Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 879-884

ALDO ASCARI (*)

Sulla determinazione della soluzione periodica dell'equazione di diffusione con sorgente periodica (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. – Richiamiamo un noto risultato della teoria delle equazioni paraboliche. Per la funzione $u(x, t)$ definita in $[0, L]\times[0, \infty)$ si consideri l'equazione di diffusione (unidimensionale)

$$u_t = u_{xx} \tag{1}$$

con le condizioni al contorno

(2) $u(0, t) = f_0(t)$, (3) $u(L, t) = f_1(t)$,

dove f_0, f_1, assegnate, sono periodiche di *eguale* periodo T (e sono, poniamo, continue; per le condizioni più generali di validità si veda ad es. [**1**]).

È noto che la (1) ammette una e una sola soluzione di periodo T in t, obbediente alle (2), (3). Il caso particolare $L \to \infty$, $f_1 \equiv 0$ è il classico problema delle oscillazioni della temperatura nel suolo, risolto da Fourier; rammentiamo per comodità la sua semplice ed elegante soluzione, quantunque sia reperibile in numerosi testi di Fisica Matematica (v. p. es. [**2**], [**3**]). Si assume in primo luogo

$$f_0(t) = A \cos \omega t \qquad (\omega = 2\pi/T), \tag{4}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Ricevuto: 6-XI-1979.

o più speditamente

$$f_0(t) = A\, e^{i\omega t} \qquad (A \text{ reale})$$

e si cerca una soluzione della forma

$$u(x, t) = A\, e^{\lambda x + \mu t}. \tag{5}$$

La semplice sostituzione di questa nelle (1), (2) e l'uso della (4), determinano la soluzione nella forma

$$u(x, t) = A\, e^{-\sqrt{\omega/2}\,x} \cos\left(\sqrt{\omega/2}\,x + \omega t\right); \tag{6}$$

risultato a cui si perverrebbe anche ponendo più generalmente, in luogo della (5),

$$u(x, t) = v(x)\, e^{\mu t}.$$

Ovviamente, la soluzione (6) può poi essere estesa, mediante sovrapposizione di armoniche, al caso in cui la $f_0(t)$ sia esprimibile mediante una somma di termini del tipo (4), con $\omega = 2\pi n/T$ $(n = 1, 2, \ldots)$, in numero finito od anche, sotto condizioni sufficienti ben note, in numero infinito.

Sfortunatamente, questo sbrigativo procedimento non è applicabile al caso in cui, al posto delle (2), (3), debbano essere imposte condizioni al contorno di tipo « misto », pur così frequenti nelle applicazioni

$$(7) \quad u(0, t) - b_0 u_x(0, t) = f_0(t), \qquad (8) \quad u(L, t) - b_L u_x(L, t) = f_1(t),$$

con b_0, b_L costanti non entrambe nulle; infatti, ad esempio, nel caso particolare del problema di Fourier, servendosi ancora delle posizioni (4) e (5), si perviene questa volta alle relazioni

$$\mu = \lambda^2, \qquad (1 - b_0 \lambda)\, e^{\mu t} = e^{i\omega t},$$

che non possono essere verificate insieme, per ogni t, da alcuna coppia di valori di λ, μ. La teoria garantisce che anche con le condizioni (7), (8) la (1) ha una e una sola soluzione di periodo T; di tale soluzione faremo ora una determinazione analitica, formalmente un pò meno semplice di quella, sopra rammentata, relativa al caso della condizione (2), ma concettualmente altrettanto elementare. Come tale, essa è soggetta a condizioni di validità che si formulano in un ambito del tutto classico e notorio; e pertanto non ci preoccuperemo di enunciarle esattamente.

2. – Trasformiamo il problema (1) (7) (8) in un problema a condizioni al contorno omogenee, trasferendo la non omogeneità delle (7), (8) in un termine di sorgente (di eguale periodo) per l'equazione di diffusione. Ciò può essere fatto in vari modi; il più semplice è forse quello di assumere, come nuova funzione incognita,

$$v(x,t) = u(x,t) + xg(t) + h(t)\,, \tag{9}$$

dove

$$g(t) = \frac{1}{L + b_0 - b_L}\,[f_0(t) - f_1(t)]\,, \tag{10}$$

$$h(t) = \frac{1}{L + b_0 - b_L}\,[(b_L - L)f_0(t) - b_0 f_1(t)]\,. \tag{11}$$

Come si vede, questa trasformazione è inapplicabile se $b_L - b_0 = L$; in tal caso basta ad esempio porre un termine quadratico in x nella (9), in luogo di quello lineare. Poniamo ora

$$\varphi(x,t) = xg'(t) + h'(t)\,; \tag{12}$$

ciò implica di ammettere f_0, f_1 anche dotate di derivata prima (continua). Con le posizioni (9)-(12) il problema (1) (7) (8) diventa

$$v_t = v_{xx} + \varphi(x,t)\,, \tag{13}$$

(14) $\quad v(0,t) - b_0 v_x(0,t) = 0\,,\qquad$ (15) $\quad v(L,t) - b_L v_x(L,t) = 0$

e a questo punto, per includere nel discorso anche i problemi che possono presentarsi direttamente in questa forma, ammetteremo che nella (13) la $\varphi(x,t)$, mentre è periodica di periodo T in t, abbia da x una dipendenza del tutto generale (salvo le condizioni che potranno essere imposte più avanti), anzichè la semplice forma lineare (12).

Sia ora $w(x)$ una funzione obbediente all'equazione differenziale

$$w'' + \lambda^2 w = 0 \qquad \text{in } [0, L]$$

ed a condizioni al contorno formalmente eguali alle (14), (15), cioè

$$w(0) - b_0 w'(0) = 0\,, \qquad w(L) - b_L w'(L) = 0\,.$$

Di questo problema di Sturm-Liouville si determinano elementarmente gli autovalori λ_n e le autofunzioni $w_n(x)$; queste costituiscono in $[0, L]$ un sistema ortogonale completo (che supporremo anzi ortonormale). Poniamo allora, con consueto procedimento,

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) w_n(x) , \tag{16}$$

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) w_n(x) , \tag{17}$$

ed ammettiamo che, come funzione di x, $\varphi(x, t)$ sia a quadrato sommabile in $[0, L]$. Ciò garantisce almeno la convergenza in media della serie (17); se poi φ è almeno continua a tratti, la (16) riuscirà assolutamente e uniformemente convergente in $[0, L]$.

Supponendo comunque verificate le ipotesi che legittimano le operazioni via via eseguite, ricaviamo dalla (16)

$$v_t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t) w_n(x) , \qquad v_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) w_n''(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 a_n(t) w_n(x)$$

e sostituendo queste e la (17) nella (13) otteniamo un'equazione lineare del primo ordine per il generico coefficiente $a_n(t)$

$$a_n'(t) = - \lambda_n^2 a_n(t) + c_n(t) . \tag{18}$$

Poichè $\varphi(x, t)$ è di periodo T in t per ogni x, di eguale periodo dev'essere ogni $c_n(t)$; ammettiamo che ciascuno di questi coefficienti sia dotato dello sviluppo di Fourier

$$c_n(t) = \beta_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{nk} \sin k\omega t$$

(dove è sempre $\omega = 2\pi/T$). Tenendo conto di questo sviluppo, applichiamo alla (18) la trasformazione di Laplace, scrivendo

$$A_n(p) = \mathscr{L}\{a_n(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} a_n(t)\, dt ;$$

otteniamo

$$A_n(p) = \frac{1}{p + \lambda_n^2} \Big\{a_n(0) + \frac{\beta_{n0}}{p} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} \frac{p}{p^2 + k^2\omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{nk} \frac{k\omega}{p^2 + k^2\omega^2}\Big\} . \tag{19}$$

3. – La determinazione della soluzione periodica del problema (13) (14) (15) è ricondotta, mediante la (19), a quella degli $a_n(0)$, cioè della distribuzione iniziale $v(x, 0)$ che individua tale soluzione. L'espressione cercata degli $a_n(0)$ relativi alla soluzione periodica si ottiene con una semplice manipolazione algebrica della (19), e tenendo presente la forma che i suoi termini verranno poi ad assumere mediante antitrasformazione di Laplace.

Sussistono le identità elementari ($c \neq 0$)

$$\frac{1}{p}\frac{1}{p+c} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+c}\right), \qquad \frac{1}{p+c}\frac{1}{p^2+q^2} = \frac{1}{c^2+q^2}\left(-\frac{c}{p+c} + \frac{cp+p^2}{p^2+q^2}\right),$$

$$\frac{1}{p+c}\frac{1}{p^2+q^2} = \frac{1}{c^2+q^2}\left(\frac{1}{p+c} - \frac{p-c}{p^2+q^2}\right).$$

In forza di esse, e sotto le ipotesi che consentono le varie operazioni sulle serie, la (19) può essere riscritta

$$A_n(p) = \frac{\beta_{n0}}{\lambda_n^2}\frac{1}{p} + \left[a_n(0) - \frac{\beta_{n0}}{\lambda_n^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-\lambda_n^2\beta_{nk} + k\omega\gamma_{nk}}{\lambda_n^4 + k^2\omega^2}\right]\frac{1}{p+\lambda_n^2}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2\beta_{nk} - k\omega\gamma_{nk}}{\lambda_n^4 + k^2\omega^2}\frac{p}{p^2+k^2\omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2\omega^2\beta_{nk} + k\omega\lambda_n^2\gamma_{nk}}{\lambda_n^4 + k^2\omega^2}\frac{1}{p^2+k^2\omega^2}. \tag{20}$$

Se in questa espressione di $A_n(p)$ è nullo il termine in $1/(p+\lambda_n^2)$, cioè è

$$a_n(0) = \frac{\beta_{n0}}{\lambda_n^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2\beta_{nk} - k\omega\gamma_{nk}}{\lambda_n^4 + k^2\omega^2}, \tag{21}$$

per antitrasformazione si ottiene

$$a_n(t) = \frac{\beta_{n0}}{\lambda_n^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2\beta_{nk} - k\omega\gamma_{nk}}{\lambda_n^4 + k^2\omega^2}\cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\omega\beta_{nk} + \lambda_n^2\gamma_{nk}}{\lambda_n^4 + k^2\omega^2}\sin k\omega t,$$

palesemente periodica di periodo $T = 2\pi/\omega$. Lo stesso è quindi vero per la corrispondente espressione (16) di $v(x, t)$, e poichè la soluzione periodica è unica, la (21) risolve il problema. Se invece almeno uno dei coefficienti $a_n(0)$ ha un valore diverso dal (21), nella corrispondente espressione di $a_n(t)$ è presente il termine in $e^{-\lambda_n^2 t}$, e la soluzione non è periodica.

4. – Terminiamo osservando che il metodo indicato per determinare la soluzione periodica dell'equazione di diffusione (13) con termine di sorgente periodico è applicabile anche quando il problema si presenta in più dimensioni; ossia quando, in luogo della (13), è data l'equazione

$$v_t = \nabla^2 v + \varphi(\boldsymbol{r}, t),$$

dove $v(\boldsymbol{r}, t)$ e $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ (quest'ultima periodica di periodo T in t) sono definite, come funzioni di $\boldsymbol{r}$, in un dominio chiuso D (regolare) di $\boldsymbol{R}^m$ $(m \geqslant 2)$ sulla cui frontiera è imposta una condizione lineare omogenea, in generale « mista », cioè l'annullarsi di una combinazione lineare di v e della sua derivata normale. È sufficiente saper costruire il sistema ortogonale completo di autofunzioni $w_n(\boldsymbol{r})$ ottenibile risolvendo l'equazione di Helmholtz $\nabla^2 w + \lambda^2 w = 0$ nello stesso dominio e con la stessa condizione al contorno; per mezzo di tali autofunzioni si scrivono allora sviluppi di $v(\boldsymbol{r}, t)$, $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ analoghi agli sviluppi (16), (17) e tutto procede come nel caso unidimensionale.

Bibliografia

[1] J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris **1** (1968).

[2] E. Persico, *Introduzione alla Fisica Matematica*, Zanichelli, Bologna 1967.

[3] A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, Pergamon Press 1963.

Riassunto

È indicato un procedimento per la determinazione della soluzione periodica dell'equazione (lineare) di diffusione, con termine di sorgente periodico (oppure, equivalentemente, con condizioni al contorno periodiche), quando tale soluzione non sia nota in alcun istante assumibile come « iniziale ». Il procedimento, fondato sulla trasformazione di Laplace, può essere usato in alcuni casi nei quali non è applicabile la classica soluzione di Fourier del problema delle oscillazioni di temperatura nel suolo.

* * *