e  $BC$  verticali, al di sotto dell'asse  $x$ , una a destra l'altra a sinistra dell'asse  $z$ . Ancora dalla (19), esprimendo questa volta  $\delta \theta$  in funzione di  $\delta \varphi$ , per  $\operatorname{sen} \theta \neq 0$ , sostituendo nella (18), per l'arbitrarietà di  $\delta \varphi$ , si ha  $\operatorname{sen} \varphi = 0$ , facendo sistema con la (4)<sub>1</sub> otteniamo l'unica soluzione reale  $\varphi = \pi$ ,  $\cos \theta = -(a-c)/b$ , cui corrispondono le due configurazioni di equilibrio con le aste  $CD$  e  $AB$  verticali, al di sotto dell'asse  $x$ ,

una a destra l'altra a sinistra dell'asse  $z$ . Nelle 4 configurazioni di equilibrio cui corrispondono coppie  $(\varphi, \theta)$  sulla parte di frontiera definita dalla (4)<sub>1</sub>, la verticalità dell'asta  $AB$  al di sotto dell'asse  $x$  è imposta proprio dalla (4)<sub>1</sub>, che costituisce come un vincolo aggiunto al sistema, come se il nodo  $B$  fosse obbligato a scorrere sulla retta di equazione  $z = -a$ .

Le 4 configurazioni di equilibrio cui corrispondono coppie  $(\varphi, \theta)$  che verificano la seconda delle (4), e cioè  $c \cos \varphi + b \cos \theta = a$ , si trovano procedendo in modo del tutto analogo.

Resta da esaminare il caso (b) in cui  $v = l$ . Se esistono ancora i limiti (13) le eventuali configurazioni di equilibrio devono ancora verificare la (14). D'altra parte devono pure essere verificate le (15) che, essendo le (12) indipendenti implicano che risulti  $\delta q_h = 0$  ( $h = 1, \dots, l$ ); perciò la (13) è verificata e le configurazioni di equilibrio si trovano in corrispondenza alle soluzioni delle (12) stesse.

Si consideri ancora l'esempio di Figura 2 assumendo come parametri lagrangiani gli eccessi di quota  $z_1$  e  $z_2$ .

L'espressione di  $\delta \mathcal{L}$  è, in tal caso

$$\delta \mathcal{L} = -\frac{1}{2}(p_1 + 2p_2 + p_3) \delta z_1 - \frac{1}{2}(p_2 + p_3) \delta z_2,$$

qualunque sia la coppia  $(z_1, z_2) \in Z$  (l'esagono di Figura 3). Si vede subito che le (3)<sub>1</sub> non hanno soluzioni, non esistono quindi punti  $(z_1, z_2)$  interni all'esagono immagini di configurazioni di equilibrio di  $S$ , essendo i coefficienti di  $\delta z_1$  e di  $\delta z_2$  delle costanti diverse da zero, Avremo  $\delta \mathcal{L} = 0$  soltanto se, contemporaneamente, è  $\delta z_1 = 0$  e  $\delta z_2 = 0$ , ciò che si verifica necessariamente soltanto nei vertici dell'esagono, come si vede scrivendo le (5) per uguaglianza. Non si hanno configurazioni di equilibrio che abbiano per immagine punti dei lati dell'esagono che non siano i vertici.

Ovviamente per forze conservative, come negli esempi, può seguirsi il metodo della ricerca dei massimi e minimi condizionati, cosa che però non si può fare per forze non conservative.

### Bibliografia

- [1] C. CATTANEO e G. TEDONE, *Elementi di statica grafica*, Pellegrini, Pisa 1961.
- [2] C. GODBILLON, *Géométrie différentielle et Mécanique analytique*, Hermann, Paris 1969.
- [3] T. LEVI CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Nuova Ed. Zanichelli, Bologna 1950.
- [4] A. PIGNEDOLI, *Complementi di Statistica*, Cedam, Padova 1966.

- [5] G. SANSONE e R. CONTI, *Lezioni di analisi matematica*, X Ed. Cedam, Padova 1966.
- [6] A. SIGNORINI, *Meccanica razionale con elementi di statica grafica*, II Ed. Perrella, Roma 1954.

### S u m m a r y

*In the traditional approach to Analytical Mechanics it is usually assumed that we can embrace all possible configurations of a system constrained by holonomic constraints (that is its configuration-set  $\mathcal{C}$ ) with the aid of  $l$  independent quantities  $q_1, \dots, q_l$  (here  $l$  is the number of degrees of freedom) which are the so called generalized or Lagrangian, coordinates of the system. In other words, a one-to-one correspondence is established between the possible configurations  $C \in \mathcal{C}$  of the system and the points of a certain region in the  $l$ -dimensional coordinate space  $(q_1, \dots, q_l)$ .*

*However, in general it is not possible to give a unique coordinate representation of the set  $\mathcal{C}$  in such a way that  $(q_1, \dots, q_l) \in \mathbf{I}_1 \times \dots \times \mathbf{I}_l \subset \mathbf{R}^l$  where each  $\mathbf{I}_h$  is an open interval of  $\mathbf{R}$ . In reality this becomes possible if we use several coordinates representations  $(q_1^v, \dots, q_l^v)$  each of which maps a subset  $\mathcal{C}^v \subset \mathcal{C}$  over an open rectangle  $\mathbf{I}_1^v \times \dots \times \mathbf{I}_l^v \subset \mathbf{R}^l$ ,  $v = 1, \dots, N$ .*

*Our aim, in this paper, is to show that if the Lagrangian coordinates are not used in the correct way, that is by choosing the « appropriate representation »  $(q_1^v, \dots, q_l^v)$  if we are working in the subset  $\mathcal{C}^v$  of the configuration set  $\mathcal{C}$ , then the well known equations  $Q_h = 0$  give not necessarily all the equilibrium positions of the system. Let us emphasize that, as we show through the paper the most simple examples of systems by holonomic constraints require an attentive examination of the set  $\mathcal{C}$ . In general, the problem of choosing the « appropriate » subsets is difficult. It is for this reason that we show how, also in the framework of the traditional approach in which, as we have said, a unique parameter representation of  $\mathcal{C}$  is used (which locally restricts to correct Lagrangian coordinates), we can get all the equilibrium positions from the well known condition  $\delta\alpha \leq 0$ .*

\* \* \*