Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 189-199

DANIELA PARMIGIANI BEDOGNA (*)

Le formule SH nelle potenze generalizzate ridotte (**)

Introduzione

In [3] è stato definito un bifuntore $G: \mathscr{E}^{op} \times \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ che generalizza le proprietà di tre noti bifuntori: Π, $(-)^{(-)}$, Hom. Per questo, è stato detto « esponenziale generalizzato » e l'oggetto $G(X, B)$, ($X \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{E}$, $B \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{D}$) definito come « potenza generalizzata di B rispetto a X ».

Nel presente lavoro, una volta data la definizione di « filtro ∇ su un oggetto X », ci si propone di definire l'oggetto « potenza ridotta generalizzata di B rispetto a un filtro su X ».

Successivamente, considerato un linguaggio $\mathscr{L}$ del primo ordine (cfr. [1]) e una $\mathscr{L}$-struttura $\mathscr{B}$ su B, si darà anche all'oggetto potenza generalizzata ridotta una struttura di tipo $\mathscr{L}$ (indotta da $\mathscr{B}$) e si dimostrerà che ogni formula del tipo SH, vera nella base $\mathscr{B}$, è vera anche nella potenza ridotta.

1 – Premettiamo alcune questioni di algebra universale. Sia $\mathscr{C}$ una categoria con prodotti finiti; A e B oggetti di $\mathscr{C}$ dei quali B munito di una struttura algebrica $\mathscr{B}$ di un certo tipo Ω.

Diremo che un morfismo $h: B \to A$ è « compatibile con $\mathscr{B}$ » se è soddisfatta la seguente condizione:

— per ogni $\omega \in \Omega(n)$, per ogni $i_0 = 1, \dots, n$, per ogni $X \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}$, per ogni $x, y: X \to B^n$, se $\varepsilon_j x = \varepsilon_j y$ $(j \neq i_0)$ e $h\varepsilon_{i_0} x = h\varepsilon_{i_0} y$ allora $h\omega_B x = h\omega_B y$.

Lemma 1. *Se $h: B \to A$ è compatibile con $\mathscr{B}$, si ha: per ogni $\omega \in \Omega(n)$, per ogni $a, b: X \to B^n$, se $h^n a = h^n b$ allora $h\omega_B a = h\omega_B b$.*

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 22-XI-1978.

Dimostrazione. Essendo $h^n a = h^n b$, $h\varepsilon_i a = h\varepsilon_i b$ per $i = 1, \dots, n$. Posto $z_k = \{\varepsilon_1 a, \dots, \varepsilon_k a, \varepsilon_{k+1} b, \dots, \varepsilon_n b\}$, dimostriamo per induzione che

$$h\omega_B x = h\omega_B z_k \qquad \text{per ogni } k = 1, \dots, n\,. \tag{1}$$

Sia $k = 1$; nella condizione di compatibilità si prenda $i = k = 1$, $x = a$ e $y = z_1$, allora se $j \neq 1$, $\varepsilon_j z_1 = \varepsilon_j a$ e $h\varepsilon_1 z_1 = h\varepsilon_1 b = h\varepsilon_1 a$, dunque $h\omega_B a = h\omega_B z_1$.

Si supponga ora valida la (1) per k e dimostriamo che vale per $k+1$; di nuovo, nella condizione di compatibilità, si ponga $i_0 = k+1$, $x = z_k$, $y = z_{k+1}$; allora $h\omega_B z_k = h\omega_B z_{k+1}$. Dunque, per la (1), è anche $h\omega_B a = h\omega_B z_{k+1}$.

In particolare, dal momento che $z_n = b$, si ottiene $h\omega_B a = h\omega_B b$.

Proposizione 1. *Sia $h\colon B \twoheadrightarrow A$ una ritrazione. Allora esiste su A un'unica struttura algebrica di tipo Ω tale che h sia un omomorfismo se e solo se h è compatibile con $\mathscr{B}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che A sia un'Ω-algebra e h sia un omomorfismo. Per ogni $\omega \in \Omega(n)$, per ogni $i_0 = 1, \dots, n$, siano $x, y\colon X \to B^n$ tali che $\varepsilon_j x = \varepsilon_j y$ $(j \neq i_0)$ e $h\varepsilon_{i_0} x = h\varepsilon_{i_0} y$; allora poichè $h\omega_B = \omega_A h^n$, si ha

$$\begin{aligned} h\omega_B x &= \omega_A h^n x = \omega_A\{h\varepsilon_1 x, \dots, h\varepsilon_{i_0} x, \dots, h\varepsilon_n x\} \\ &= \omega_A\{h\varepsilon_1 y, \dots, h\varepsilon_n y\} = \omega_A h^n y = h\omega_B y \end{aligned}$$

e dunque h è compatibile con $\mathscr{B}$.

Viceversa, sia h compatibile con $\mathscr{B}$ e definiamo su A una Ω-struttura come segue: per ogni $\omega \in \Omega(n)$, sia

$$\omega_A = h\omega_B (h')^n, \tag{2}$$

dove h' è un'arbitraria inversa destra di h. Vogliamo dimostrare che $h\omega_B = \omega_A h^n$ o, equivalentemente, che $h\omega_B = h\omega_B (h'h)^n$. Dal momento che h è compatibile con $\mathscr{B}$, per il lemma precedente è sufficiente dimostrare che $h^n = h^n (h'h)^n$, il che è ovvio. L'unicità segue banalmente, essendo h una ritrazione.

2 – Dimostriamo un lemma che sarà utile in seguito.

Lemma 2. *Sia $\mathscr{C}$ una categoria (con prodotti finiti) $U \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ tale che il funtore standard $[U, -]$ sia pieno e fedele; siano inoltre $f\colon A \to C$ e $g\colon B \to C$ due morfismi tali che, per ogni $x\colon U \to A$, $fx \leqslant g$. Allora $f \leqslant g$.*

Dimostrazione. Per le ipotesi fatte, per ogni $x\colon U \to A$ esiste $\vartheta_x\colon U \to B$ tale che $fx = g\vartheta_x$.

Si consideri l'applicazione tra gli insiemi di morfismi $[U, A] \to [U, B]$ data da $x \mapsto \vartheta_x$. Dal momento che $[U, -]$ è pieno, esiste $\vartheta\colon A \to B$ tale che per ogni $x\colon U \to A$, $\vartheta_x = \vartheta \cdot x$ e dunque per ogni $x\colon U \to A$, $fx = g\vartheta x$. Ma il funtore $[U, -]$ è fedele e quindi $f = g\vartheta$ da cui la tesi.

3 – Richiamiamo la definizione del bifuntore « esponenziale generalizzato » (cfr. [**3**]).

Siano $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$ tre categorie, $\mathscr{C}$ con prodotti finiti. Sia $G\colon \mathscr{E}^{op} \times \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, $U \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ e $K\colon \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ un funtore, tali che:

(i) il funtore standard $\mathscr{C}[U, -]$ sia pieno e fedele;

(ii) esiste una biiezione naturale

$$\Phi_{-,-}\colon \mathscr{E}[-, K(-)] \xrightarrow{\approx} \mathscr{C}[U, G(-, -)];$$

(iii) K sia pieno e fedele e ammetta un aggiunto sinistro $F \dashv K$.

Sia ora $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}$ e sia ∇ un sottoinsieme proprio della famiglia $\mathscr{P}(X)$ di tutti i sottoggetti di X.

Definizione 1. ∇ si dirà « filtro su X » se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(α) per ogni coppia di sottoggetti di X appartenenti a ∇, esiste la loro intersezione e appartiene a ∇;

(β) per ogni $Y \overset{v}{\rightarrowtail} X$ appartenente a ∇, se $v \leqslant w$ e $w\colon W \rightarrowtail X$, allora w appartiene a ∇.

Siano ora $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}$ e $B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$ fissati e sia ∇ un filtro su X; sia infine $u\colon R \rightarrowtail G(X, B)^2$ una relazione su $G(X, B)$.

Definizione 2. Si dirà che u è « associato a ∇ » se soddisfa la seguente condizione

— per ogni $x\colon U \to G(X, B)^2$, x si scompone attraverso u se e solo se esiste $v\colon Y \rightarrowtail X$ appartenente a ∇, tale che $G(v, B)\,\varepsilon_1 x = G(v, B)\,\varepsilon_2 x$.

Vogliamo dimostrare che ogni relazione associata a un filtro è di equivalenza.

(a) $\Delta \leqslant u$, cioè esiste $\vartheta\colon G(X, B) \to R$ tale che $u\vartheta = \Delta$ (dove Δ è la diagonale).

Infatti, per ogni $x\colon U \to G(X, B)$, Δx si scompone attraverso u, essendo

$G(1_X, B)^2 \Delta x = \Delta x \leqslant \Delta$, inoltre $1_X \in \nabla$; dunque per ogni $x\colon U \to G(X, B)$, $\Delta x \leqslant u$ e dal Lemma 2 segue la tesi.

(b) $u = \tau u$, con $\tau = \{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}$.

Infatti dal momento che $\tau\Delta = \Delta$, per ogni $x\colon U \to G(X, B)^2$, $x \leqslant u$ se e solo se $\tau x \leqslant u$. Dunque per ogni $f\colon U \to R$, si ha $\tau u f \leqslant u$.

Per il Lemma 2, allora, $\tau u \leqslant u$. Ma è anche $\tau\tau u \leqslant \tau u$, cioè $u \leqslant \tau u$; dunque $\tau u = u$.

Si dimostra infine la transitiva, cioè che

(c) per ogni $i, j, k\colon Q \to G(X, B)$, se $\{i, j\} \leqslant u$ e $\{j, k\} \leqslant u$ allora $\{i, k\} \leqslant u$.

Sia $x\colon U \to Q$ qualunque; dal momento che $\{i, j\} x \leqslant u$ e $\{j, k\} x \leqslant u$, esistono, per la Definizione 2, $v, w \in \nabla$ tali che

$$(3) \qquad G(v, B)\, ix = G(v, B)\, jx\,, \qquad\qquad (4) \qquad G(w, B)\, jx = G(w, B)\, kx\,.$$

Consideriamo l'intersezione $v \cap w$; essa appartiene al filtro per la Definizione 1 e siano inoltre $V \cap W \xrightarrow{\alpha} V$ e $V \cap W \xrightarrow{\beta} W$ tali che $v\alpha = v \cap w = w\beta$. Per la (3) si ha

$$G(v \cap w, B)\, ix = G(\alpha, B)\, G(v, B)\, ix = G(\alpha, B)\, G(v, B)\, jx = G(v \cap w, B)\, jx\,.$$

Analogamente, per la (4) ed essendo $w\beta = v \cap w$, si ha $G(v \cap w, B) ix = G(v \cap w, B)\, kx$. Dunque $G(v \cap w, B)\, ix = G(v \cap w, B)\, kx$.

La Definizione 2 ci permette allora di concludere che $\{i, k\} x \leqslant u$, per ogni $x\colon U \to Q$, e quindi, per il Lemma 2, $\{i, k\} \leqslant u$.

Definizione 3. Data una ritrazione $r\colon G(X, B) \twoheadrightarrow A$, essa si dirà *associata a* ∇ se vale la seguente condizione: per ogni $x\colon U \to G(X, B)^2$, $r\varepsilon_1 x = r\varepsilon_2 x$ se e solo se esiste un $v \in \nabla$ tale che $G(v, B)\, \varepsilon_1 x = G(v, B)\, \varepsilon_2 x$.

Proposizione 2. *Sia* $r\colon G(X, B) \twoheadrightarrow A$ *una ritrazione e sia* $u\colon R \rightarrowtail G(X, B)^2$ *tale che* $\operatorname{Ker} r = u$.

Allora r *è associata a* ∇ *se e solo se* u *è associata a* ∇.

Dimostrazione. Dire che u è associata a ∇ equivale a dire che, per ogni $x\colon U \to G(X, B)^2$, $x \leqslant u$ se e solo se esiste un $v \in \nabla$ tale che

$$G(v, B)\, \varepsilon_1 x = G(v, B)\, \varepsilon_2 x\,.$$

L'asserto si deduce banalmente dalle definizioni, giacchè da $u = \operatorname{eq}(r\varepsilon_1, r\varepsilon_2)$ segue che $x \leqslant u$ equivale a $r\varepsilon_1 x = r\varepsilon_2 x$.

Proposizione 3. *Se r e $\bar{r}$ sono due ritrazioni associate a ∇, esse determinano lo stesso oggetto quoziente.*

Dimostrazione. Siano $r\colon G(X, B) \twoheadrightarrow A$ e $\bar{r}\colon G(X, B) \twoheadrightarrow \bar{A}$ associate a ∇, e sia r' un (arbitrario ma) fissato inverso destro di r. Per la Definizione 3, per ogni $x\colon U \to G(X, B)^2$ $r\varepsilon_1 x = r\varepsilon_2 x$ se e solo se $\bar{r}\varepsilon_1 x = \bar{r}\varepsilon_2 x$.

Sia ora $y\colon U \to A$ qualunque e sia $x = \{1, r'r\} y$; x ugualizza $r\varepsilon_1$ e $r\varepsilon_2$ e dunque è anche $\bar{r}\varepsilon_1 x = \bar{r}\varepsilon_2 x$, cioè $\bar{r}y = \bar{r}r'ry$. Essendo $[U, -]$ fedele e y qualunque, si ha $\bar{r} = \bar{r}r'r$. L'asserto segue per simmetria.

D'ora in poi supponiamo data una ritrazione $r\colon G(X, B) \twoheadrightarrow A$ associata a ∇.

Definizione 4. L'oggetto quoziente di cui alla Proposizione 3 si dirà « l'oggetto potenza generalizzata ridotta di B rispetto al filtro ∇ su X ».

4 – Sia $\mathscr{L}$ un linguaggio del 1° ordine (cfr. [**1**]$_1$) e sia $\mathscr{B} = (B, \Psi)$ una $\mathscr{L}$-struttura. Da [**1**]$_3$ sappiamo che, al variare di Y in Ob $\mathscr{E}$, si ottiene una famiglia uniforme di $\mathscr{L}$-strutture $\{\mathscr{B}_Y\}_{Y \in \mathrm{Ob}\mathscr{E}}$ con $\mathscr{B}_Y = (G(Y, B), \Psi_Y)$ e $\Psi_Y(P)\colon G(Y, T) \rightarrowtail G(Y, B)^n$ se $\Psi(P)\colon T \rightarrowtail B^n$, dove P è un qualunque predicato n-ario.

Si vuole ora definire anche sull'oggetto A una $\mathscr{L}$-struttura.

Proposizione 4. *Sia P un predicato n-ario e siano $x, y\colon U \to G(X, B)^n$ tali che $r^n x = r^n y$.*

Allora esiste un $v\colon Y \rightarrowtail X$ in ∇ tale che $G(v, B)^n x \leqslant \Psi_Y(P)$ se e solo se esiste un $v'\colon Y' \rightarrowtail X$ in ∇ tale che $G(v', B)^n y \leqslant \Psi_{Y'}(P)$.

Dimostrazione. Se $r^n x = r^n y$, allora $r\varepsilon_i x = r\varepsilon_i y$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e dunque $r\varepsilon_1\{\varepsilon_i x, \varepsilon_i y\} = r\varepsilon_2\{\varepsilon_i x, \varepsilon_i y\}$. La Definizione 3 ci assicura allora che, per ogni $i = 1, \dots, n$ esiste $v_i\colon Y_i \rightarrowtail X$ in ∇ tale che

$$G(v_i, B)\,\varepsilon_i x = G(v_i, B)\,\varepsilon_i y\,. \tag{5}$$

Supponiamo inoltre che esista un $v\colon Y \rightarrowtail X$ in ∇ per cui

$$G(v, B)^n x \leqslant \Psi_Y(P)\,. \tag{6}$$

Sia $v' = v \cap \bigcap_{i=1}^{n} v_i\colon Y' \rightarrowtail X$; per la Definizione 1, v' esiste e appartiene al filtro ∇. Si vuole dimostrare che

$$G(v', B)^n y \leqslant \Psi_{Y'}(P)\,. \tag{7}$$

Posto $\bar{v} = \bigcap_{i=1}^{n} v_i$ con $\bar{v} = v_i \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, dimostriamo dapprima che

$$G(\bar{v}, B)^n y = G(\bar{v}, B)^n x . \tag{8}$$

Infatti, per ogni $i = 1, \ldots, n$

$$\varepsilon_i G(\bar{v}, B)^n y = G(\bar{v}, B)\, \varepsilon_i y = G(v_i \gamma_i, B)\, \varepsilon_i y = G(\gamma_i, B)\, G(v_i, B)\, \varepsilon_i y .$$

Per la (5), al posto di y si può porre x nell'ultimo membro delle uguaglianze e dunque, per ogni $i = 1, \ldots, n$ $\varepsilon_i G(\bar{v}, B)^n y = \varepsilon_i G(\bar{v}, B)^n x$.

Sia ora $v' = \bar{v}\alpha = v\beta$. Allora per la (8)

$$G(v', B)^n y = G(\alpha, B)^n G(\bar{v}, B)^n y = G(\alpha, B)^n G(\bar{v}, B)^n x = G(v', B)^n x .$$

Ma la (6) ci assicura che

$$G(v', B)^n x = G(\beta, B)^n G(v, B)^n x \leqslant G(\beta, B)^n \Psi_Y(P) .$$

Ora, poichè $\{\mathscr{B}_Y\}_{Y \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}}$ è uniforme, $G(\beta, B)$ è un omomorfismo di strutture (cfr. [**1**]$_2$) e dunque $G(\beta, B)^n \Psi_Y(P) \leqslant \Psi_{Y'}(P)$. Si conclude, dunque, che

$$G(v', B)^n y \leqslant \Psi_{Y'}(P) .$$

Sia ora P un qualunque predicato n-ario e sia $u\colon R \rightarrowtail A^n$. In virtù della Proposizione 4 sembra ragionevole considerare la seguente condizione:

(*) *per ogni* $x\colon U \to G(X, B)^n$, $r^n x$ *si scompone attraverso* u *se e solo se esiste* $v\colon Y \rightarrowtail X$ *in* ∇ *tale che* $G(v, B)^n x \leqslant \Psi_Y(P)$.

Osservazione 1. La condizione (*) determina $[u]$. Siano, infatti, $u\colon R \rightarrowtail A^n$ e $u'\colon R' \rightarrowtail A^n$ soddisfacenti la (*). Si ha allora, per ogni $x\colon U \to G(X, B)^n$, $r^n x \leqslant u$ se e solo se $r^n x \leqslant u'$. Per il Lemma 2 questo ci permette di asserire che esistono $\alpha\colon R \to R'$ e $\alpha'\colon R' \to R$ tali che $u = u'\alpha$ e $u' = u\alpha'$ e dunque che $[u] = [u']$.

L'Osservazione 1 ci consente di dare la seguente

Definizione 5. Indicheremo con $\mathscr{A} = (A, \Phi)$ la $\mathscr{L}$-struttura, quando esiste, che interpreta ciascun predicato P in $[u]$ con u soddisfacente la (*). La chiameremo *potenza generalizzata di* $\mathscr{B}$ *secondo* X, *ridotta rispetto a* ∇.

Proposizione 5. *La ritrazione* $r\colon G(X, B) \to A$, *associata a* ∇ *è un omomorfismo di strutture.*

Dimostrazione. Sia P un predicato n-ario e sia $\Psi(P)\colon T \rightarrowtail B^n$ la sua interpretazione in $\mathscr{B}$. Si tratta di dimostrare che esiste $\vartheta\colon G(X, B) \to R$ tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd}
G(X,B)^n \arrow[r, "r^n"] & A^n \\
G(X,T) \arrow[u, tail, "\Psi_X(P)"] \arrow[r, dashed, "\vartheta"'] & R \arrow[u, tail, "\Phi(P)"']
\end{tikzcd}$$

Sia $x\colon U \to G(X, T)$ qualunque; dal momento che $1_X \in \nabla$ e che

$$G(1_X, B)^n \Psi_X(P)\, x = \Psi_X(P)\, x \leqslant \Psi_X(P)\ ,$$

per la $(*)$ il morfismo $r^n \Psi_X(P)\, x$ si scompone attraverso $\Phi(P)$. Per il Lemma 2, esiste allora $\vartheta\colon G(X, T) \to R$ tale che $r^n \Psi_X(P) = \Phi(P)\, \vartheta$.

5 – Sia $\mathscr{B}^* = (B, \Psi^*)$ una $\mathscr{L}$-interpretazione associata a $\mathscr{B}$ (cfr. $[\mathbf{1}]_1$). Sappiamo, da $[\mathbf{1}]_3$, che per ogni $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}$, $\mathscr{B}^*_Y = G(Y, \mathscr{B}^*)$ è una $\mathscr{L}$-interpretazione associata a $\mathscr{B}_Y$ e che per ogni $h\colon Y \rightarrowtail X$, $G(h, B)$ è un omomorfismo di $\mathscr{L}$-interpretazioni.

In tutto il paragrafo, indicheremo con $\mathscr{A}^* = (A, \Phi^*)$ la $\mathscr{L}$-interpretazione associata ad $\mathscr{A}$, definita come segue: per ogni simbolo funzionale n-ario ω

$$\Phi^*(\omega) = r \Psi^*_X(\omega)(r')^n, \tag{9}$$

dove r' è un (arbitrario ma) fissato inverso destro di r.

Osservazione 2. Si osservi che la (9) definisce su A quell'unica struttura per cui r è un omomorfismo, come segue dalla Proposizione 1, se si dimostra che ogni ritrazione $r\colon G(X, B) \twoheadrightarrow A$ associata a ∇ è compatibile con $\mathscr{B}^*$.

Sia dunque $\omega \in \Omega(n)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ (fissato) e siano $x, y\colon Z \to G(X, B)^n$ tali che $r\varepsilon_i x = r\varepsilon_i y$ e $\varepsilon_j x = \varepsilon_j y$ per $j \neq i$. Per la Definizione 3, esiste $v\colon Y \rightarrowtail X$

tale che $v \in \nabla$ e $G(v, B)\varepsilon_i x = G(v, B)\varepsilon_i y$. Indicate ora, per brevità, con ω_X e ω_Y rispettivamente le interpretazioni di ω in $\mathscr{B}_X^*$ e $\mathscr{B}_Y^*$ e ricordando che $G(v, B)$ è un omomorfismo, si ha

$$G(v, B)\,\omega_X x = \omega_Y G(v, B)^n x = \omega_Y G(v, B)^n y = G(v, B)\,\omega_X y\ .$$

Dunque, per la Definizione 3, questo ci assicura che è anche $r\omega_X x = r\omega_X y$.

Si vuole ora dimostrare che una qualunque formula H del tipo SH si conserva per potenze ridotte generalizzate, anzi che se H è vera in $\mathscr{B}^*$ allora è vera in $\mathscr{A}^*$. Premettiamo alcuni lemmi.

Lemma 3. *Siano* $\mathscr{C}^* = (C, \Psi^*)$ *e* $\mathscr{D}^* = (D, \Phi^*)$ *due* $\mathscr{L}$*-interpretazioni e sia* $h\colon \mathscr{C}^* \to \mathscr{D}^*$ *un omomorfismo di interpretazioni. Sia poi* $H_0 = P(t_1, \ldots, t_m)$ *una* SH *atomica di rango* n *e* $g\colon Z \to C^n$;

$$se \quad \models_{\mathscr{C}^*} H_0[g] \qquad allora \qquad \models_{\mathscr{D}^*} H_0[h^n g]\ .$$

Dimostrazione. Sia $\models_{\mathscr{C}^*} P(t_1, \ldots, t_m)[g]$, cioè $\{\Psi^*(t_1), \ldots, \Psi^*(t_m)\}\, g \leqslant \Psi(P)$. Ne segue che

$$h^m\{\Psi^*(t_1), \ldots, \Psi^*(t_m)\}\, g = \{h\Psi^*(t_1), \ldots, h\Psi^*(t_m)\}\, g \leqslant h^m \Psi(P)\ .$$

Poichè h è un omomorfismo,

$$h\Psi^*(t_i) = \Phi^*(t_i)\, h^n \qquad \text{e} \qquad h^m \Psi(P) \leqslant \Phi(P)\ ,$$

da cui

$$\{\Phi^*(t_1), \ldots, \Phi^*(t_m)\}\, h^n g = \{\Phi^*(t_1)\, h^n, \ldots, \Phi^*(t_m)\, h^n\}\, g \leqslant \Phi(P)\ ,$$

cioè $\models_{\mathscr{D}^*} P(t_1, \ldots, t_m)[h^n g]$.

Corollario 1. *Siano* $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}$, $f\colon Y \to X$, H_0 *una* SH *atomica di rango* n, $g\colon C \to G(X, B)^n$;

$$se \quad \models_{\mathscr{B}_X^*} H_0[g] \qquad allora \qquad \models_{\mathscr{B}_Y^*} H_0[G(f, B)^n g]\ .$$

Dimostrazione. Com'è già stato osservato, $G(f, B)^n$ è un omomorfismo di $\mathscr{L}$-interpretazioni.

Lemma 4. *Sia* $H_0 = P(t_1, \ldots, t_m)$ *una* SH *atomica di rango* n *e sia* $x\colon U \to A^n$. *Allora* $\models_{\mathscr{A}^*} H_0[x]$ *se e solo se esiste* $v\colon Y \rightarrowtail X$ *in* ∇ *tale che*

$$\models_{\mathscr{B}^*_Y} H_0[G(v, B)^n (r')^n x] .$$

Dimostrazione. $\models_{\mathscr{A}^*} H_0[x]$ se e solo se $\{\Phi^*(t_1), \ldots, \Phi^*(t_m)\}\, x \leqslant \Phi(P)$. Essendo r un omomorfismo, la (9) si estende ai termini e quindi per ogni $i=1, \ldots, m$, $\Phi^*(t_i) = r\Psi^*_X(t_i)(r')^n$; sostituendo nella precedente disuguaglianza, si ha

$$r^m\{\Psi^*_X(t_1), \ldots, \Psi^*_X(t_m)\}(r')^n x \leqslant \Phi(P) . \tag{10}$$

La Definizione 3 ci assicura ora che la (10) è vera se e solo se esiste un $v\colon Y \rightarrowtail X$ in ∇ tale che

$$G(v, B)^m\{\Psi^*_X(t_1), \ldots, \Psi^*_X(t_m)\}(r')^n x \leqslant \Psi_Y(P) . \tag{11}$$

Ma $G(v, B)$ è un omomorfismo, quindi la (11) equivale a

$$\{\Psi^*_Y(t_1), \ldots, \Psi^*_Y(t_m)\}\, G(v, B)^n (r')^n x \leqslant \Psi_Y(P) ,$$

cioè $\models_{\mathscr{B}^*_Y} H_0[G(v, B)^n (r')^n x]$.

Lemma 5. *Sia* $H_0 = P(t_1, \ldots, t_m)$ *una* SH *atomica di rango* n *e sia* $g\colon C \to A^n$. *Si ha* $\models_{\mathscr{A}^*} H_0[g]$ *se e solo se, per ogni* $x\colon U \to C$, *esiste* $v_x\colon Y_x \rightarrowtail X$ *tale che* $v_x \in \nabla$ *e* $\models_{\mathscr{B}^*_{Y_x}} H_0[G(v_x, B)^n (r')^n gx]$.

Dimostrazione. Per il Lemma 1 di [**1**]$_3$, $\models_{\mathscr{A}^*} H_0[g]$ se e solo se, per ogni $x\colon U \to C$, $\models_{\mathscr{A}^*} H_0[gx]$. L'asserto segue allora dal Lemma 4.

Lemma 6. *Il Lemma* 5 *si estende alle* SH *che sono congiunzione di atomiche.*

Dimostrazione. Sia $H = H_1 \wedge \ldots \wedge H_k$ con le H_i atomiche di rango n e sia $g\colon C \to A^n$. Supponiamo $\models_{\mathscr{A}^*} H[g]$. Allora $\models_{\mathscr{A}^*} H_i[g]$, per ogni $i = 1, \ldots, k$. Dal Lemma 5 segue che, per ogni $x\colon U \to C$, esiste $v^i_x\colon Y^i_x \rightarrowtail X$ in ∇ tale che $\models_{\mathscr{B}^*_{Y^i_x}} H_i[G(v^i_x, B)^n (r')^n gx]$. Posto $v_x\colon v^1_x \cap \ldots \cap v^k_x\colon Y_x \rightarrowtail X$, sappiamo che $v_x \in \nabla$; inoltre, dal Corollario 1, $\models_{\mathscr{B}^*_{Y_x}} H_i[G(v_x, B)^n (r')^n gx]$ per ogni $i = 1, \ldots, k$. Dunque $\models_{\mathscr{B}^*_{Y_x}} H[G(v_x, B)^n (r')^n gx]$.

Viceversa, supponiamo che, per ogni $x\colon U \to C$, esista un $v_x\colon Y_x \rightarrowtail X$ in ∇ tale che $\models_{\mathscr{B}^*_{Y_x}} H[G(v_x, B)^n(r')^n gx]$. Allora, per ogni $i = 1, \ldots, k$

$$\models_{\mathscr{B}^*_{Y_x}} H_i[G(v_x, B)^n(r')^n gx]\,.$$

Dal Lemma 5, segue allora che, per ogni $i=1, \ldots, k$, $\models_{\mathscr{A}^*} H_i[g]$ e dunque che $\models_{\mathscr{A}^*} H[g]$.

Lemma 7. *Sia H una* SH *della forma $H_1 \to H_0$ con H_0 atomica e H_1 congiunzione di atomiche;*

$$se \quad \models_{\mathscr{B}^*} H \quad allora \quad \models_{\mathscr{A}^*} H\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\models_{\mathscr{B}^*} H$; allora per quanto esposto in [**1**]$_3$, per ogni $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}$, $\models_{\mathscr{B}^*_X} H$. Sia $g\colon C \to A^n$ e sia $\models_{\mathscr{A}^*} H_1[g]$.

Per il Lemma 6, per ogni $x\colon U \to C$, esiste $v_x\colon Y_x \to X$ in ∇ tale che $\models_{\mathscr{B}^*_{Y_x}} H_1[G(v_x, B)^n(r')^n gx]$. Dal momento che H è vera in ogni $\mathscr{B}^*_X$, è anche $\models_{\mathscr{B}^*_{Y_x}} H_0[G(v_x, B)^n(r')^n gx]$, per ogni $x\colon U \to C$. Per il Lemma 5 si può allora concludere che $\models_{\mathscr{A}^*} H_0[g]$.

Corollario 8. *Il Lemma 7 si estende a tutte le* SH.

Il Corollario 8 fornisce immediatamente il seguente

Teorema. *Una qualunque formula del tipo* SH, *vera in $\mathscr{B}$ è vera anche in $\mathscr{A}$.*

Bibliografia

[**1**] M. Servi: [•]$_1$ *Una questione di teoria dei modelli nelle categorie con prodotti finiti*, Matematiche Catania (2) **26** (1971), 307-334; [•]$_2$ *Su alcuni funtori che conservano le* SH, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **3** (1974), 291-308; [•]$_3$ SH-*formule e esponenziale generalizzato*, C.I.M.E., Bressanone Giugno 1975, II ciclo; [•]$_4$ *Questioni di algebra universale in una categoria astratta* (I), Ann. Mat. Univ. Ferrara Sez. VII **13** (1969), 93-116; [•]$_5$ *Questioni di algebra universale in una categoria astratta* (II), Ann. Mat. Univ. Ferrara Sez. VII **15** (1970), 57-92; [•]$_6$ *A generalization of the exponential functor and its connections with the* SH-*formulas*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 287-294.

Summary

Let $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$ *be three categories,* ($\mathscr{C}$ *with finite products*); *let* X *be an object in* $\mathscr{E}$, B *an object in* $\mathscr{D}$, $\mathscr{B}=(B, \Psi)$ *an* $\mathscr{L}$*-structure on* B ($\mathscr{L}$ *a first-order language*) *and let* ∇ *be a filter on* X. *We define a structure* $\mathscr{A}$, *to be called the « generalized power of* $\mathscr{B}$ *reduced modulo* ∇ » *and we prove that an* SH*-formula which is true in* $\mathscr{B}$ *is also true in* $\mathscr{A}$.

* * *