Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 89-102

KRZYSZTOF MOSZYNSKI (*)

Approssimazione spettrale di un operatore autoaggiunto con il metodo dei momenti (**)

1 - Introduzione

Sia X uno spazio di Hilbert reale e sia $A\colon X \to X$ un operatore limitato, autoaggiunto, tale che

$$a = \inf_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}, \qquad b = \sup_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

Sia $E(\lambda)$, con λ un numero reale, la famiglia spettrale di A; dunque (v. [1])

$$A = \int_{a-0}^{b} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda). \tag{1}$$

Fissato un elemento $x \in X$, $x \neq 0$, poniamo

$$\Phi(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{per } \lambda \leqslant a, \\ (E(\lambda)x, x) & \text{per } \lambda \in (a, b], \\ \|x\|^2 & \text{per } \lambda \geqslant b. \end{cases} \tag{2}$$

Dalla definizione di E segue che Φ è una funzione reale, non negativa e

(*) Indirizzo: Instytut Matematyczny PAN, Skrytka Pocztowa 137, 00-950 Warszawa, Poland.
(**) Ricevuto: 8-IX-1978.

non decrescente, tale che

$$\text{(i)} \qquad \Phi(\lambda) \begin{cases} = 0 & \text{per } \lambda \leqslant a\,, \\ = \|x\|^2 & \text{per } \lambda \geqslant b\,, \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \qquad \Phi(\lambda + 0) = \Phi(\lambda) \qquad \text{per ogni } \lambda \in (a, b)\,,$$

$$\text{(iii)} \qquad \Phi(\lambda) = \text{const.} \qquad \text{per ogni } \lambda,\ \mu_1 \leqslant \lambda \leqslant \mu_2\,,$$

se e solo se $[E(\mu_2) - E(\mu_1)]x = 0$.

Siano ora $f, g \in C(a, b)$. La seguente forma bilineare

$$(f, g)_\Phi = \int_a^b f(\lambda)\, g(\lambda)\, \mathrm{d}\Phi(\lambda) = \big(f(A)\, g(A)\, x, x\big) = \big(f(A)\, x, g(A)\, x\big) \tag{3}$$

è un semiprodotto scalare nello spazio $C(a, b)$.

Con tale semiprodotto si può definire una successione di polinomi ortogonali rispetto a $(\cdot)_\Phi$, nel seguente modo (v. [**3**]).

Si pone

$$P_{-1} = 0 \quad \text{e} \quad P_0 = \text{const}\,, \qquad \text{con } (P_0, P_0)_\Phi = 1\,.$$

Se $P_0, P_1, \ldots, P_k$ sono già definiti, si pone

$$\lambda P_k(\lambda) = a_{kk+1} P_{k+1}(\lambda) + a_{kk} P(\lambda) + a_{kk-1} P_{k-1}(\lambda), \tag{4}$$

per ogni λ reale, dove i coefficienti a_{kj} sono definiti dalle seguenti formule

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} a_{kj} &= \int_a^b \lambda P_j(\lambda)\, P_k(\lambda)\, \mathrm{d}\Phi(\lambda) \qquad \text{per } (j = k-1, k)\,, \\ a_{kk+1} &= \sqrt{\int_a^b \lambda^2 P_k^2(\lambda)\, \mathrm{d}\Phi(\lambda) - a_{kk-1}^2 - a_{kk}^2} \quad \geqslant 0\,. \end{aligned}$$

Si vede facilmente, che la successione $\{P_k\}$ è infinita se e solo se tutti i coefficienti a_{kk+1} sono positivi. In questo caso si ha anche $(P_k, P_l)_\Phi = \delta_{k,l}$.

Nota. In questo lavoro si suppone sempre che l'insieme dei punti in cui la funzione Φ cresce sia infinito. Da questa ipotesi segue che la successione dei polinomi $\{P_k\}$, definita da (4), (5), è infinita. Gli zeri di P_k sono tutti diversi, reali e si trovano in $[a, b]$.

2 - La matrice di Vandermonde

Sia

$$V_n = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 & \dots & 1 \\ s_1, & s_2, & s_3 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1^{n-1}, & s_2^{n-1}, & s_3^{n-1} & \dots & s_n^{n-1} \end{bmatrix},$$

dove $s_1, s_2, \dots, s_n$ sono numeri reali.

Poniamo

$$c_{ij}^n = (-1)^{n-j} \frac{P_{n-j}^{n-1}(s_i)}{(s_i - s_1) \dots (s_i - s_{i-1})(s_i - s_{i+1}) \dots (s_i - s_n)},$$

dove

$$P_r^{n-1}(s_i) = \sigma_r^{n-1}(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n),$$

con

$$\sigma_r^p(z_1, z_2, \dots, z_p) = \sum_{1 \leqslant kj \leqslant p}' z_{k_1} z_{k_2} \dots z_{k_r}, \qquad \sigma_0^p(z_1, z_2, \dots, z_p) = 1.$$

Il simbolo $\sum'$ indica la somma di tutti i prodotti diversi di fattori diversi.

Lemma 1.

$$\sum_{r=1}^n c_{ir}^n s^{r-1} = \frac{(s - s_1) \dots (s - s_{i-1})(s - s_{i+1}) \dots (s - s_n)}{(s_i - s_1) \dots (s_i - s_{i-1})(s_i - s_{i+1}) \dots (s_i - s_n)} \underset{df}{=} l_i^n(s). \tag{6}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\sum_{r=1}^n c_{ir}^n s^{r-1} = \frac{1}{(s_i - s_1) \dots (s_i - s_{i-1})(s_i - s_{i+1}) \dots (s_i - s_n)} \sum_{r=1}^n (-1)^{n-r} P_{n-r}^{n-1}(s_i) s^{r-1}.$$

Ma

$$\sum_{r=1}^n (-1)^{n-r} P_{n-r}^{n-1}(s_i) s^{r-1} = s^{n-1} P_0^{n-1}(s_i) - s^{n-2} P_1(s_i) + \dots (-1)^{n-1} P_{n-1}^{n-1}(s_i)$$
$$= (s - s_1) \dots (s - s_{i-1})(s - s_{i+1}) \dots (s - s_n).$$

Corollario 1.

$$V_n^{-1} = (c_{ij}^n)_{i,j=1,2,\dots,n} \,. \tag{7}$$

Dimostrazione. Dal Lemma 1 segue

$$d_{ij}^n = \sum_{r=1}^{n} c_{ir}^n s_j^{r-1} = l_j^n(s_j) = \delta_{ij} \,.$$

Lemma 2. *Siano* $s_1^N, s_2^N, \dots, s_N^N$ *gli zeri del polinomio* P_N *appartenente al sistema di polinomi ortogonali rispetto a* $(\cdot)_\Phi$. *Allora*

$$\int_a^b l_j^N(\lambda)\, \mathrm{d}\Phi(\lambda) = \int_a^b [l_j^N(\lambda)]^2\, \mathrm{d}\Phi(\lambda) \qquad (j = 1, 2, 3, \dots, N) \,,$$

con

$$l_j^N(\lambda) = \frac{(s - s_1^N) \dots (s - s_{j-1}^N)(s - s_{j+1}^N) \dots (s - s_N^N)}{(s_j^N - s_1^N) \dots (s_j^N - s_{j-1}^N)(s_j^N - s_{j+1}^N) \dots (s_j^N - s_N^N)} \,.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $l_j^N(\lambda)$ è il polinomio d'interpolazione di Lagrange con i nodi $s_1^N, s_2^N, \dots, s_N^N$ per la funzione $[l_j^N(\lambda)]^2$ che è un polinomio di grado $2N - 2 \leqslant 2N - 1$.

Si ha (v. le formule di quadratura di Gauss [**2**])

$$\int_a^b [l_j^N(\lambda)]^2\, \mathrm{d}\Phi(\lambda) = \int_a^b l_j^N(\lambda)\, \mathrm{d}\Phi(\lambda) \,.$$

3 - Il metodo dei momenti nello spazio $C(a, b)$.

Ogni funzionale lineare e limitato $F \in C(a, b)'$ è esprimibile come integrale di Stieltjes del seguente tipo

$$\forall f \in C(a, b) \qquad F(f) = \int_a^b f(\lambda)\, \mathrm{d}\Phi(\lambda) \,,$$

dove $\Phi \in VBN(ab)$.

$VBN(ab)$ è lo spazio delle funzioni di variazione totale limitata, tali che per ogni $\Phi \in VBN(a, b)$

$$\Phi(a) = 0 \,, \qquad \Phi(\lambda) = \Phi(\lambda + 0) \qquad \text{per ogni } \lambda \in (a, b) \,.$$

$VBN(ab)$ è lo spazio lineare normato con la norma

$$\|\Phi\|_V = \bigvee_a^b \Phi = \sup \sum_j |\Phi(t_{j+1}) - \Phi(t_j)|\,,$$

dove la somma si intende estesa a tutte le suddivisioni finite dell'intervallo $[a, b]$ (variazione totale di Φ).

Sia ora $f_1, f_2, f_3, \ldots$ una fissata successione di funzioni di $C(a, b)$, tale che ogni sua sottosuccessione finita sia linearmente indipendente.

Siano anche, per ogni N intero $\varphi_1^N, \varphi_2^N, \ldots, \varphi_N^N$, funzioni appartenenti a $VBN(ab)$. Vogliamo approssimare la funzione $\Phi \in VBN(ab)$ utilizzando le combinazioni lineari $\sum_{j=1}^N c_j^N \varphi_j^N$, dove i coefficienti c_j^N sono calcolati risolvendo il seguente sistema di equazioni lineari (metodo dei momenti)

$$\sum_{j=1}^N g_{ij}^N c_j^N = F(f_i)\,, \qquad g_{ij}^N = \int_a^b f_i(\lambda)\, d\varphi_j^N(\lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)\,. \tag{8}$$

Teorema 1 (1). *Supponiamo che valgano le seguenti ipotesi:*

(1) *La successione $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ sia un sistema linearmente completo nello spazio $C(ab)$. (L'insieme di tutte le combinazioni lineari finite è denso in $C(ab)$).*

(2) *Le funzioni $\Phi_N(\lambda) = \sum_{j=1}^N c_j^N \varphi_j^N(\lambda)$, dove i coefficienti c_j^N sono ottenuti dal sistema* (8), *siano uniformemente limitati, cioè*

$$\exists K < \infty, \qquad \forall N \qquad \|\Phi_N\|_V = \bigvee_a^b \Phi_N < K\,.$$

Allora, per ogni $f \in C(ab)$,

$$F_N(f) \to F(f)\,, \quad N \to \infty\,, \qquad \textit{dove} \qquad F_N(f) = \int_a^b f(\lambda)\, d\Phi_N(\lambda)\,.$$

Dimostrazione. Dalla completezza di $f_1, f_2, \ldots$ segue che per ogni $\varepsilon > 0$ e $f \in C(ab)$ esiste $N_{f\varepsilon}$ tale che per $N > N_{f\varepsilon}$, esistono le costanti $\alpha_1^N, \ldots, \alpha_N^N$ che soddisfano la seguente condizione $\|f - \sum_{j=1}^N \alpha_j^N f_j\| < \varepsilon$, dove $\|\ \|$ è la norma in

(1) Cfr. in [1], § 55, pp. 119-121.

$C(a, b)$. Si ha

$$F(f) - F_N(f) = F(f - \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^N f_\nu) + \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^N F(f_\nu) - F_N(f - \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^N f_\nu) - \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^N F_N(f_\nu) .$$

Ma da (8) $F(f_\nu) = F_N(f_\nu)$; ne segue che per $N > N_{f\varepsilon}$

$$|F(f) - F_N(f)| \leqslant \|F\| \, \|f - \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^N f_\nu\| + \|F_N\| \, \|f - \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^N f_\nu\|$$

$$\leqslant (\|F\| + K) \, \|f - \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^N f_\nu\| \leqslant (\|F\| + K) \, \varepsilon ,$$

essendo $\|F_N\| = \|\Phi_N\|_V \leqslant K$.

Sia adesso $\varrho(\lambda)$ per λ reale, una funzione limitata, integrabile, non negativa, con supporto in $[-1, 1]$, e tale che $\int_{-1}^{1} \varrho(\lambda) \, d\lambda = 1$. Per ogni $\xi \in (a, b)$ e $h > 0$ tali che $a \leqslant \xi - h$, $\xi + h \leqslant b$ poniamo (la funzione peso nel punto ξ)

$$\varrho_{\xi h}(\lambda) = \frac{1}{h} \varrho\left(\frac{\lambda - \xi}{h}\right) , \qquad f_{\xi h}(\lambda) = \int_{\lambda}^{b} \varrho_{\xi h}(s) \, ds . \tag{9}$$

Si ha

$$\int_a^b f_{\xi h}(\lambda) \, d\Phi(\lambda) = \int_{\lambda}^{b} \varrho_{\xi h}(s) \, ds \Phi(\lambda) \Big|_a^b + \int_a^b \varrho_{\xi h}(\lambda) \, \Phi(\lambda) \, d\lambda ,$$

e, essendo $\Phi(a) = \Phi_N(a) = 0$, risultano le medie

$$\begin{aligned} &\int_a^b f_{\xi h}(\lambda) \, d\Phi(\lambda) = \int_a^b \varrho_{\xi h}(\lambda) \, \Phi(\lambda) \, d\lambda , \\ &\int_a^b f_{\xi h}(\lambda) \, d\Phi_N(\lambda) = \int_a^b \varrho_{\xi h}(\lambda) \, \Phi_N(\lambda) \, d\lambda . \end{aligned} \tag{10}$$

In modo simile, con

$$f_\xi(\lambda) = \begin{cases} \xi - \lambda & \text{per } \lambda \leqslant \xi \\ 0 & \text{per } \lambda \geqslant \xi \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f(\lambda) \equiv 1,$$

si ha rispettivamente

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
\int_a^b f_\xi(\lambda)\,\mathrm{d}\Phi(\lambda) &= \int_a^\xi \Phi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,,\\
\int_a^b f_\xi(\lambda)\,\mathrm{d}\Phi_N(\lambda) &= \int_a^\xi \Phi_N(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,;
\end{aligned}
$$

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{d}\Phi(\lambda) &= \Phi(b)\,,\\
\int_a^b \mathrm{d}\Phi_N(\lambda) &= \Phi_N(b)\,.
\end{aligned}
$$

Dalle (10), (11) e (12) e dal Teorema 1 segue

Corollario 2 (v. (1)). *Se le ipotesi* (1) *e* (2) *del Teorema* 1 *sono soddisfatte, allora:*

(a) *In ogni punto* $\xi \in (a, b)$ *e per ogni* $h > 0$ *tale che* $a \leqslant \xi - h$, $\xi + h \leqslant b$, *le medie convergono*

$$\int_a^b \varrho_{\xi h}(\lambda)\,\Phi_N(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \to \int_a^b \varrho_{\xi h}(\lambda)\,\Phi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,, \qquad N \to \infty\,.$$

(b) *Per ogni* $\xi \in (a, b)$

$$\int_a^\xi \Phi_N(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \to \int_a^\xi \Phi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,, \qquad N \to \infty\,.$$

(c) $\Phi_N(b) \to \Phi(b)\,, \qquad N \to \infty\,.$

Il punto ξ si dice il *punto di Lebesgue* della funzione f, se

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_\xi^{\xi+h} |f(t) - f(\xi)|\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

In ogni punto di Lebesgue ξ della funzione f l'integrale $\int_a^\xi f(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ ha la derivata uguale a $f(\xi)$.

Ogni punto di continuità di f è un punto di Lebesgue.

Corollario 3 (v. (1)). *Se le ipotesi* (1) *e* (2) *del Teorema* 1 *sono soddisfatte e se le funzioni* Φ_N *sono non decrescenti, allora in ogni punto* ξ *di Lebesgue* *di Φ, si ha*

$$\Phi_N(\xi) \to \Phi(\xi) .$$

Dimostrazione. Sia ξ un punto di Lebesgue di Φ. Siccome le Φ_N sono non decrescenti, per $k, h > 0$ si ha

$$\frac{1}{h} \int_{\xi-h}^{\xi} \Phi_N(\lambda) \, d\lambda \leqslant \Phi_N(\xi) = \frac{1}{k} \int_{\xi}^{\xi+k} \Phi_N(\xi) \, d\lambda \leqslant \frac{1}{k} \int_{\xi}^{\xi+h} \Phi_N(\lambda) \, d\lambda ,$$

$$\frac{1}{h} \Big[\int_a^{\xi} \Phi_N(\lambda) \, d\lambda - \int_a^{\xi-h} \Phi_N(\lambda) \, d\lambda \Big] \leqslant \Phi_N(\xi) \leqslant \frac{1}{k} \Big[\int_a^{\xi+k} \Phi_N(\lambda) \, d\lambda - \int_a^{\xi} \Phi_N(\lambda) \, d\lambda \Big] .$$

Dal Corollario 2 segue (quando $N \to \infty$)

$$\frac{1}{h} \Big[\int_a^{\xi} \Phi(\lambda) \, d\lambda - \int_a^{\xi-h} \Phi(\lambda) \, d\lambda \Big] \leqslant \liminf \Phi_N(\xi) \leqslant \limsup \Phi_N(\xi) \leqslant \frac{1}{k} \Big[\int_a^{\xi+k} \Phi(\lambda) \, d\lambda - \int_a^{\xi} \Phi(\lambda) \, d\lambda \Big].$$

Se $h \to 0$ e $k \to 0$, si ha infine

$$\Phi(\xi) \leqslant \liminf \Phi_N(\xi) \leqslant \limsup \Phi_N(\xi) \leqslant \Phi(\xi) ,$$

da cui segue

$$\lim_{N \to \infty} \Phi_N(\xi) = \Phi(\xi) .$$

Definiamo adesso

$$\varphi_i^N(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{per } \lambda < s_i^N \\ 1 & \text{per } \lambda \geqslant s_i^N \end{cases} \qquad (\varphi_i^N \in VBN(ab)) , \tag{13}$$

dove $a < s_1^N < s_2^N < \ldots < s_N^N < b$ è una qualunque fissata successione di punti di (a, b).

Lemma 3. *Sia*

$$\Phi_N(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} c_j^N \varphi_j^N(\lambda) ,$$

dove $c_1^N, \ldots, c_N^N$ *sono delle costanti. Allora* $\|\Phi_N\|_V = \sum_{j=1}^{N} |c_j^N|$.

Dimostrazione. È chiaro che $\|\Phi_N\|_V \leqslant \sum_{j=1}^{N} |c_j^N| \, \|\varphi_j^N\|_V$. Ma

$$\|\varphi_j^N\|_V = \bigvee_a^b \varphi_j^N = \sup \sum_i |\varphi_j^N(x_{i+1}) - \varphi_j^N(x_i)| = 1 , \qquad \text{dunque}$$

$$\|\Phi_N\|_V \leqslant \sum_{j=1}^{N} |c_j^N| .$$

D'altra parte, se si pone $a \leqslant x_0 < s_1^N < x_1 < s_2^N < \ldots < x_{N-1} < s_N^N < x_N \leqslant b$ si ha

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Big| \sum_{j=1}^{N} c_j^N(\varphi_j^N(x_{i+1}) - \varphi_j^N(x_i)) \Big| = \sum_{i=0}^{N-1} \Big| \sum_{j=1}^{N} c_j^N \delta_{i+1j} \Big| = \sum_{i=0}^{N-1} |c_{i+1}^N| = \sum_{i=1}^{N} |c_i^N| .$$

Teorema 2. *Supponiamo che le funzioni* φ_j^N $(j = 1, 2, \ldots, N)$ *siano definite da* (13), *dove* s_j^N $(j = 1, 2, \ldots, N)$ *sono gli zeri del polinomio* P_N *di grado* N, *appartenente al sistema di polinomi ortogonali rispetto a* $(\cdot)_\Phi$, *e che le funzioni* $f_1, f_2, \ldots$ *siano definite da*

$$f_i(\lambda) = \lambda^{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots) . \tag{14}$$

In questo caso la matrice del sistema (8) *è la matrice di Vandermonde*

$$V_N = (g_{ij}^N) = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 & \ldots & 1 \\ s_1^N, & s_2^N, & s_3^N & \ldots & s_N^N \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (s_1^N)^{N-1}, & (s_2^N)^{N-1}, & (s_3^N)^{N-1} & \ldots & (s_N^N)^{N-1} \end{bmatrix} .$$

La soluzione del sistema (8), $[c_1^N, c_2^N, \ldots, c_N^N]$ *è della seguente forma*

$$c_j^N = \int_a^b l_j^N(\lambda) \, \mathrm{d}\Phi(\lambda) = \int_a^b [l_j^N(\lambda)]^2 \, \mathrm{d}\Phi(\lambda) \qquad (j = 1, 2, \ldots, N) , \tag{15}$$

dove $l_j^N(\lambda)$ *è definita da* (6).

Se la funzione Φ *è non decrescente, si ha anche la convergenza delle medie*

$$\int_a^b \varrho_{\xi h}(\lambda) \, \Phi_N(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b \varrho_{\xi h}(\lambda) \, \Phi(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \tag{16}$$

in ogni punto $\xi \in (a, b)$ *e per ogni* $h > 0$ *abbastanza piccolo, dove* $\varrho_{\xi h}$ *è una qualunque funzione-peso definita da* (9).

Inoltre, in ogni punto di Lebesgue $\xi \in (a, b)$ di Φ, si ha

$$\Phi_N(\xi) \to \Phi(\xi) , \quad N \to \infty , \tag{17}$$

ed anche

$$\Phi_N(b) \to \Phi(b) , \quad N \to \infty \tag{18}$$

(sempre per Φ non decrescente).

Dimostrazione. Si ha

$$g_{ij}^N = \int_a^b \lambda^{i-1} \mathrm{d}\varphi_j^N(\lambda) = \lambda^{i-1} \varphi_j^N(\lambda) \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \lambda^{i-1}\right) \varphi_j^N(\lambda) \,\mathrm{d}\lambda$$

$$= b^{i-1} - \int_{s_j^N}^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \lambda^{i-1}\right) \mathrm{d}\lambda = b^{i-1} - b^{i-1} + (s_j^N)^{i-1} = (s_j^N)^{i-1}.$$

Applicando ora il Lemma 1, il Corollario 1 e il Lemma 2 si ottiene

$$c_i^N = \sum_{r=1}^N c_{ir}^N F(f_r) = \int_a^b \sum_{r=1}^N c_{ir}^N \lambda^{r-1} \mathrm{d}\Phi(\lambda) = \int_a^b l_j^N(\lambda) \,\mathrm{d}\Phi(\lambda) = \int_a^b [l_j^N(\lambda)]^2 \,\mathrm{d}\Phi(\lambda) .$$

Si vede che nel caso in cui Φ è non decrescente, i coefficienti c_j^N $(j=1, 2, \dots, N)$ sono sempre non negativi, dunque $\|\Phi_N\|_V = \sum_{j=1}^N c_j^N$ (vedi il Lemma 3).

Dalla prima equazione del sistema (8), per Φ non decrescente, si ha

$$\|\Phi_N\|_V = c_1^N + c_2^N + \dots + c_N^N = F(1) = \Phi(b) - \Phi(a) ,$$

dunque, tutte le funzioni Φ_N sono uniformemente limitate.

Basta applicare adesso i Corollari 2 e 3 e il Teorema 1.

4 - Applicazione all'approssimazione dello spettro

Sia $A: X \to X$ un operatore lineare, autoaggiunto, limitato di uno spazio di Hilbert e sia $\Phi(\lambda) = \big(E(\lambda)x, x\big)$ la funzione non decrescente, definita in 1.

Se λ_0 è un punto in cui Φ cresce, allora λ_0 è un punto dello spettro di A. Se in λ_0, Φ fa un salto, allora λ_0 è un autovalore di A.

Dunque lo studio del comportamento della funzione Φ fornisce alcune informazioni importanti sullo spettro di A.

Osserviamo che per studiare tutto lo spettro di A occorre studiare il comportamento della funzione Φ al variare del punto $x \in X$.

In ogni caso può essere utile avere una approssimazione della funzione Φ. Per questo si può applicare il Teorema 2 di **3**.

Consideriamo ora un esempio-modello. Sia L un operatore lineare tale che il suo operatore inverso $A: X \to X$ sia un operatore autoaggiunto e limitato, definito su tutto lo spazio X.

Supponiamo che solo L sia noto e che si cerchi lo spettro di A. Questa situazione è tipica quando L è, ad esempio, un operatore differenziale con le condizioni al contorno.

Con questo operatore definiamo due successioni $\{x_k\}$, $\{q_k\}$ nel seguente modo.

Sia x_0 un elemento fissato nel dominio di L tale che $\|x_0\|=1$ e sia $q_0=Lx_0$. Supponiamo che gli elementi

$$x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_k, \qquad q_{-1}, q_0, q_1, \ldots, q_k ,$$

(dove $x_{-1} = q_{-1} = 0$) siano già definiti; definiamo y_k, x_{k+1}, q_{k+1} come soluzioni delle seguenti equazioni

$$Ly_k = x_k , \tag{19}$$

$$y_k = a_{kk+1} x_{k+1} + a_{kk} x_k + a_{kk-1} x_{k-1} , \tag{20}$$

$$x_k = a_{kk+1} q_{k+1} + a_{kk} q_k + a_{kk-1} q_{k-1} , \tag{21}$$

i cui coefficienti sono definiti dalle formule

$$\begin{aligned} a_{kj} &= (y_k, x_j) \qquad (j = k-1, k) , \\ a_{kk+1} &= \sqrt{[(y_k\, y_k) - a_{kk}^2 - a_{kk-1}^2} \quad \geq 0 \end{aligned} \tag{22}$$

(il procedimento si ferma, se $a_{kk+1} = 0$).

In questo modo, dopo N passi si ottengono:

— le due successioni:

$$0, x_0, x_1, \ldots, x_N; \qquad 0, q_0, q_1, \ldots, q_N;$$

— la matrice tridiagonale simmetrica di ordine N

$$B_N = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1N-2}\, a_{N-1N-1} \end{bmatrix};$$

— il coefficiente a_{N-1N}.

Siamo ora in grado di formulare il seguente teorema.

Teorema 3. *Siano $s_1^N, s_2^N, \dots, s_N^N$ gli autovalori della matrice B_N che supponiamo tutti diversi dallo zero e diversi dagli autovalori di A.*

Siano $r_j^N \in X$ le soluzioni delle seguenti equazioni

$$Lr_j^N = \frac{r_j^N}{s_j^N} + \alpha_{Nj} q_N \qquad (j = 1, 2, \dots, N), \tag{23}$$

dove

$$\alpha_{Nj} = \frac{a_{N-1N}\, a_{N-2N-1} \dots a_{01}}{(s_j^N - s_1^N) \dots (s_j^N - s_{j-1}^N)\, s_j^N\, (s_j^N - s_{j+1}^N) \dots (s_j^N - s_N^N)} \tag{24}$$

e q_N, a_{kj} sono definiti da (19) *e* (22) *rispettivamente. Siano infine φ_j^N le funzioni definite da*

$$\varphi_j^N(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{per } \lambda < s_j^N \\ 1 & \text{per } \lambda \geqslant s_j^N \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \dots, N)$$

e poniamo

$$\Phi_N(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} c_j^N \varphi_j^N(\lambda) \qquad \big(c_j^N = (r_j^N, x_0)\big). \tag{25}$$

Allora, le funzioni Φ_N approssimano la funzione $\Phi(\lambda) = \big(E(\lambda)x_0, x_0\big)$ (dove E è la famiglia spettrale dell'operatore A) nel modo descritto nel Teorema 2 (v. le formule (16), (17), (18)).

Dimostrazione. Basta provare che

$$c_j^N = \big(l_j^N(A)\, x_0, x_0\big) = \int_a^b l_j^N(\lambda)\, d\Phi(\lambda), \tag{26}$$

e poi applicare il Teorema 2.

Con le formule (4) e (5) si vede facilmente che

$$x_k = P_k(A)\,x_0\,, \qquad q_k = LP_k(A)\,x_0 = Lx_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

dove $P_0, P_1, \ldots$ è la successione dei polinomi ortogonali rispetto al semiprodotto $(\cdot)_\Phi$.

Siccome s_j^N $(j = 1, 2, \ldots, N)$ sono gli zeri del polinomio P_N, si ha

$$l_j^N(\lambda) = \frac{P_N(\lambda)}{(\lambda - s_j^N)\,P_N'(s_j^N)}\,,$$

e quindi

$$P_N'(s_j^N)(\lambda - s_j^N)\,l_j^N(\lambda) = P_N(\lambda)\,. \tag{27}$$

D'altra parte $P_N'(s_j^N) = b_N^N(s_j^N - s_1^N) \ldots (s_j^N - s_{j-1}^N)(s_j^N - s_{j+1}^N) \ldots (s_j^N - s_N^N)$, dove $P_N(\lambda) = b_N^N \lambda^N + \ldots$.

Osserviamo che differenziando N volte la formula (4) per $k = N - 1$ si ottiene $b_{N-1}^{N-1} = a_{N-1N}\, b_N^N$, da cui segue

$$b_N^N = \frac{1}{a_{N-1N}\, a_{N-2N-1} \ldots a_{01}}$$

(perchè $b_0^0 = 1$). Infine

$$P_N'(s_j^N) = \frac{(s_j^N - s_1^N) \ldots (s_j^N - s_{j-1}^N)(s_j^N - s_{j+1}^N) \ldots (s_j^N - s_N^N)}{a_{N-1N}\, a_{N-2N-1} \ldots a_{01}}\,. \tag{28}$$

Da (27) vediamo che

$$P_N'(s_j^N)(A - s_j^N I)\,l_j^N(A)\,x_0 = x_N\,.$$

Poniamo ora $r_j^N = l_j^N(A)\,x_0$; dunque $P_N'(s_j^N)(A - s_j^N I)\,r_j^N = x_N$. Applicando l'operatore L e la formula (28), troviamo che

$$P_N'(s_j^N)(r_j^N - s_j^N L r_j^N) = q_N\,,$$

cioè r_j^N soddisfa l'equazione (23).

Siccome s_j^N non è un autovalore di A, allora l'operatore $L - (1/s_j^N)\,I$ è invertibile (il suo inverso è uguale a $(I - (A/s_j^N)^{-1}A)$ e dunque l'equazione (23) ha la soluzione unica.

Nota. Quando la risoluzione dell'equazione (23) presenta qualche difficoltà si può sempre applicare direttamente la formula

$$c_j^N = \big(l_j^N(A)\,x_0,\, x_0\big) \qquad (j = 1, 2, \ldots, N)\,, \tag{29}$$

che è meno economica, ma vale senza nessun ipotesi addizionale su s_j^N.

Si vede facilmente che anche $l_j^N(A)$ può essere calcolato con il solo uso dell'operatore L.

Osserviamo infine che quando, ad esempio, s_j^N è un elemento dello spettro continuo di A, l'operatore $(s_j^N I - A)^{-1}$ esiste, ma non è limitato, e così, in questo caso, il problema (23) è mal posto.

Bibliografia

[1] F. RIESZ et B. SZ. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionelle*, Gauthier Villars, Akademiai Kiado 1965, 270.

[2] G. SZEGÖ, *Orthogonal polynomials*, AMS 1959.

* * *