Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 847-853

R. CONTI (*)

Equazioni differenziali lineari asintoticamente equivalenti a $\dot{x} = 0$ (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Consideriamo l'equazione differenziale ordinaria lineare

$$\text{(A)} \qquad \dot{x} - A(t)x = 0 ,$$

dove $A: t \mapsto A(t)$ è una funzione definita per $t \in J =]\alpha, \omega[$, $-\infty \leqslant \alpha < \omega \leqslant +\infty$, con valori $A(t) \in \mathfrak{C}^{n\times n}$ (matrici $n \times n$ complesse), continua.

Soluzione di (A) è ogni funzione $x: t \mapsto x(t)$ definita in J, con valori $x(t) \in \mathfrak{C}^n$, di classe $C^1(J)$, tale che

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} - A(t)x(t) = 0 , \qquad t \in J .$$

Indichiamo con E_A: $(t, \tau) \mapsto E_A(t, \tau)$ l'operatore di evoluzione associato ad A (cfr. ad es. [**2**]), ossia la funzione con valori $E_A(t, \tau) \in \mathfrak{C}^{n\times n}$, definita in $J \times J$ dalla

$$\text{(1.1)} \qquad E_A(t, \tau) = \lim_k \Big[I + \int_\tau^t A(t_1)\,\mathrm{d}t_1 + \ldots$$
$$\ldots + \int_\tau^t \ldots \int_\tau^{t_{k-1}} A(t_1) \ldots A(t_k)\,\mathrm{d}t_k \ldots \mathrm{d}t_1 , \qquad (t, \tau) \in J \times J ,$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « U. Dini », Università, Viale Morgagni 67/a, 50139 Firenze, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 26-IV-1979.

I matrice $n \times n$ unità.

Diciamo che E_A è *$\mathscr{C}$-convergente* se esiste

$$E_A(\omega, \tau) = \lim_{t \to \omega} E_A(t, \tau)\,, \qquad \det E_A(\omega, \tau) \neq 0\,, \tag{1.2}$$

per (un, e quindi per) ogni $\tau \in J$.

Ciò significa che ogni soluzione $x\colon t \mapsto x(t)$ di (A) ha limite χ per $t \to \omega$ e, inversamente, per ogni $\chi \in \mathfrak{C}^n$ esiste una sola soluzione x di (A) che tende a χ per $t \to \omega$.

Pertanto si può dire che (A) è asintoticamente equivalente a

$$\dot{x} = 0\,. \tag{O}$$

Indichiamo con $\mathscr{C}$ la classe delle A per cui vale (1.2). Ovviamente $\mathrm{O} \in \mathscr{C}$ e se A è costante $\mathscr{C} = \{\mathrm{O}\}$. Inoltre

$$A \in \mathscr{C} \Leftrightarrow -A^* \in \mathscr{C}\,,$$

A^* trasposta coniugata di A.

Diciamo che A, B sono *$\mathscr{C}$-equivalenti* e scriviamo $A \sim B$ se esiste $L\colon t \mapsto L(t)$, definita in J, con valori $L(t) \in \mathfrak{C}^{n\times n}$, di classe $C^1(J)$, tale che

$$\int_\tau^\omega |\dot{L}(t) - A(t)L(t) + L(t)B(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty \tag{1.3}$$

per (un, e quindi per) ogni $\tau \in J$, e tale che esistano

$$L(\omega) = \lim_{t\to\omega} L(t)\,, \qquad L^{-1}(\omega) = \lim_{t\to\omega} L^{-1}(t)\,. \tag{1.4}$$

La $\mathscr{C}$-equivalenza è un'effettiva relazione di equivalenza tra le $A\colon t \mapsto A(t)$ continue in J.

In particolare ($L = I$) si ha

$$\int_\tau^\omega |A(t) - B(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty \Rightarrow A \sim B\,. \tag{1.5}$$

Vale il

Teorema A. *$\mathscr{C}$ è la classe di $\mathscr{C}$-equivalenza di* O, *ossia $A \in \mathscr{C}$ se e solo se esiste L soddisfacente* (1.4) *tale che*

$$\int_\tau^\omega |\dot{L}(t) - A(t)L(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty\,, \tag{1.6}$$

oppure

$$\int_{\tau}^{\omega} |\dot{L}(t) + L(t)A(t)|\,dt < +\infty\,. \tag{1.7}$$

Dim. Se $A \in \mathscr{C}$, L definita da $L(t) = E_A(t, \tau)$, con $\tau \in J$ fissato ad arbitrio, soddisfa (1.4) ed è $\dot{L}(t) - A(t)L(t) = O$, quindi L soddisfa (1.6), ossia $A \sim O$.

Inversamente, sia $A \sim O$. Supponiamo che valga (1.7) con L soddisfacente (1.4). Allora esiste $l(\theta) > 0$ tale che

$$\alpha < \theta \leqslant \tau \leqslant t \Rightarrow |L^{-1}(t)|\,,\quad |L(\tau)| < l(\theta)\,.$$

Dalla identità

$$E_A(t, \tau) = L^{-1}(t)L(\tau) + L^{-1}(t)\int_{\tau}^{t}[\dot{L}(s) + L(s)A(s)]\,E_A(s, \tau)\,ds\,, \tag{1.8}$$

di facile verifica, applicando il lemma di Gronwall, si ricava, tenuto conto di (1.7),

$$\alpha < \theta \leqslant \tau \leqslant t \Rightarrow |E_A(t, \tau)| < e(\theta)\,, \qquad \text{con } e(\theta) > 0\,. \tag{1.9}$$

Ancora da (1.8), sempre per il lemma di Gronwall e tenuto conto di (1.4), (1.7), (1.9), si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\theta_\varepsilon \in J$ tale che

$$\alpha < \theta_\varepsilon \leqslant \tau \leqslant t' \leqslant t'' \Rightarrow |E_A(t'', \tau) - E_A(t', \tau)| < \varepsilon\,,$$

quindi esiste $E_A(\omega, \tau)$. Da (1.8) per $t \to \omega$ si ha

$$E_A(\omega, \tau) = L^{-1}(\omega)L(\tau) + L^{-1}(\omega)\int_{t}^{\omega}[\dot{L}(s) - L(s)A(s)]\,E_A(s, \tau)\,ds\,.$$

In virtù di (1.4), (1.7), (1.9), per $\tau \to \omega$ il primo termine tende ad I, il secondo a O, quindi $E_A(\omega, \tau)$ tende a I e pertanto $\det E_A(\omega, \tau) \neq 0$. Dunque $A \in \mathscr{C}$.

2. – Indichiamo con $\mathscr{R}$ la classe delle A per cui esiste

$$A^{\omega}(t) = \int_{t}^{\omega} A(s)\,ds = \lim_{T \to \omega}\int_{t}^{T} A(s)\,ds. \tag{2.1}$$

$\mathscr{R}$ e $\mathscr{C}$ sono indipendenti, ossia esistono $A \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{R}$ ed esistono $A \in \mathscr{R} \setminus \mathscr{C}$ **[5]**$_2$.

Tuttavia in tutti i criteri noti di $\mathscr{C}$-convergenza compare l'ipotesi $A \in \mathscr{R}$, a cominciare dal più noto [**1**], [**2**]

$$\int_t^\omega |A(s)|\,ds < +\infty \Rightarrow A \in \mathscr{C}\,, \tag{2.2}$$

dove $A \in \mathscr{R}$ è contenuta implicitamente.

Il criterio (2.2) si ricava immediatamente dal Teorema A usando $L = I$ nella (1.6) o nella (1.7), indifferentemente.

Nel seguito, per brevità, indicheremo con $\mathscr{L}$ la classe delle A tali che

$$\int_t^\omega |A(s)|\,ds < +\infty\,.$$

Se A è un matrice diagonale allora $A \in \mathscr{R} \Rightarrow A \in \mathscr{C}$, poichè se A è diagonale si ha

$$E_A(t, \tau) = \exp\Big(\int_\tau^t A(s)\,ds\Big)\,. \tag{2.3}$$

Data $A \in \mathscr{R}$ se $\operatorname{diag} A$ indica la matrice diagonale i cui elementi diagonali sono gli stessi di A, si ha [**5**]$_3$

$$A \in \mathscr{R}\,, \qquad A - \operatorname{diag} A \in \mathscr{L} \Rightarrow A \in \mathscr{C}\,. \tag{2.4}$$

Questo criterio si ottiene osservando che $A \in \mathscr{R} \Rightarrow \operatorname{diag} A \in \mathscr{R} \Rightarrow \operatorname{diag} A \in \mathscr{C}$, mentre vale (1.5) con $B = \operatorname{diag} A$.

Un altro criterio di $\mathscr{C}$-convergenza è il seguente [**5**]$_2$, [**3**]

$$A \in \mathscr{R}\,, \qquad A^\omega A \in \mathscr{L} \Rightarrow A \in \mathscr{C}\,. \tag{2.5}$$

Questo si ottiene dal Teorema A usando la (1.7) con $L = I + A^\omega$.

L'ipotesi $A^\omega A \in \mathscr{L}$ non implica $AA^\omega \in \mathscr{L}$ come mostra l'esempio di

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^{-1}\log^{-2} t & 0 \\ t^{-1}\operatorname{sen} t & 0 \end{pmatrix}, \qquad J =]1, +\infty[\,.$$

Ciononostante si ha [**5**]$_2$

$$A \in \mathscr{R}\,, \qquad AA^\omega \in \mathscr{L} \Rightarrow A \in \mathscr{C}\,, \tag{2.6}$$

che discende dal Teorema A usando (1.6) con $L = I - A^\omega$ (o anche osservando che $A \in \mathscr{R}$, $AA^\omega \in \mathscr{L}$ equivale a $-A^* \in \mathscr{R}$, $(-A^*)^\omega(-A^*) \in \mathscr{L}$ e quindi implica $-A^* \in \mathscr{C}$ per (2.5)).

A sua volta $AA^\omega \in \mathscr{L}$ non implica $A^\omega A \in \mathscr{L}$ come mostra l'esempio di

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} \operatorname{sen} t & 0 \\ t^{-1} \log^{-2} t & 0 \end{pmatrix}, \qquad J =]1, +\infty[,$$

quindi (2.5), (2.6) sono fra loro indipendenti.

Se $A \in \mathscr{R}$, posto $L(t) = \exp(-A^\omega(t))$ si ha $L(\omega) = L^{-1}(\omega) = I$ ed inoltre [**3**]

$$\dot{L}(t) - A(t)\,L(t) = \Sigma(t)\,L(t) ,$$

dove

$$\Sigma(t) = \frac{1}{2!}[-A^\omega(t), A(t)] + \frac{1}{3!}[-A^\omega(t), [-A^\omega(t), A(t)]] + \dots$$

$$[M, N] = MN - NM .$$

Dal Teorema A, usando $L = \exp(-A^\omega)$ nella (1.6) segue [**3**]

$$A \in \mathscr{R}, \qquad \Sigma \in \mathscr{L} \Rightarrow A \in \mathscr{C} . \tag{2.7}$$

In particolare [**3**]

$$A \in \mathscr{R}, \qquad A^\omega A - AA^\omega \in \mathscr{L} \Rightarrow A \in \mathscr{C} . \tag{2.8}$$

L'ipotesi $A^\omega A - AA^\omega \in \mathscr{L}$ non implica $A^\omega A \in \mathscr{L}$, nè $AA^\omega \in \mathscr{L}$, come mostra l'esempio di

$$A(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t^2 & 0 \\ e^{-t} & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \mathfrak{R} .$$

Ovviamente, se valgono due delle relazioni

$$A^\omega A \in \mathscr{L}, \qquad AA^\omega \in \mathscr{L}, \qquad A^\omega A - AA^\omega \in \mathscr{L},$$

allora vale anche la rimanente.

Ciò si verifica, in particolare, se $A \in \mathscr{L}$, oppure se

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} &A \in \mathscr{R}\,, \qquad \int_t^\omega |A(s)|^p\,ds < +\infty\,, \qquad p > 1\,,\\ &\qquad\qquad\ \int_t^\omega |A^\omega(s)|^q\,ds < +\infty\,, \qquad q = p/(p-1)\,, \end{aligned}$$

oppure se

$$(2.10)\qquad A \in \mathscr{R}\,, \qquad A(t) = O(1)\,, \qquad A^\omega \in \mathscr{L}\,.$$

Pertanto, sia il criterio (2.2), sia ciascuno dei due [**5**]$_1$

$$(2.11)\qquad (2.9) \Rightarrow A \in \mathscr{C}\,,$$

$$(2.12)\qquad (2.10) \Rightarrow A \in \mathscr{C}\,,$$

è un caso particolare di ciascuno dei criteri (2.5), (2.6), (2.8).

Si noti che le ipotesi $A \in \mathscr{L}$, (2.9), (2.10), sono a due a due indipendenti fra loro. Tuttavia $A \in \mathscr{L}$ e (2.10) si possono considerare come casi limite di (2.9) corrispondenti rispettivamente a $p = 1$, $p = +\infty$.

Sia $A \in \mathscr{R}$. Se anche $A^\omega A \in \mathscr{R}$ poniamo $S_1 = A^\omega A$, se anche $S_1^\omega A \in \mathscr{R}$ poniamo $S_2 = S_1^\omega A$ e, in generale, $S_{k+1} = S_k^\omega A$, $S_0 = A$.

Posto ancora

$$L = I + A^\omega + S_1^\omega + \ldots + S_k^\omega\,,$$

si ha $\dot{L} + LA = S_{k+1}$. Pertanto dal Teorema A, usando la (1.7) segue [**3**]

$$(2.13)\qquad S_0 = A\,,\quad S_1 = S_0^\omega A\,,\quad \ldots,\quad S_k = S_{k-1}^\omega A \in \mathscr{R}\,,\quad S_k^\omega A \in \mathscr{L} \Rightarrow A \in \mathscr{C}\,.$$

Simmetricamente, posto

$$L = I - A^\omega + D_1^\omega - \ldots + (-1)^{k+1} D_k^\omega\,,$$

con $D_1 = AA^\omega$, $D_2 = AD_1^\omega$, etc. si ha $\dot{L} - AL = (-1)^k D_{k+1}$ e dalla (1.6) segue

$$(2.14)\qquad D_0 = A\,,\quad D_1 = AD_0^\omega,\quad \ldots,\quad D_k = AD_{k-1}^\omega \in \mathscr{R}\,,\quad AD_k^\omega \in \mathscr{L} \Rightarrow A \in \mathscr{C}\,.$$

Per $k = 0$ si riottengono da (2.13), (2.14), rispettivamente (2.5), (2.6).

Bibliografia

[1] M. Bôcher, *On regular singular points*, Trans. Amer. Math. Soc. **1** (1900), 40-52.

[2] R. Conti, *Linear differential equations and control*, Acad. Press 1976.

[3] J. D. Dollard and Ch. N. Friedman, *Asymptotic behavior of solutions of linear ordinary differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **66** (1978), 394-398.

[4] O. Dunkel, *Regular singular points of a system of homogeneous linear differential equations of the first order*, Proc. Amer. Acad. Sci. Arts **38** (1902), 341-370.

[5] A. Wintner: $[\cdot]_1$ *On linear asymptotic equilibria*, Amer. J. Math. **71** (1949), 853-858; $[\cdot]_2$ *On a theorem of Bôcher in the theory of ordinary linear differential equations*, Amer. J. Math. **76** (1954), 183-190; $[\cdot]_3$ *Addenda to the paper on Bôcher's theorem*, Amer. J. Math. **78** (1956), 895-897.

* * *