Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 239-252

A. TARSI SANTOLINI (*)

Soluzione globale di un problema di controllo per un sistema iperbolico (**)

Introduzione

Nel presente lavoro intendiamo studiare il seguente problema di teoria dei controlli: sia dato il sistema semilineare iperbolico alle derivate parziali, nella forma di Lax-Courant, nel vettore incognito $z(t, x) = \{\zeta_1(t, x), \dots, \zeta_m(t, x)\}$ e nelle variabili indipendenti $(t, x) = \{t, \xi_1, \dots, \xi_l\}$

$$\frac{\partial \zeta_i(t, x)}{\partial t} + \sum_1^l {}_k\, a_{ik}(t, x) \frac{\partial \zeta_i(t, x)}{\partial \xi_k} = \sum_1^m {}_k\, \varphi_{ik}(t, x, z)\, \lambda_k(t, u(t)) + g_i(t, x, z) \tag{1}$$

$$(i = 1, \dots, m),$$

con le condizioni

$$\zeta_i(0, x) = \psi_i(x) \qquad (i = 1, \dots, m), \tag{2}$$

al variare di (t, x) nel dominio limitato $\Omega = 0 \vdash\!\dashv T \times G$ dello spazio E^{l+1} e della funzione di « controllo » $u(t) = \{\mu_1(t), \dots, \mu_r(t)\}$ in un insieme $U(t)$ dello spazio E^r.

Assegnata una funzione $h(t, x, z, u)$ e supponendo non vuoto, al variare del controllo $u(t)$, l'insieme delle soluzioni assolutamente continue del sistema (1) (con le condizioni (2)) per le quali esista l'integrale

$$J(z, u) = \int_\Omega h\big(t, x, z(t, x), u(t)\big)\, dt\, dx\,,$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica del Politecnico, Via Bonardi 9, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 20-XII-1978.

ci proponiamo di studiare sotto quali ipotesi si possa affermare che il funzionale $J(z, u)$ è dotato di una coppia (z, u) di minimo assoluto.

Dimostreremo dapprima un teorema di semicontinuità per il funzionale $J(z, u)$ quando una successione $\{z_n(t, x)\}$ converga uniformemente in Ω e la successione delle derivate parziali converga debolmente in $L^1(\Omega)$ e poi, sotto opportune ipotesi, riguardanti essenzialmente l'ordine di infinito delle funzioni $\lambda_k(t, u)$ e $h(t, x, z, u)$ rispetto alla variabile $|u|$, al tendere di $|u|$ all'infinito, e della lipschitzianità delle funzioni $\varphi_{ik}(t, x, z)$, $g_i(t, x, z)$ rispetto alle variabili x, z e delle funzioni $a_{ik}(t, x)$, $\psi_i(x)$ rispetto alla variabile x, dimostreremo due teoremi di esistenza del minimo assoluto.

Precisamente lo scopo del nostro lavoro non è tanto la dimostrazione del teorema di semicontinuità, quanto quella dei teoremi di esistenza.

Infatti esistono, su argomenti simili a questo, molteplici lavori, dovuti in gran parte a L. Cesari ed anche a L. D. Berkovitz, riguardanti teoremi di semicontinuità con operatori $\mathscr{L}(z)$, anche non differenziali, debolmente chiusi, fra spazi di Banach.

Pertanto la linea della dimostrazione da noi seguita non presenta sostanziali novità, ma solo opportune modificazioni dovute al fatto che, nel nostro caso, il controllo $u(t)$ dipende solo dalla variabile t. L. Cesari ha dimostrato anche teoremi di esistenza del minimo assoluto in una classe debolmente compatta di soluzioni di un sistema $\mathscr{L}(z) = f$ (con condizioni al contorno di tipo molto generale) senza però fornire, proprio a causa della generalità del problema considerato, condizioni sufficienti affinchè una classe di soluzioni soddisfi a tale condizione di compattezza.

Nel nostro ordine di idee esistono lavori di D. L. Russel, riguardanti però sistemi lineari iperbolici in due variabili indipendenti con coefficienti funzioni solo di x, termine noto lineare in $u(t)$ e funzionale quadratico in u; lavori di G. Pulvirenti e G. Santagati riguardanti equazioni iperboliche lineari in due variabili indipendenti e con termine noto lineare in $u(t, x)$; un lavoro di M. B. Suryanarayna riguardante sistemi semilineari di equazioni iperboliche in due variabili indipendenti, con un problema di Darboux, ed infine un lavoro di H. Rund per un sistema di tipo molto particolare, con $U(t)$ fisso e limitato.

Esiste poi anche un lavoro di L. Cesari (cfr. $[\mathbf{2}]_1$), riguardante un problema di teoria dei controlli con un sistema di equazioni differenziali ordinarie, e noi intendiamo appunto estendere al nostro caso i risultati ottenuti nel lavoro ora citato, utilizzando allo scopo un teorema di esistenza ed unicità e maggiorazioni opportune per le soluzioni di un sistema iperbolico del tipo (1) (con le condizioni (2)), ottenute, sempre da L. Cesari, in vari lavori (cfr. $[\mathbf{2}]_6$).

1 – Introducendo i vettori $\mathscr{L}(z)$, $l(t, u(t))$, $g(t, x, z)$, $\psi(x)$ rispettivamente di componenti $\{(\partial\zeta_i/\partial t) + \sum_{k=1}^{l} a_{ik}(t, x)(\partial\zeta_i/\partial\xi_k)\}$, $\{\lambda_i(t, u(t))\}$, $\{g_i(t, x, z)\}$, $\{\psi_i(x)\}$

$(i = 1, \ldots, m)$ e la matrice $F(t, x, z)$ di elementi $\varphi_{ik}(t, x, z)$ $(i, k = 1, \ldots, m)$ riscriveremo il sistema e le condizioni (2) nella forma più compatta

$$\mathscr{L}(z) = F\big(t, x, z(t, x)\big)\, l\big(t, u(t)\big) + g\big(t, x, z(t, x)\big)\,, \qquad z(0, x) = \psi(x)\,. \tag{3}$$

Supporremo poi che il vettore $\psi(x)$ sia continuo, $\forall x \in G$; che la matrice $F(t, x, z)$ ed il vettore $g(t, x, z)$ siano misurabili in t, $\forall x \in G$ e $\forall z$, e continui in x, z, $\forall t \in 0\vdash\!\dashv T$; che le funzioni $a_{ik}(t, x)$ siano misurabili in t, $\forall x \in G$, e continue in x, $\forall t \in 0\vdash\!\dashv T$ e che il vettore $l(t, u)$ sia misurabile in t, $\forall u \in U(t)$ e continuo in u, $\forall t \in 0\vdash\!\dashv T$. Supporremo infine che la funzione $h(t, x, z, u)$, definita $\forall (t, x) \in 0\vdash\!\dashv T \times G$, $\forall z$ e $\forall u \in U(t)$, sia misurabile in t, $\forall (x, z, u)$ e continua in (x, z, u), $\forall t$.

Diremo che un vettore $z(t, x)$, definito in $0\vdash\!\dashv T \times G$ ed ivi assolutamente continuo, è una *traiettoria ammissibile*, se esiste una funzione misurabile $u(t)$, definita in $0\vdash\!\dashv T$, per cui si abbia:

(α) $\mathscr{L}(z) = F\big(t, x, z(t, x)\big)\, l\big(t, u(t)\big) + g\big(t, x, z(t, x)\big)$ q.o. in $0\vdash\!\dashv T \times G$,
(β) $z(0, x) = \psi(x)$,
(γ) $u(t) \in U(t)$ q.o. in $0\vdash\!\dashv T$,
(δ) $h\big(t, x, z(t, x), u(t)\big) \in L^1(0\vdash\!\dashv T \times G)$.

La funzione $u(t)$ si dirà allora un *controllo ammissibile* e la coppia (z, u) una coppia ammissibile (¹).

Consideriamo ora lo spazio $C^m(G)$ dei vettori $\mathscr{Z} = \{z(x),\ x \in G\}$ ad m componenti e continui in G, munito della consueta metrica lagrangiana, ed introduciamo, generalizzando quanto fatto da Cesari in [**2**]$_1$ la trasformazione $Q(t, \mathscr{Z})$ che ad ogni $t \in 0\vdash\!\dashv T$, $\mathscr{Z} \in C^m(G)$ fa corrispondere l'insieme $Q(t, \mathscr{Z})$ degli elementi $(\eta, y) \in E^{m+1}$, definito come segue

$$Q(t, \mathscr{Z}) = \Big\{(\eta, y) \colon \eta \geqslant \int_G h\big(t, x, z(x), u\big)\, dx,\ y = l(t, u),\ \forall u \in U(t)\Big\}\,.$$

Diremo che la trasformazione $Q(t, \mathscr{Z})$ gode della proprietà (Q) rispetto a $\mathscr{Z}$ se, $\forall t \in 0\vdash\!\dashv T$ e $\forall \mathscr{Z} \in C^m(G)$ risulta

$$Q(t, \mathscr{Z}) = \bigcap_{\delta > 0} \operatorname{cl} \operatorname{co} Q(t, \mathscr{Z}, \delta)\,,$$

(¹) Per quanto riguarda l'esistenza di soluzioni del sistema (3) con le condizioni (4), cfr. [**4**] e [**5**].

dove $Q(t, \mathscr{X}, \delta) = \bigcup Q(t, \mathscr{X}')$, $\forall \|\mathscr{X}' - \mathscr{X}\| < \delta$ e con $\mathrm{cl\,co}\, Q(t, \mathscr{X}, \delta)$ si intende la chiusura dell'involucro convesso di tale insieme.
La trasformazione $Q(t, \mathscr{X})$ gode di varie proprietà, la cui dimostrazione è del tutto analoga a quella seguita in [2]$_1$; pertanto ci limiteremo ad enunciare quelle che ci serviranno immediatamente.

Una condizione sufficiente affinchè la trasformazione $Q(t, \mathscr{X})$ goda della proprietà (Q) è che l'insieme $Q(t, \mathscr{X})$ sia chiuso e convesso e che la trasformazione $Q(t, \mathscr{X})$ sia semicontinua inferiormente rispetto a $\mathscr{X}$.

L'insieme $Q(t, \mathscr{X})$ è certamente chiuso se l'insieme $U(t)$ è compatto, oppure se $U(t)$ è chiuso e $|l(t, u)| \to \infty$ per $|u| \to \infty$.

L'insieme $Q(t, \mathscr{X})$ risulta poi convesso se l'insieme $\tilde{Q}(t)$ di E^m definito come segue $\tilde{Q}(t) = \{y : y = l(t, u) \ \ \forall u \in U(t)\}$ è un insieme convesso, se esiste $F^{-1}(t, x, z)$, se la trasformazione $y = l(t, u)$ è invertibile rispetto alla u e se la funzione $h(t, x, z, l^{-1}(t, y))$ è convessa rispetto alla variabile y.

La trasformazione $Q(t, \mathscr{X})$ è poi semicontinua inferiormente rispetto a $\mathscr{X}$, nelle ipotesi che abbiamo fatto su $l(t, u)$ e $h(t, x, z, u)$, se $U(t)$ è compatto.

Dimostreremo ora il seguente

Teorema di semicontinuità. *Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti ipotesi:*

(a) *la trasformazione $Q(t, \mathscr{X})$ goda della proprietà (Q);*

(b) *$\forall \varepsilon > 0$ esista un insieme chiuso $V \subseteq 0 \vdash\!\dashv T$ con $m(0 \vdash\!\dashv T - V) < \varepsilon$ tale che $U(t)$ sia compatto e semicontinuo inferiormente in V;*

(c) *la funzione $h(t, x, z, u)$ sia non negativa;*

(d) *esista la matrice inversa $F^{-1}(t, x, z)$;*

(e) *esista una successione di traiettorie ammissibili $\{z_n(t, x)\}$, con derivate equilimitate in $L^1(0 \vdash\!\dashv T \times G)$ per cui si abbia:*

$$\lim_{n\to\infty} z_n(t, x) = z(t, x) \qquad \textit{uniformemente in } 0 \vdash\!\dashv T \times G, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \frac{\partial z_n(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} \tag{5}$$

$$\textit{in } L^1(0 \vdash\!\dashv T \times G),$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \frac{\partial z_n(t, x)}{\partial \xi_k} = \frac{\partial z(t, x)}{\partial \xi_k} \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} J(z_n, u_n) = \gamma; \tag{7}$$

allora anche $z(t, x)$ *è una traiettoria ammissibile e risulta*

$$\lim_{n\to\infty} J(z_n, u_n) \geqslant J(z, u) . \tag{8}$$

Dimostrazione. Per l'ipotesi (d) e per le (4), (5), (6) possiamo affermare che la successione $\{F^{-1}(t, x, z_n(t, x))[\mathscr{L}(z_n) - g(t, x, z_n(t, x))]\}$ converge debolmente in $L^1(0 \vdash\!\dashv T \times G)$ verso $F^{-1}(t, x, z(t, x))[\mathscr{L}(z) - g(t, x, z(t, x))]$; anzi risultando funzione della sola t, converge debolmente in $L^1(0 \vdash\!\dashv T)$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} F^{-1}(t, x, z_n(t, x))[\mathscr{L}(z_n) - g(t, x, z_n(t, x))]$$

$$= F^{-1}(t, x, z(t, x))[\mathscr{L}(z) - g(t, x, z(t, x))] \qquad \text{in } L^1(0 \vdash\!\dashv T) .$$

Pertanto, per un corollario del teorema di Mazur (cfr. [**6**], pag. 36) comunque si prenda un intero j, esistono due interi n_j e k_j ed un insieme di numeri reali $\{\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jk_j}\}$ con

$$\alpha_{ji} \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, k_j) , \qquad \sum_{1}^{k_j}{}_i\, \alpha_{ji} = 1 , \qquad n_{j+1} \geqslant n_j + k_j , \tag{9}$$

tali che la successione

$$\Phi_j(t) = \sum_{1}^{k_j}{}_i\, \alpha_{ji} F^{-1}(t, x, z_{n_j+i}(t, x))[\mathscr{L}(z_{n_j+i}) - g(t, x, z_{n_j+i}(t, x))]$$

converga fortemente in $L^1(0 \vdash\!\dashv T)$ verso

$$\Phi(t) = F^{-1}(t, x, z(t, x))[\mathscr{L}(z) - g(t, x, z(t, x))] .$$

Si può pertanto estrarre una sottosuccessione, che chiameremo ancora con lo stesso nome, per cui risulti

$$\lim_{j\to\infty} \Phi_j(t) = \Phi(t) \qquad \text{q.o. in } 0 \vdash\!\dashv T . \tag{10}$$

Consideriamo ora la successione

$$\omega_j(t) = \sum_{1}^{k_j}{}_i\, \alpha_{ji} \int_G h(t, x, z_{n_j+i}(t, x), u_{n_j+i}(t))\, dx$$

e sia $\omega(t) = \min\lim\limits_{j\to\infty} \omega_j(t)$. Proviamo che $\omega(t) \in L^1(0 \vdash\!\dashv T)$.

Infatti dall'ipotesi (c) segue $\omega(t) \geqslant 0$, inoltre dalle (8) e (9) si ottiene

$$\int_0^T \omega(t)\,dt \leqslant \min\lim_{j\to\infty} \sum_1^{k_j} {}_i\, \alpha_{ji} \int_0^T dt \int_G h\big(t, x, z_{n_j+i}(t, x), u_{n_j+i}(t)\big)\,dx \tag{11}$$

$$\leqslant \min\lim_{j\to\infty} \sum_1^{k_j} {}_i\, \alpha_{ji} J(z_{n_j+i}, u_{n_j+i}) = \gamma\,.$$

Dimostriamo ora che

$$\big(\omega(t), \Phi(t)\big) \in Q\big(t, \mathscr{Z}(t)\big) \qquad \text{q.o. in } 0 \vdash\!\dashv T\,. \tag{12}$$

Sia infatti V un sottoinsieme di $0 \vdash\!\dashv T$ in cui $\omega(t)$ sia finita e siano soddisfatte inoltre le seguenti condizioni

$$u_n(t) \in V(t) \quad \forall n\,, \qquad \lim_{j\to\infty} \Phi_j(t) = \Phi(t)\,, \qquad m(V) = T\,, \tag{13}$$

e sia t_0 un punto di V. Possiamo allora estrarre dalla successione $\omega_j(t_0)$ una sottosuccessione, che chiameremo ancora con lo stesso nome, tale che si abbia

$$\lim_{j\to\infty} \omega_j(t_0) = \omega(t_0)\,. \tag{14}$$

Ricordando allora come è stato definito l'insieme $Q(t, \mathscr{Z})$ risulta

$$\Big(\int_G h\big(t_0, x, z_{n_j+i}(t_0, x)\big)\,dx,\ F^{-1}(t_0, x, z_{n_j+i})[\mathscr{L}(z_{n_j+i}) - g(t_0, x, z_{n_j+i})]\Big) \tag{15}$$

$$\in Q\big(t_0, \mathscr{Z}_{n_j+i}(t_0)\big)$$

da cui, per la (4), almeno in j abbastanza grande, segue

$$\Big(\int_G h\big(t_0, x, z_{n_j+i}(t_0, x)\big)\,dx,\ F^{-1}(t_0, x, z_{n_j+i})[\mathscr{L}(z_{n_j+i}) - g(t_0, x, z_{n_j+i})]\Big)$$

$$\in Q\big(t_0, \mathscr{Z}(t_0), \delta\big)\,.$$

Avremo allora

$$\big(\omega_j(t_0), \Phi_j(t_0)\big) \in \operatorname{co} Q\big(t_0, \mathscr{Z}(t_0), \delta\big)$$

e dalla (10) e (14) si ottiene

$$\big(\omega(t_0), \Phi(t_0)\big) \in \operatorname{cl}\operatorname{co} Q\big(t_0, \mathscr{Z}(t_0), \delta\big)\,,$$

ovvero anche

$$\big(\omega(t_0),\ \Phi(t_0)\big) \in \bigcap_{\delta>0} \operatorname{cl}\operatorname{co} Q\big(t_0, \mathscr{Z}(t_0), \delta\big)\ ,$$

cioè la (12), poichè la trasformazione $Q(t, \mathscr{Z})$ gode della proprietà (Q).

Il fatto che la (12) sia verificata q.o. in $0 \vdash\!\dashv T$ implica l'esistenza di una funzione $u(t) \in U(t)$ q.o. in $0 \vdash\!\dashv T$, per cui sono soddisfatte le seguenti condizioni

$$(16) \qquad \begin{aligned} &\mathscr{L}(z) = F\big(t, x, z(t, x)\big)\, l\big(t, u(t)\big) + g\big(t, x, z(t, x)\big) \qquad \text{q.o. in } 0 \vdash\!\dashv T \times G\ ,\\ &\omega(t) \geqslant \int_G h\big(t, z, z(t, x), u(t)\big)\, dx \quad \text{q.o. in } 0 \vdash\!\dashv T, \qquad z(0, x) = \psi(x)\ . \end{aligned}$$

Di qui e dal fatto che $\omega(t) \in L^1(0 \vdash\!\dashv T)$ si ricava anche $h\big(t, x, z(t, x), u(t)\big) \in L^1(0 \vdash\!\dashv T \times G)$; potremo pertanto affermare che la coppia (z, u) è una coppia ammissibile se proveremo che $u(t)$ è misurabile. Il teorema sarà allora completamente dimostrato, poichè dalla (11) e dalla (16) segue

$$J(z, u) = \int_0^T \int_G h\big(t, x, z(t, x), u(t)\big)\, dt\, dx \leqslant \int_0^T \omega(t)\, dt \leqslant \gamma = \lim_{n\to\infty} J(z_n, u_n)\ .$$

Dimostriamo dunque che $u(t)$ è misurabile. $\forall\varepsilon$ esiste, per l'ipotesi (b) e per la misurabilità di $l(t, u)$ e di $\int_G h\big(t, x, z(t, x), u\big)\, dx$ rispetto alla t, un insieme chiuso $V \in 0 \vdash\!\dashv T$ con $m(0 \vdash\!\dashv T - V) < \varepsilon$, tale che $\forall t \in V$ l'insieme $U(t)$ sia compatto e semicontinuo inferiormente e le funzioni $l(t, u)$, $\int_G h\big(t, x, z(t, x), u\big)\, dx$ siano continue rispetto a t. Sia $\mathscr{D}_V$ l'insieme di $V \times E^r$ definito ponendo $\mathscr{D}_V = \{(t, w) : t \in V,\ w \in U(t)\}$, che è evidentemente chiuso.

Sia poi Ω_V l'insieme di $V \times E^r \times E^1$ definito ponendo $\Omega_V = \{(t, w, \lambda) : (t, w) \in \mathscr{D}_V,\ \lambda \geqslant \int_G h\big(t), x, z(t, x), w\big)\, dx$ che è evidentemente un insieme chiuso e pertanto può essere ottenuto come unione di una infinità numerabile di insiemi compatti. Possiamo inoltre sempre supporre che, $\forall t \in V$, si abbia $\big(\eta(t), y(t)\big) \in Q\big(t, \mathscr{Z}(t)\big)$. Consideriamo ora la trasformazione Φ da V in $V \times E^{m+1}$ $t \to \big(t, \eta(t), y(t)\big)$, che chiaramente è misurabile e la trasformazione Γ da Ω_V in $V \times E^{m+1}$ $(t, \lambda, w) \to \big(t, \lambda, l(t, w)\big)$, che evidentemente è continua ed inoltre $\Phi(V) \subseteq \Gamma(\Omega_V)$.

Sono pertanto verificate le ipotesi dell'estensione del Lemma di Filippov, dovuta a Mac-Shane-Warfield; pertanto esiste una funzione misurabile $u(t)$ definita in V, tale che risulti $\big(t, \lambda(t), l\big(t, u(t)\big)\big) = \big(t, \eta(t), y(t)\big)$, $\forall t \in V$.

Dimostreremo ora il seguente

Teorema I di esistenza. *Supponiamo che siano soddisfatte le ipotesi* (a), (b), (c) *e che siano verificate inoltre le seguenti condizioni*:

(d) *esistano quattro costanti* A, H, H_1 *e* H_2 *tali che si abbia*

$$|F(t, x, z) - F(t, \bar{x}, \bar{z})| \leqslant H\{|x - \bar{x}| + |z - \bar{z}|\}, \tag{17}$$

$$|F(t, x, z)| \leqslant H_1|z| + H_2, \tag{18}$$

$$|\psi(x) - \psi(\bar{x})| \leqslant A|x - \bar{x}|; \tag{19}$$

(e) *esistano cinque funzioni sommabili in* $0 \vdash\!\dashv T$, *per cui risulti*

$$|a_{ik}(t, x) - a_{ik}(t, \bar{x})| \leqslant a(t)|x - \bar{x}|, \tag{20}$$

$$|a_{ik}(t, x)| \leqslant a_1(t), \tag{21}$$

$$|g(t, x, z) - g(t, \bar{x}, \bar{z})| \leqslant b(t)\{|x - \bar{x}| + |z - \bar{z}|\}, \tag{22}$$

$$|g(t, x, z)| \leqslant b_1(t)|z| + b_2(t); \tag{23}$$

(f) *esistano un numero reale* $\alpha > 0$ *ed una funzione* $\Phi(x, \zeta)$ *definita e continua* $\forall x \in G$ *e* $\forall \zeta$, *tali che si abbia*

$$|l(t, u)| < A + B|u|^{\alpha}, \tag{24}$$

$$h(t, x, z, u) \geqslant \Phi(x, |u|), \tag{25}$$

$$\lim_{\zeta \to \infty} \frac{\int_G \Phi(x, \zeta)\, dx}{\zeta^{\alpha}} = +\infty; \tag{26}$$

allora il funzionale $J(z, u)$ *è dotato di minimo assoluto, se la classe delle coppie ammissibili non è vuota.*

Dimostrazione. Poichè, per l'ipotesi (f), la funzione $h(t, x, z, u)$ è non negativa, risulterà, per ogni coppia ammissibile (z, u), $J(z, u) \geqslant 0$; pertanto esiste finito $\lambda = \inf J(z, u)$. Scegliamo ora una successione minimizzante $\{z_n, u_n\}$ soddisfacente alla condizione

$$\lambda \leqslant J(z_n, u_n) \leqslant \lambda + \frac{1}{n}; \tag{27}$$

dimostreremo (cfr. [2]$_1$) per la successione $\{u_n(t)\}$ che, comunque si scelga $\varepsilon > 0$, esiste un numero δ_ε indipendente da n, tale che si abbia

(28) $$\int_E |u_n(t)|^\alpha \,dt < \varepsilon\,,$$

comunque si scelga un insieme $E \subseteq 0 \vdash\!\dashv T$, con $m(E) < \delta_\varepsilon$. Sia infatti ε un numero arbitrario e sia $\sigma = \varepsilon/2(\lambda + 1)$; per la (26) esiste un numero N per cui risulti

$$\frac{\int_G \Phi(x, \zeta)\,dx}{\zeta^\alpha} > \frac{1}{\sigma}, \quad \forall \zeta > N\,.$$

Sia poi $E \subseteq 0 \vdash\!\dashv T$ un insieme qualsiasi di misura $m(E) = \varepsilon/2N^\alpha = \delta_\varepsilon$ e sia E_{1n} il sottoinsieme di E in cui $u_n(t)$ è finito e $|u_n(t)| \leqslant N$; sia infine $E_{2n} = E - E_{1n}$ ed in tale insieme risulta $|u_n(t)|^\alpha \leqslant \sigma \int_G \Phi(x, |u_n(t)|)\,dx$.

Avremo allora

$$\begin{aligned}\int_E |u_n(t)|^\alpha\,dt &= \int_{E_{1n}} |u_n(t)|^\alpha\,dt + \int_{E_{2n}} |u_n(t)|^\alpha\,dt \\ &\leqslant m(E_{1n})N^\alpha + \sigma \int_{E_{2n}} \int_G \Phi(x, |u_n(t)|)\,dx\,dt \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sigma \int_{E_{2n}} \int_G h(t, x, z_n(t, x), u_n(t))\,dt\,dx \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sigma J(z_n, u_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sigma(\lambda + 1) = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Dimostreremo ora che le funzioni $z_n(t, x)$, definite per ipotesi in $0 \vdash\!\dashv T \times G$ ed ivi assolutamente continue, soddisfano alle condizioni (4), (5) e (6) del teorema di semicontinuità.

Sia infatti ω il massimo di $|\psi(x)|$ in G e scegliamo

$$\Omega_0 = \omega + 1\,, \qquad Q_0 = \Lambda(1 + 3m^2) + 1\,;$$

per le ipotesi (d), (e), (f), esiste (cfr. [2]$_6$) un numero σ_0, indipendente da n, tale che, $\forall t \in 0 \vdash\!\dashv \sigma_0$ si abbia

(30) $$|z_n(t, x)| \leqslant \Omega_0\,,$$

(31) $$|z_n(t, x) - z_n(t, \bar{x})| \leqslant Q_0 |x - \bar{x}|\,,$$

(32) $$|z_n(t, x) - z_n(\bar{t}, x)| \leqslant \left|\int_{\bar{t}}^{t} \chi_{0n}(t)\,dt\right|,$$

con

$$(33)\qquad \chi_{0n}(t)=2m\{(H_1\Omega_0+H_2)(A+B\,|u_n(t)|^\alpha)+b_1(t)\,\Omega_0+b_2(t)\}+R_0\,a_1(t)$$

purchè σ_0 soddisfi alle seguenti limitazioni

$$(34)\qquad \int_0^{\sigma_0} a(t)\,\mathrm{d}t\leqslant \frac{p}{Q_0}\qquad (0<p<1)\,,$$

$$(35)\qquad \int_0^{\sigma_0}\{(H_1\Omega_0+H_2)(A+B\,|u_n(t)|^\alpha)+b_1(t)\,\Omega_0+b_2(t)\}\,\mathrm{d}t + m\Lambda\int_0^{\sigma_0} a_1(t)\,\mathrm{d}t\leqslant \frac{\Omega_0-\omega}{m}\,,$$

$$(36)\qquad \int_0^{\sigma_0}\{H(A+B\,|u_n(t)|^\alpha)+b(t)\}\,\mathrm{d}t\leqslant \frac{Q_0-\Lambda(1+3m^2)}{2m(1+Q_0)}\,,$$

e purchè R_0 soddisfi alla condizione

$$(37)\qquad R_0>2\{m(1+Q_0)\int_0^{\sigma_0}\big)(H_1\Omega_0+H_2)(A+B\,|u_n(t)|^\alpha) + b_1(t)\,\Omega_0+b_2(t)\big)\,\mathrm{d}t+m^2\Lambda\}\,.$$

Per la (28) si può effettivamente scegliere σ_0, indipendente da n, in modo che siano verificate le (35) e (36); inoltre, sempre per la (28), anche R_0 non dipende da n.

Consideriamo ora, nell'intervallo $\sigma_0 \vdash\!\dashv T$, il sistema nell'incognita $z_1=z/k_1$

$$(38)\qquad \mathscr{L}(z_1)=\frac{1}{k_1}\,F(t,x,k_1z_1)\,l(t,u(t))+\frac{1}{k_1}\,g(t,x,k_1z_1)\,,$$

con le condizioni

$$z_1(\sigma_0,x)=\frac{z(\sigma_0,x)}{k_1}=\psi_1(x)\,,$$

e scegliamo k_1 così grande che si abbia

$$|\psi_1(x)|\leqslant\omega\,,\qquad |\psi_1(x)-\psi_1(\bar{x})|\leqslant\Lambda\,|x-\bar{x}|\,.$$

Risulterà, per le (17), (18), (22) e (23)

$$\left|\frac{1}{k_1} F(t, x, k_1 z_1) - \frac{1}{k_1} F(t, \bar{x}, k_1 \bar{z}_1)\right| \leqslant H\{|x - \bar{x}| + |z_1 - \bar{z}_1|\},$$

$$\left|\frac{1}{k_1} F(t, x, k_1 z_1)\right| \leqslant H_1 |z_1| + \frac{H_2}{k_1},$$

$$\left|\frac{1}{k_1} g(t, x, k_1 z_1) - \frac{1}{k_1} g(t, \bar{x}, k_1 \bar{z}_1)\right| \leqslant b(t)\{|x - \bar{x}| + |z_1 - \bar{z}_1|\},$$

$$\left|\frac{1}{k_1} g(t, x, k_1 z_1)\right| \leqslant b_1(t) |z_1| + \frac{b_2(t)}{k_1}.$$

Ripetendo allora lo stesso ragionamento, esiste un numero σ_1, indipendente da n, tale che, $\forall t \in \sigma_0 \vdash\!\dashv \sigma_1$ si abbia

$$|z_{1n}(t, x)| \leqslant \Omega_0, \tag{39}$$

$$|z_{1n}(t, x) - z_{1n}(t, \bar{x})| \leqslant Q_0 |x - \bar{x}|, \tag{40}$$

$$|z_{1n}(t, x) - z_{1n}(\bar{t}, x)| \leqslant \left|\int_{\bar{t}}^{t} \chi_{1n}(t)\, dt\right|, \tag{41}$$

con

$$\chi_{1n}(t) = 2m\ \left\{\left(H_1 \Omega_0 + \frac{H_2}{k_1}\right)(A + B|u_n(t)|^\alpha) + b_1(t)\Omega_0 + \frac{b_2(t)}{k_1}\right\} + R_1 a_1(t), \tag{42}$$

purchè σ_1 soddisfi alle seguenti limitazioni

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} a(t)\, dt \leqslant \frac{p}{Q_0} \qquad (0 < p < 1), \tag{43}$$

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \left\{\left(H_1 \Omega_0 + \frac{H_2}{k_1}\right)(A + B|u_n(t)|^\alpha) + b_1(t)\Omega_0 + \frac{b_2(t)}{k_1}\right\} + mA \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} a_1(t)\, dt \leqslant \frac{\Omega_0 - \omega}{m}, \tag{44}$$

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \{H(A + B|u_n(t)|^\alpha) + b(t)\}\, dt \leqslant \frac{Q_0 - A(1 + 3m^2)}{2m(1 + Q_0)}, \tag{45}$$

e purchè R_1 soddisfi alla condizione

$$R_1 > 2\left\{m(1+Q_0)\int_{\sigma_0}^{\sigma_1}\left[\left(H_1\Omega_0+\frac{H_2}{k_1}\right)(A+B|u_n(t)|^\alpha)+b_1(t)\Omega_0+\frac{b_2(t)}{k_1}\right]dt + m^2 A\right\}. \tag{46}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento si giunge a coprire, con un numero finito di iterazioni, tutto l'intervallo $0 \vdash\!\dashv T$; risulta pertanto dimostrato che, $\forall n$, esistono due numeri Ω e Q, indipendenti da n, ed una funzione $\chi_n(t)$, tali che si abbia

$$|z_n(t, x)| \leqslant \Omega\,, \tag{47}$$

$$|z_n(t, x) - z_n(t, \bar{x})| \leqslant Q\,|x - \bar{x}|\,, \tag{48}$$

$$|z_n(t, x) - z_n(\bar{t}, x)| \leqslant \left|\int_{\bar{t}}^{t} \chi_n(t)\,dt\right|, \tag{49}$$

con

$$\chi_n(t) = m(t) + C\,|u_n(t)|^\alpha. \tag{50}$$

Per le (28), (47), (48), (49), (50), possiamo affermare che le funzioni $\{z_n(t, x)\}$ sono equilimitate ed equiassolutamente continue; pertanto esiste una sottosuccessione, che chiameremo ancora con lo stesso nome, convergente uniformemente verso una funzione $z(t, x)$ assolutamente continua

$$\lim_{n\to\infty} z_n(t, x) = z(t, x) \qquad \text{uniformemente in } 0 \vdash\!\dashv T \times G\,. \tag{51}$$

Dalle (48) e (49) segue poi

$$\left|\frac{\partial z_n(t, x)}{\partial \xi_k}\right| \leqslant Q \quad \text{q.o. in } 0 \vdash\!\dashv T \times G\,, \qquad \left|\frac{\partial z_n(t, x)}{\partial t}\right| \leqslant \chi_n(t);$$

possiamo allora affermare, per la (28) e la (51) che le successioni $\{\partial z_n(t, x)/\partial \xi_k\}$, $\{\partial z_n(t, x)/\partial t\}$ convergono debolmente in $L^1(0 \vdash\!\dashv T \times G)$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}{}^{*} \frac{\partial z_n(t, x)}{\partial \xi_k} = \frac{\partial z(t, x)}{\partial \xi_k} \\ &\lim_{n\to\infty}{}^{*} \frac{\partial z_n(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad \text{in } L^1(0 \vdash\!\dashv T \times G)\,. \tag{52}$$

Per il teorema di semicontinuità, poichè $\lim_{n\to\infty} J(z_n, u_n) = \lambda$, esiste una coppia ammissibile (z, u) per cui si ha $J(z, u) \leqslant \lambda$. Pertanto (z, u) è la coppia di minimo assoluto per il funzionale J.

Dal teorema ora dimostrato segue immediatamente il seguente

Teorema II di esistenza. *Siano verificate le ipotesi* (a), (b), (c), (f), *le condizioni* (19), (20), (21) *e l'ipotesi seguente*

(h) $\forall \Omega > 0$ *esistano tre numeri* H_Ω, $H_{1\Omega}$, $H_{2\Omega}$ *e tre funzioni sommabili* $b_\Omega(t)$, $b_{1\Omega}(t)$, $b_{2\Omega}(t)$, *tali che*, $\forall |z| \leqslant \Omega$, *si abbia*

$$|F(t, x, z) - F(t, \bar{x}, \bar{z})| \leqslant H_\Omega\{|x - \bar{x}| + |z - \bar{z}|\},$$

$$|F(t, x, z)| \leqslant H_{1\Omega}|z| + H_{2\Omega},$$

$$|g(t, x, z) - g(t, \bar{x}, \bar{z})| \leqslant b_\Omega(t)\{|x - \bar{x}| + |z - \bar{z}|\},$$

$$|g(t, x, z)| \leqslant b_{1\Omega}(t)|z| + b_{2\Omega}(t);$$

allora il funzionale $J(z, u)$ *è dotato di minimo assoluto in ogni sottoinsieme della classe delle coppie ammissibili che soddisfano alla limitazione* $|z(t, x)| \leqslant \Omega$.

Bibliografia

[1] L. D. Berkovitz: $[\bullet]_1$ *Existence theorems in problems of optimal control*, Studia Mathematica **14** (1972); $[\bullet]_2$ *Existence and lower closure theorems for abstract control problems*, SIAM J. Control (1) **12** (1974); $[\bullet]_3$ *A lower closure theorem for abstract control problems with L_p-bounded controls*, J. Optimization Theory Appl. **14** (1974).

[2] L. Cesari: $[\bullet]_1$ *Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints*, Trans. Amer. Math. Soc. **124** (1966); $[\bullet]_2$ *Closure theorems for orientor fields and weak convergence*, Arch. Rational Mech. Anal. **55** (1974); $[\bullet]_3$ *An existence theorem without convexity conditions*, SIAM J. Control **12** (1974); $[\bullet]_4$ *Convexity of the range of certains integrals*, SIAM J. Control **13** [1975); $[\bullet]_5$ *Geometric and analytic views in existence theorems for optimal control* II. *Distributed and boundary controls*, J. Optimization Theory Appl. **15** (1975); $[\bullet]_6$ *A boundary value problem for quasi-linear hyperbolic sistems in the Schauder canonic form*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) **1** (1974).

[3] L. CESARI and M. B. SURYANARAYANA: [•]$_1$ *Convexity and property (Q) in optimal control theory*, SIAM J. Control. **12** (1974); [•]$_2$ *Closure theorems without seminormality conditions*, J. Optimization Theory Appl. **5** (1975).

[4] S. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*, Ed. Cremonese, Roma 1963.

[5] E. J. MCSHANE and R. B. WARFIELD, *On Filippov's implicit function lemma*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967).

[6] C. B. MORREY, *Functions of several variables and absolute continuity* II, Duke Math. J. **6** (1940).

[7] G. PULVIRENTI, *Controlli lineari per processi di controllo con parametri concentrati*, Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari **128** (1972).

[8] H. RUND, *Sufficiency conditions for multiple integral control problems*, J. Optimization Theory Appl. **13** (1973).

[9] D. L. RUSSEL, *Optimal regulation of linear symmetric hyperbolic systems with finite dimensional controls*, SIAM J. Control **4** (1966).

[10] G. SANTAGATI, *Alcuni problemi di teoria dei controlli relativi ad un processo di controllo con parametri distribuiti*, Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari **129** (1972).

[11] M. B. SURYANARAYANA, *Existence theorems for optimization problems concerning hyperbolic partial differential equations*, J. Optimization Theory Appl. **15** (1975).

* * *