Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 65-71

SILVANA MARCHI (*)

Alcune proprietà su insiemi di funzioni as-quasi periodiche (**)

Introduzione

Riprendendo il concetto di asintotica quasi periodicità per funzioni continue dato da Fréchet [4] (brev. as-quasi periodicità), e tenendo presenti noti criteri di as-quasi periodicità (v. [4], [5], [6]), in questa Nota si individuano tre proprietà per un *insieme* $\mathscr{B}$ di funzioni uniformemente continue $y(t) \in (R^n)^I$, $(I = [0, +\infty))$, $(R = (-\infty, +\infty))$. Queste proprietà risultano fra loro equivalenti e conducono, in ipotesi aggiuntive, a condizioni di equi-as-quasi periodicità o di equi-quasi periodicità per le funzioni di $\mathscr{B}$.

Così, se $y(t)$ è soluzione as-quasi periodica di un sistema differenziale periodico di periodo $\tau > 0$, le funzioni d'accumulazione dell'insieme $\{y(t+\nu t)\}$ $(\nu = 1, 2, ...)$ sono tutte soluzioni equi-quasi periodiche del sistema differenziale in esame.

1 - Le proprietà $\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{G}$

Definizioni. Sia $A_{+\infty}$ l'insieme di tutte e sole le funzioni $y(t) \in (R^n)^I$, uniformemente continue, e sia $\mathscr{B}$ un arbitrario sottoinsieme di $A_{+\infty}$.

Proprietà $\mathscr{P}$. – L'insieme $\mathscr{B}$ ha la proprietà $\mathscr{P}$ se, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, esiste un $l=l(\varepsilon)>0$, e, se $y(t) \in \mathscr{B}$, esiste un $T(\varepsilon, y) \geqslant 0$ tali che, per ogni $a \in I$, l'intervallo $[a, a + l]$ contiene almeno un $\tau_\varepsilon = \tau_\varepsilon(\varepsilon, l, a)$, in corrispondenza al quale si ha $|y(t + \tau_\varepsilon) - y(t)| < \varepsilon$ per $t \geqslant T(\varepsilon, y)$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Ricevuto: 19-VII-1978.

Proprietà $\mathscr{L}$. – L'insieme $\mathscr{B}$ ha la proprietà $\mathscr{L}$ se ogni successione divergente di numeri reali positivi $\{h_k\}$ contiene almeno una successione $\{h_{k_j}\}$ tale che, per ogni $y(t) \in \mathscr{B}$, la successione di funzioni $y(t + h_{k_j})$ converge uniformemente in I.

Proprietà $\mathscr{G}$. – L'insieme $\mathscr{B}$ ha la proprietà $\mathscr{G}$ se esiste un numero $\tau > 0$, in corrispondenza al quale ogni sottosuccessione della $\{\nu\tau\}$ $(\nu = 1, 2, \dots)$ contiene almeno una sottosuccessione $\{\nu_k\tau\}$ tale che per ogni $y(t) \in \mathscr{B}$, la successione di funzioni $\{y(t + \nu_k \tau)\}$ converge uniformemente in I.

2 - Equivalenza delle proprietà $\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{G}$

2.1 – (A) $\mathscr{P} \to \mathscr{L}$.

Osservazione preliminare. Se $y(t)$ è una qualunque funzione di un insieme $\mathscr{B}$ che goda, per ipotesi, della proprietà $\mathscr{P}$, esistono (v. [**5**], § **3**), due funzioni $p(t)$ e $q(t)$ tali che $y(t) = p(t) + q(t)$, $p(t)$ quasi periodica e $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t) = 0$; inoltre (cfr. Proprietà $\mathscr{P}$) sarà $|p(t + \tau_\varepsilon) - p(t)| < \varepsilon$ per $t \geqslant 0$.

Invero (cfr. Proprietà $\mathscr{P}$) per $\varepsilon_k > 0$ $(k = 1, 2, \dots)$, esistono un $l_k > 0$ ed un $T_k > 0$ tali che ogni intervallo $[k, k + l_k]$ contiene un τ_k per cui

$$\text{(i)} \qquad |y(t + \tau_k) - y(t)| < \varepsilon_k \quad \text{quando } t \geqslant T_k .$$

Poichè $\tau_k > k$, $\tau_k \to +\infty$ quando $k \to +\infty$, la successione $\{y(t + \tau_k)\}$ contiene una successione $\{y(t + \tau_{k_j})\}$ che converge verso una funzione $p^*(t)$, uniformemente in I. La funzione $p^*(t)$ è quasi periodica (cfr. [**5**], th. 3.8); inoltre, fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, si ha (cfr. Proprietà $\mathscr{P}$)

$$\text{(ii)} \qquad |y(t + \tau_{k_j} + \tau_\varepsilon) - y(t + \tau_{k_j})| < \varepsilon \text{ per } t \geqslant T(\varepsilon, y) - \tau_{k_j} .$$

Ora, comunque si fissi $t \in R$, esiste certamente un indice j_t tale che, per $j > j_t$, risulti $t \geqslant T(\varepsilon, y) - \tau_{k_j}$. Passando al limite su (ii) per $j \to +\infty$, si ha così $|p^*(t + \tau_\varepsilon) - p^*(t)| \leqslant \varepsilon$ per ogni $t \in R$. La dimostrazione è così conclusa una volta provata l'identità

$$\text{(iii)} \qquad p^*(t) = p(t) \text{ per ogni } t \geqslant 0.$$

Si assuma per questo $\varepsilon_k \to 0$ quando $k \to +\infty$. Sia η_{k_j} definito da

$$\text{(iv)} \qquad \eta_{k_j} = \operatorname*{Sup.}_{t \geqslant 0} |y(t + \tau_{k_j}) - p^*(t)| .$$

Allora $\eta_{k_j} \to 0$ quando $j \to +\infty$. Posto $q^*(t) = y(t) - p^*(t)$ per $t \geqslant 0$, si ha $|q^*(t)| \leqslant |y(t) - y(t + \tau_{k_j})| + |y(t + \tau_{k_j}) - p^*(t)| \leqslant \varepsilon_{k_j} + \eta_{k_j}$ per $t \geqslant T_{k_j}$.

Questo mostra che $q^*(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$. Ne segue allora (cfr. [**5**], th. 3.1) $p(t) = p^*(t)$, $q(t) = q^*(t)$ per ogni $t \geqslant 0$, e la dimostrazione è così conclusa.

Indichiamo con $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{J}$ gli insiemi di tutte e sole le funzioni quasi periodiche $p(t)$ e, rispettivamente, infinitesime $q(t)$, individuate, come sopra, dalle funzioni $y(t) \in \mathscr{B}$.

Proviamo dapprima che (a) ogni successione divergente di numeri reali positivi $\{h_k\}$, contiene una successione $\{h_{k_j}\}$, tale che, per ogni $p(t) \in \mathfrak{P}$, $p(t + h_{k_j})$ converge uniformemente in I.

Sia $\{h_k\}$ una successione divergente di numeri reali positivi. Scelto ad arbitrio un numero positivo ε (cfr. [**1**]), esiste una lunghezza di inclusione $l = l(\varepsilon/2)$, relativa ad $\varepsilon/2$, tale che, accanto ad ogni numero di ascissa h_n della successione data, con $n \geqslant n'$ abbastanza grande perchè sia $h_n > l$, si trova un $\varepsilon/2$-quasi periodo comune a tutte le funzioni di $\mathfrak{P}$, la cui distanza dal punto h_n è minore (o uguale) a l, cioè $h_n - l < \tau_n < h_n$, e, ponendo $l_n = h_n - \tau_n$, si ha $0 \leqslant l_n < l$, onde $|p(t + h_n - \tau_n + \tau_n) - p(t + h_n - \tau_n)| < \varepsilon/2$, ovvero

$$(1) \qquad |p(t + h_n) - p(t + l_n)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{per ogni } p(t) \in \mathfrak{P} \text{ e per ogni } t \geqslant \tau_n - h_n .$$

Per $n \geqslant n'$ sarà allora $\tau_n - h_n < 0$, e la relazione (1) sarà in particolare soddisfatta per $t \geqslant 0$. I punti di ascissa $l_1, l_2, \ldots$ sono tutti nell'intervallo $[0, l]$: essi hanno dunque almeno un punto limite. Sia l' l'ascissa di uno di questi punti che è limite della successione $\{l_{n_k}\}$. Fissata a piacere una funzione $p(t) \in \mathfrak{P}$, si consideri la successione di funzioni $\{p(t + h_{n_k})\}$. A partire da un indice $k_p^\varepsilon = k(p, \varepsilon)$ in poi, cioè per $n_k \geqslant n_{k_p^\varepsilon}$, e per un arbitrario $t \in I$, si ha

$$(2) \qquad |p(t + l_{n_k}) - p(t + l')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da (1) e (2) segue, per $n_k > n'$ e per ogni $t \geqslant 0$,

$$|p(t + h_{n_k}) - p(t + l')| \leqslant |p(t + h_{n_k}) - p(t + l_{n_k})| + |p(t + l_{n_k}) - p(t + l')| < \varepsilon .$$

Ciò sarà espresso dicendo che la successione $\{p(t + h_{n_k})\}$ *converge uniformemente in I, a meno di ε*. Si osservi che la scelta della successione $\{h_{k_j}\}$ dipende dall'insieme $\mathfrak{P}$ e non dalle sue singole funzioni, onde, se $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_p > \ldots$ è una successione di numeri reali positivi che tende a zero quando p tende a $+\infty$, dalla successione $\{h_{k_j}\}$ si può estrarre una successione $\{h^1_{k_j}\}$ tale che, per ogni $p(t) \in \mathfrak{P}$, la $\{p(t + h^1_{k_j})\}$ converge uniformemente in I a meno di ε_1; ... dalla successione $\{h^{p-1}_{k_j}\}$ si può estrarre una successione $\{h^p_{k_j}\}$ tale che, per ogni $p(t) \in \mathfrak{P}$, $\{p(t + h^p_{k_j})\}$ converge uniformemente in I a meno di ε_p; ... Si consideri ora la successione diagonale $\{h^m_{k_m}\}$: per ogni $p(t) \in \mathfrak{P}$, la successione $\{p(t + h^m_{k_m})\}$ converge uniformemente in I, e la (a) è così provata.

(b) Si fissi ora una successione divergente $\{h_k\}$ di numeri reali positivi. Per la (a) esiste una successione $\{h_{k_j}\} \subseteq \{h_k\}$ tale che $\{p(t + h_{k_j})\}$ converge uniformemente in I per ogni $p(t) \in \mathfrak{P}$.

Fissata a piacere $y(t) \in \mathscr{B}$, siano $p(t) \in \mathfrak{P}$ e $q(t) \in \mathfrak{S}$, tali che $y(t) = p(t) + q(t)$; per ogni $\varepsilon > 0$ esiste allora un intero $N(\varepsilon, y)$ tale che, per $j, l \geqslant N(\varepsilon, y)$, si ha

$$|p(t + h_{k_j}) - p(t + h_{k_l})| < \varepsilon\,, \qquad |q(t + h_{k_j}) - q(t + h_{k_l})| < \varepsilon\,,$$

per ogni $t \in I$; onde $|y(t + h_{k_j}) - y(t + h_{k_l})| < 2\varepsilon$ per ogni $t \in I$, cioè la tesi. (Per eseguire questa dimostrazione mi sono servita di un artificio già sfruttato in [**2**], pag. 77).

(B) $\mathscr{P} \leftarrow \mathscr{L}$.

Procedo seguendo [**5**] (cfr. th. 3.10). Supponiamo per assurdo, che un insieme $\mathscr{B} \subseteq A_{+\infty}$ abbia la proprietà $\mathscr{L}$, e contemporaneamente esista un certo $\varepsilon > 0$ e per ogni $l > 0$ ed ogni $T \geqslant 0$, esistano un $a(l, T) \geqslant 0$ ed una funzione $y(t) \in \mathscr{B}$, tali che, per ogni $\tau \in [a, a + l]$, esiste un $t(l, T, a, \tau) \geqslant T$ in corrispondenza al quale $|y(t + \tau) - y(t)| \geqslant \varepsilon$.

Per ogni intero k, si denoti con L_k l'intervallo $[a_k, a_k + k]$, essendo $a_k = a(k, k)$. Si scelga un punto h_1 nell'intervallo L_{k_1}. La lunghezza di L_{k_1} è k_1 e $h_1 \geqslant 0$. Per un $k_2 > h_1$, $k_2 > k_1$, sia $h_2 = a_{k_2} + k_2 + h_1$. Allora $h_2 > h_1$ ed $h_2 > k_2$. Si dimostra, per induzione, l'esistenza delle successioni

$$(3) \qquad 0 \leqslant h_1 < h_2 < \ldots\,, \qquad k_1 < k_2 < \ldots\,, \qquad L'_1, L'_2, \ldots\,,$$

dove

$$L'_s = L_{k_s}\,, \quad h_s < k_{s+1} < h_{s+1}\,, \quad h_s - h_p \in L'_s \quad \text{per } p = 1, 2, \ldots, s-1 \ (s = 1, 2, \ldots)\,.$$

Essendo $h_s \geqslant k_s$ per ogni intero s, la successione $\{h_s\}$ diverge quando $s \to +\infty$. Per ipotesi (cfr. Proprietà $\mathscr{L}$) la successione $\{h_s\}$ contiene una successione $\{h_{s_m}\}$ tale che, per ogni $y(t) \in \mathscr{B}$, $\{y(t + h_{s_m})\}$ converge uniformemente in I. In virtù di (3), per un fissato intero m, si ha $h_{s_m} - h_{s_r} \in L'_{s_m}$ per $r = 1, 2, \ldots, m-1$, e, preso un arbitrario $\varepsilon > 0$, esiste un intero $M(\varepsilon, y)$ tale che

$$(4) \qquad |y(t + h_{s_m}) - y(t + h_{s_{m+1}})| < \varepsilon\,, \qquad \text{per} \quad m \geqslant M(\varepsilon, y) \text{ e per ogni } t \geqslant 0\,.$$

Posto $\sigma = t + h_{s_m}$, la (4) diventa

$$(5) \qquad |y(\sigma) - y(\sigma + h_{s_{m+1}} - h_{s_m})| < \varepsilon , \qquad \text{per } m \geqslant M(\varepsilon, y) \text{ e per ogni } \sigma \geqslant h_{s_m} .$$

Se poi si pone $\tau = h_{s_{m+1}} - h_{s_m}$, si ha $\tau \in L'_{s_{m+1}}$ per (3), e risulta

$$|y(t) - y(t + \tau)| < \varepsilon, \qquad \text{per ogni } t > h_{s_m} ,$$

ed anche (essendo, per (3), $k_{s_{m+1}} > h_{s_m}$) $|y(t) - y(t+\tau)| < \varepsilon$ per ogni $t > k_{s_{m+1}}$. Con ciò si nega che per $l = T = k_{s_{m+1}}$, esista un $t \geqslant k_{s_{m+1}}$, tale che

$$|y(t + \tau) - y(t)| \geqslant \varepsilon \qquad \text{per ogni } \tau \in [a_{k s_{m+1}}, a_{k s_{m+1}} + k_{s_{m+1}}] ,$$

e per una certa funzione $y(t) \in \mathscr{B}$. Questo è assurdo. Quindi l'ipotesi è falsa, ovvero $\mathscr{B}$ ha la proprietà $\mathscr{P}$, con $T(\varepsilon, y) = T(\varepsilon)$ indipendente da $y(t) \in \mathscr{B}$.

2.2 - (A) $\mathscr{L} \rightarrow \mathscr{G}$.

Basta osservare che le successioni di numeri figuranti nella definizione della proprietà $\mathscr{G}$ sono casi particolari delle successioni che si incontrano nella definizione della proprietà $\mathscr{L}$.

(B) $\mathscr{L} \leftarrow \mathscr{G}$.

Seguendo [**6**], sia $\{a_k\}$ una successione divergente di numeri reali positivi che, a meno dell'estrazione di una sottosuccessione, si può pensare ordinata in modo crescente. Ad ogni termine a_k $(k = 1, 2, \dots)$ della successione si può così far corrispondere un intero ν_k e un numero reale non negativo b_k in modo che $a_k = \nu_k \tau + b_k$, $\nu_k < \nu_{k+1}$, $0 \leqslant b_k < \tau$ $(k = 1, 2, \dots)$. Dalle successioni $\{a_k\}$, $\{\nu_k \tau\}$, $\{b_k\}$ si possono estrarre certe successioni $\{a_{k_h}\}$, $\{\nu_{k_h} \tau\}$, $\{b_{k_h}\}$ (come è stato provato in [**6**]) verificanti le seguenti condizioni.

$$a_{k_h} = \nu_{k_h} \tau + b_{k_h} , \qquad \nu_{k_h} < \nu_{k_{h+1}} , \qquad 0 \leqslant b_{k_h} < \tau \qquad (h = 1, 2, \dots) ,$$

in modo che la successione $\{y(t + \nu_{k_h} \tau)\}$ converga uniformemente in I, comunque si prenda $y(t) \in \mathscr{B}$, e la successione $\{b_{k_h}\}$ pure converga.

Proveremo ora che, fissato a piacere $y(t) \in \mathscr{B}$, la successione di funzioni $\{y(t + a_{k_h})\}$ converge uniformemente in I. Invero, se $a_{k_h'}$ e $a_{k_h''}$ sono due generici termini della successione $\{a_{k_h}\}$, per ogni $t \in I$ si ha

$$|y(t + a_{k_h'}) - y(t + a_{k_h''})| = |y(t + \nu_{k_h'} \tau + b_{k_h'}) - y(t + \nu_{k_h''} \tau + b_{k_h''})|$$

$$\leqslant |y(t + \nu_{k_h'} \tau + b_{k_h'}) - y(t + \nu_{k_h'} \tau + b_{k_h''})| + |y(t+\nu_{k_h'} \tau + b_{k_h''}) - y(t+\nu_{k_h''} \tau + b_{k_h''}),$$

poichè esiste uniforme il $\lim_{h\to+\infty} y(t+\nu_h\tau)$ per $t \geqslant 0$, ed esiste il $\lim_{h\to+\infty} b_h$, allora, ad ogni $\varepsilon > 0$, corrisponde un h_ε, indipendente dalla scelta in I del punto t, tale che, per $h', h'' > h_\varepsilon$, e per qualunque $t \geqslant 0$, si ha

$$|y(t + \nu_{k_{h'}}\tau + b_{k_{h'}}) - y(t + \nu_{k_{h'}}\tau + b_{k_{h''}})| < \varepsilon ,$$

$$|y(t + \nu_{k_{h'}}\tau + b_{k_{h''}}) - y(t + \nu_{k_{h''}}\tau + b_{k_{h''}})| < \varepsilon ,$$

e dunque
$$|y(t + a_{k_{h'}}) - y(t + a_{k_{h''}})| < 2\varepsilon,$$

da cui si deduce l'uniforme convergenza in I della $\{y(t + a_{k_h})\}$.

2.3 – Da quanto abbiamo provato in **2.1** e **2.2** segue $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{G}$.

3 - Osservazioni

3.1 – Se per ogni prefissato $\varepsilon > 0$ il punto $T(\varepsilon, \cdot)$ che figura nella definizione della proprietà $\mathscr{P}$ risulta indipendente dalle funzioni di $\mathscr{B}$, cioè $T(\varepsilon, y) = T(\varepsilon)$ per ogni funzione $y(t)$ di $\mathscr{B}$, l'insieme $\mathscr{B}$ sarà formato da funzioni equi-as-quasi periodiche. Questo avviene certamente quando, per ogni prefissato $\varepsilon > 0$, esiste in I l'estremo superiore dei suddetti punti $T(\varepsilon, y)$ al variare in $\mathscr{B}$ della funzione $y(t)$. In **2.1** si è provato implicitamente che un tale $T(\varepsilon)$ esiste sempre.

Così ad esempio l'insieme di tutte le traslate $y(t + h)$ $(h \geqslant 0)$ di una funzione as-quasi periodica è formato da funzioni equi-as-quasi periodiche.

3.2 – Se le funzioni dell'insieme $\mathscr{B} \subseteq A_{+\infty}$ che gode della proprietà $\mathscr{P}$ sono definite quasi periodiche in $\mathfrak{R}$, esse risultano equi-quasi periodiche. Dall'Osservazione preliminare discende infatti che i punti $T(\cdot, \cdot)$ che figurano nella proprietà $\mathscr{P}$ possono prendersi tutti uguali a zero. Per note proprietà delle funzioni quasi periodiche ne segue così l'asserto.

3.3 – Le accumulazioni (sempre esistenti) delle successioni $\{y(t + h_i)\}$, dove $\{h_i\}$ è una successione divergente di numeri reali positivi e $y(t)$ appartiene a un insieme $\mathscr{B} \subseteq A_{+\infty}$ soddisfacente alla proprietà $\mathscr{P}$, sono equi-quasi periodiche: sono infatti definite quasi periodiche in $\mathfrak{R}$ (cfr. [**5**], th. 3.8); inoltre, come è subito visto, l'insieme $\mathscr{B} \subseteq A_{+\infty}$ di dette accumulazioni ha la proprietà $\mathscr{P}$. Da **3.2** segue così l'asserto.

Bibliografia

[1] L. Amerio, *Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati,* Ann. Mat. Pura Appl. **89** (1955).

[2] J. Favard, *Leçons sur les fonctions presque-périodiques,* Gauthier-Villars 1933.

[3] A. M. Fink, *Almost periodic differential equations,* Springer-Verlag 1975.

[4] M. Fréchet, *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques,* Revue Scientifique, juillet-aout 1941.

[5] T. Joshizava, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions,* Springer-Verlag 1975.

[6] B. Manfredi, *Su l'esistenza di certi moti quasiperiodici,* Actas de la Agrupaciòn de Matemàticos de Exprexiòn Latina, Palma de Mallorca (1977), 470-474.

Sommario

Vedi Introduzione.

* * *