Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 253-271

LUISA ROSSI COSTA (*)

Su un'equazione parabolica degenere (**)

Introduzione

Nelle note [10]$_3$ e [1], Pagani e Arena, rispettivamente, hanno studiato problemi ai limiti per le equazioni

$$|x|^p u_y - u_{xx} = 0 , \tag{0.1}$$

$$\operatorname{sign} x \, |x|^p u_y - u_{xx} = 0 , \tag{0.2}$$

in corrispondenza ai valori del parametro reale $p > -1$ (Pagani) e $p = -1$ (Arena), provando teoremi di esistenza ed unicità di soluzioni in adeguati spazi di Sobolev con peso.

L'importanza delle (0.1) e (0.2), equazioni di tipo ellittico-parabolico degeneri sulla retta $x = 0$, è legata al fatto che alcuni problemi di cinetica e processi stocastici richiedono l'uso di equazioni di questo tipo (cfr. Bauendi-Grisvard [2], Brezis-Rosenkrantz-Singer [3], Pagani [10]$_{1,4}$).

Altri autori (cfr. [5], [6], [9], [10]$_2$, [11]) le hanno studiate in casi particolari e da diversi punti di vista; Kohn e Nirenberg in [8] hanno formulato una teoria che non risulta tuttavia applicabile ai problemi che vengono qui considerati.

Lo scopo di questa nota è di estendere i risultati ottenuti da Pagani ed Arena ai valori del parametro $p < -1$, pur essendo le equazioni fortemente degeneri sulla retta $x = 0$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Politecnico, P.za Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 25-I-1979.

Si noti che per fare ciò basta esaminare i valori di p che appartengono all'intervallo $[-2, -1)$, in quanto con il seguente cambiamento di variabile e di funzione incognita

$$x = \frac{1}{\xi}\,, \qquad u(x, y) = \frac{1}{\xi}\, v(\xi, y)\,, \tag{0.3}$$

le (0.1) e (0.2) diventano rispettivamente

$$|\xi|^{-p-4} v_y - v_{\xi\xi} = 0\,, \tag{0.4}$$

$$\operatorname{sign}\xi\, |\xi|^{-p-4} v_y - v_{\xi\xi} = 0\,, \tag{0.5}$$

da cui appare che i risultati ottenuti per $p > -2$, valgono anche per $p < -2$.

Questa particolarità si presenta ancor più evidente introducendo il parametro q definito dalla relazione

$$q = p + 2\,; \tag{0.6}$$

basta quindi studiare i casi in cui q assume valori non negativi per avere una analisi completa delle equazioni in questione. Se il parametro p assume il valore « di separazione » -2 le equazioni (0.1) e (0.2) presentano una natura molto particolare.

Al variare di p in $(-2, -1)$, pur dovendo modificare opportunamente gli spazi di Sobolev $\mathscr{W}$ in cui ricercare di volta in volta la soluzione [1], è possibile studiare allo stesso modo e con risultati analoghi i due seguenti problemi ai limiti.

(A) Trovare una soluzione della (0.2) definita in X_+ (il semipiano $x > 0$) tale che

$$u(0, y) = \varphi(y) \qquad \text{per } (-\infty < y < +\infty)\,. \tag{0.7}$$

(B) Trovare una soluzione definita in Q_+ (il quadrante $x > 0$, $y > 0$) tale che

$$u(x, 0) = h(x) \qquad \text{per } x > 0\,, \tag{0.8}$$

$$u(0, y) = 0 \qquad \text{per } y > 0\,. \tag{0.9}$$

---

[1] Si lavora separatamente in ciascuno degli infiniti intervalli $-2 + 1/n < p < -2 + 1/(n-1)$, $n(\text{intero}) \geqslant 2$.

Dai risultati ottenuti nello studio dei problemi (A) e (B) si deduce la possibilità di risolvere il problema

(C) Trovare una soluzione della (0.2) definita in Y_+ (il semipiano $y > 0$) tale che

$$u(x, 0) = h(x), \qquad \text{per } x > 0 . \tag{0.10}$$

Va rilevato che nel trattare il problema (C) sorgono difficoltà in quanto l'equazione (0.2) cambia carattere attraversando il semiasse positivo delle y ($x = 0$, $y > 0$); infatti la (0.2) è di tipo parabolico «in avanti» per $x > 0$, parabolico «all'indietro» per $x < 0$, oltre ad essere degenere sullo stesso semiasse.

La soluzione del problema (C) si ottiene assegnando un opportuno dato fittizio sull'asse y e determinando le soluzioni dell'equazione (0.2) nel quadrante Q_+ e nel semipiano X_- ($x < 0$) a partire da tale dato. Si chiede che le funzioni così ottenute e le loro derivate rispetto ad x si raccordino «abbastanza bene» sul semiasse y positivo. Questo raccordo si realizza soltanto per alcuni valori di p, precisamente per $p \in (-3/2, -1)$ mediante una tecnica già utilizzata nei casi $p \geqslant -1$ che conduce alla risoluzione di un'equazione integrale di Wiener-Hopf.

Si nota che, mentre nei casi $p > -1$ l'equazione di Wiener-Hopf ha nucleo localmente sommabile, già nel caso $p = -1$ il nucleo è singolare e la singolarità si accentua al decrescere di p.

Per $p \in (-3/2, -1)$, tuttavia, fissando opportunamente la funzione incognita, si fa rientrare l'equazione integrale in una classe di equazioni a nucleo singolare K legato alla trasformata di Hilbert del tipo

$$K = \lambda \cdot (\text{delta di Dirac}) + \mu \cdot \left(\text{valor principale di } \frac{1}{\pi x}\right) \text{ con } \frac{\lambda}{i\mu} \notin [-1, 1] ,$$

alle quali sono applicabili alcuni risultati riportati in [**12**]. Si osserva che nel caso particolare $p = -1$, $\lambda/i\mu \in (-1, 1)$, ma l'equazione è ancora trattabile mediante risultati riportati in [**12**].

In **1** si definiscono e caratterizzano gli spazi funzionali utilizzati nel seguito e si enunciano teoremi di traccia; in **2** si risolve il problema (A), in **3** il problema (B) e si fanno alcune considerazioni sulla traccia della derivata rispetto ad x della soluzione sul semiasse y positivo; in **4** si risolve il problema (C) e si studia l'equazione di Wiener-Hopf ad esso collegata.

1 - Spazi di funzioni e teoremi di traccia

1.1 – Sia $-2 + 1/n < p \leqslant -2 + 1/(n-1)$, con n (intero) $\geqslant 2$. Si definiscono alcuni spazi di funzioni che saranno utilizzati nel seguito.

$\mathscr{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ indica, come di consueto, lo spazio delle funzioni infinitamente differenziabili, a supporto compatto in $\boldsymbol{R}^2$.

$\mathscr{C}_0^\infty(\overline{G})$, ove G è un sottoinsieme aperto di $\boldsymbol{R}^2$, è lo spazio delle restrizioni a $\overline{G}$ di funzioni appartenenti a $\mathscr{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$.

$\mathscr{W}(G)$ è il completamento di $\mathscr{C}_0^\infty(\overline{G})$ rispetto alla norma

$$\|u\|_{\mathscr{W}(G)} = \Big(\iint_G [(|x|^{-\frac{1}{2}+1/n}|u_y|)^2 + (|x|^{-p-\frac{1}{2}+1/n}|u_{xx}|)^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{2}} . \tag{1.1}$$

Inoltre

$$\mathscr{W}_0(Q_+) = \Big\{u \in \mathscr{W}(Q_+):\ \operatorname*{ess\,sup}_{y>0} \int_0^{+\infty} |x|^{-q-1+2/n}|u|^2\,\mathrm{d}x < +\infty\Big\} ,$$

con norma

$$\|u\|^2_{\mathscr{W}_0(Q_+)} = \|u\|^2_{\mathscr{W}(Q_+)} + \operatorname*{ess\,sup}_{y>0} \int_0^{+\infty} |x|^{-q-1+2/n}|u|^2\,\mathrm{d}x . \tag{1.2}$$

Dalla definizione di $\mathscr{W}(G)$ si possono ricavare alcune proprietà della derivata distribuzionale rispetto ad x di u.

Lemma 1.1 *La derivata u_x di funzioni $u \in \mathscr{W}(Y_+)$ verifica la seguente diseguaglianza*

$$\iint_{Y_+} |x|^{-2p-3+2/n}|u_x|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant C_n^2 \iint_{Y_+} |x|^{-2p-1+2/n}|u_{xx}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y , \tag{1.3}$$

ove $C_n = n(n-1)/(n(n-1)-1)$.

Lemma 1.2. *La derivata u_x di funzioni $u \in \mathscr{W}(Y_+)$ ha la seguente proprietà*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{-p-1+2/n}|u_x|^2\,\mathrm{d}x < K_n\Big\{\iint_{Y_+} |x|^{-1+2/n}|u_y|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{Y_+} |x|^{-2p-1+2/n}|u_{xx}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big\} \tag{1.4}$$

ove $K_n = (2n^2 - n - 2)/(n^2 - n - 1)$.

Le dimostrazioni seguono facilmente integrando per parti e applicando la diseguaglianza di Schwarz e di Minkowski.

Stime analoghe valgono anche per funzioni di $\mathscr{W}(X_+)$ o $\mathscr{W}(Q_+)$.

Oss. (i) Se $u \in \mathscr{W}(Y_+)$ o $\in \mathscr{W}(X_+)$ o $\in \mathscr{W}(Q_+)$, allora per quasi ogni $y > 0$

$$u_x(x, y) = o(|x|^{p+1-1/n}) \qquad \text{quando } |x| \to +\infty .$$

(ii) Se $u \in \mathscr{W}(X_+)$ o $\in \mathscr{W}(Q_+)$, allora per quasi ogni $y > 0$

$$u_x(x, y) = o(|x|^{p+1-1/n}) \qquad \text{quando } 0 < x \to 0 .$$

(iii) Se $u \in \mathscr{W}_0(Q_+)$, allora per quasi ogni $y > 0$

$$u(x, y) = o(|x|^{p+2-1/n}) \qquad \text{quando } 0 < x \to 0 .$$

1.2 – Sia I un sottoinsieme aperto di $\boldsymbol{R}$; $\mathscr{H}(I)$ l'insieme delle classi di equivalenza di funzioni $h(x)$ assolutamente continue tali che $x^{-p/2-1/2+1/n}h'(x) \in L^2(I)$. Due funzioni appartengono alla stessa classe se differiscono q.o. per una costante additiva.

In $\mathscr{H}(I)$ il funzionale $\|\cdot\|_{\mathscr{H}(I)}$

$$\|h\|_{\mathscr{H}(I)} = \int_I |x|^{-p-1+2/n}|h'(x)|^2\, dx$$

è una norma.

Sia inoltre

$$\mathscr{H}_0(R_+) = \Big\{h(x) \in \mathscr{H}(R_+)\colon \int_0^{+\infty} |x|^{-q-1+2/n}|h(x)|^2\, dx < +\infty\Big\} ,$$

con norma

$$\|h\|^2_{\mathscr{H}_0(R_+)} = \|h\|^2_{\mathscr{H}(R_+)} + \|x^{-q/2-\frac{1}{2}+1/n}\, h(x)\|^2_{L^2(R_+)} .$$

Teorema 1.1. (i) *L'operatore* $\mathscr{C}_0^\infty(\bar{Q}_+) \cap \mathscr{W}_0(Q_+) \ni u \to u(\cdot, 0) \equiv$ [*restrizione di* u *alla retta* $y = 0$] *è lineare, limitato, densamente definito da* $\mathscr{W}_0(Q)$ *in* $\mathscr{H}_0(\boldsymbol{R}_+)$.

Sia $\gamma\colon \mathscr{W}_0(Q_+) \to \mathscr{H}_0(\boldsymbol{R}_+)$ *l'operatore lineare limitato che estende il precedente.* γ *ha le seguenti proprietà:*

(ii) *il codominio di* γ *è esattamente* $\mathscr{H}_0(\boldsymbol{R}_+)$,

(iii) γ *realizza un isomorfismo tra* $\mathscr{W}_0(\boldsymbol{R}_+)/\mathrm{Ker}\,\gamma$ *e* $\mathscr{H}_0(R_+)$.

Dim. La proprietà (i) segue dal Lemma 1.3; le (ii) e (iii) dal Teorema 3.1 che sarà enunciato in **3**.

Lemma 1.3. *Sia* $u \in \mathscr{C}_0^\infty(\bar{Q}_+) \cap \mathscr{W}_0(Q_+)$; *la sua restrizione* $h(x)$ *al semi-*

asse delle x positive $(x > 0)$ *appartiene ad* $\mathscr{H}_0(R_+)$ *e valgono le seguenti stime*:

$$\int_0^{+\infty} x^{-q-1+2/n} |h(x)|^2 \, dx \tag{1.5}$$
$$< c_n \Big(\iint_{Q_+} x^{-1+2/n} |u_y|^2 \, dx\, dy\Big)^{\frac12} \Big(\iint_{Q_+} x^{-2p-1+2/n} |u_{xx}|^2 \, dx\, dy\Big)^{\frac12} ,$$

$$\int_0^{+\infty} x^{-p-1+2/n} |h'(x)|^2 \, dx \tag{1.6}$$
$$< k_n \Big(\iint_{Q_+} x^{-1+2/n} |u_y|^2 \, dx\, dy\Big)^{\frac12} \Big(\iint_{Q_+} x^{-2p-1+2/n} |u_{xx}|^2 \, dx\, dy\Big)^{\frac12} ,$$

con $c_n = 2C_n/(q - 1/n)$, $k_n = 2K_n$.

Dim. Per la stima (1.5), osservato che

$$\int_0^{+\infty} x^{-q-1+2/n} |h(x)|^2 \, dx = -2 \iint_{Q_+} x^{-q-1+2/n} u(x, y)\, u_y(x, y) \, dx\, dy ,$$

si procede come in [**1**], Lemma 1.5.

Per la stima (1.6) si considera l'uguaglianza

$$\int_0^{+\infty} x^{-p-1+2/n} |h'(x)|^2 \, dx = - \iint_{Q_+} x^{-p-1+2/n} \frac{\partial}{\partial y} |u_x|^2 \, dx\, dy ,$$

dalla quale integrando per parti, applicando maggiorazioni standard e la (1.3) si ottiene la (1.6).

Oss. Si noti che le funzioni $u \in \mathscr{W}(Y_+)$ possiedono traccia sull'asse x che appartiene a $\mathscr{H}(\boldsymbol{R})$.

1.3 – Sia $\boldsymbol{H}^s(\boldsymbol{R})$ il completamento di $\mathscr{C}_0^\infty(\boldsymbol{R})$ nella norma

$$\|\varphi\|_{H^s(R)} = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2s} |\hat{\varphi}(\tau)|^2 \, d\tau\Big)^{\frac12} ,$$

ove $\hat{\varphi}$ indica come di consueto la trasformata di Fourier di φ. Le funzioni $\varphi \in \boldsymbol{H}^s(\boldsymbol{R})$ hanno cioè derivata di ordine s, $D^s\varphi$ nel seguito, a quadrato integrabile su $\boldsymbol{R}$.

Teorema 1.2. (i) *L'operatore* $\mathscr{C}_0^\infty(\overline{X}_+) \ni u \to u(0, \cdot) \equiv$ [*restrizione di* u *alla retta* $x = 0$]

è lineare, limitato, densamente definito da $\mathscr{W}(X_+)$ *in* $\boldsymbol{H}^{1-1/nq}(\boldsymbol{R})$.

Sia $\gamma: \mathscr{W}(X_+) \to \boldsymbol{H}^{1-1/nq}(\boldsymbol{R})$ *l'operatore lineare limitato che estende il precedente, allora*

(ii) γ *ha codominio coincidente con tutto* $\boldsymbol{H}^{1-1/nq}(\boldsymbol{R})$,

(iii) γ *realizza un isomorfismo tra* $\mathscr{W}(X_+)/\operatorname{Ker}\gamma$ *e* $\boldsymbol{H}^{1-1/nq}(\boldsymbol{R})$.

Dim. La (i) segue dai Lemmi 1.4 e 1.5. Per le altre proprietà si rimanda al Teorema 2.1 che sarà enunciato in **2**.

Lemma 1.4. *Sia* $v(x)$ *in* $\mathscr{C}^2(\overline{\boldsymbol{R}}_+)$ *tale che* $x^{-p-\frac{1}{2}+1/n}v''(x)$ *e* $x^{-\frac{1}{2}+1/n}v(x)$ *appartengono a* $L^2(\boldsymbol{R}_+)$; *vale la seguente diseguaglianza*

$$|v(0)| \leqslant C\Big(\int_0^{+\infty} x^{-1+2/n}|v(x)|^2\,dx\Big)^{a/2}\Big(\int_0^{+\infty} x^{-2p-1+2/n}|v''(x)|^2\,dx\Big)^{b/2}, \tag{1.7}$$

con $a = 1 - 1/nq$, $b = 1/nq$.

Dim. Quando non occorra determinare la migliore costante C, si può procedere come in [**10**]$_4$, lemma 2.1.

Lemma 1.5. *Sia* $u \in \mathscr{C}_0^\infty(\overline{X}_+)$; *vale la seguente stima*

$$\|u(0,\cdot)\|^2_{H^{1-1/nq}(R)} \leqslant \text{const}\Big(\iint_{X_+} x^{-1+2/n}|u_y|^2\,dx\,dy\Big)^a\Big(\iint_{X_+} x^{-2p-1+2/n}|u_{xx}|^2\,dx\,dy\Big)^b. \tag{1.8}$$

Dim. La dimostrazione segue lo schema adottato in [**10**]$_4$, lemma 2.3.

2 - Problema al contorno in X_+

Sia ancora $-2 + 1/n < p \leqslant -2 + 1/(n-1)$ (n intero $\geqslant 2$). Si analizza il problema (A), cioè il problema ai limiti: trovare una funzione u tale che

$$x^p u_y - u_{xx} = 0 \qquad \text{in } X_+, \tag{2.1}$$

$$u(0, y) = \varphi(y) \qquad (-\infty < y < +\infty), \tag{2.2}$$

con $\varphi(y)$ funzione assegnata e l'uguaglianza (2.2) intesa nel senso delle tracce.

Si dimostra il seguente

Teorema 2.1. *Sia* $\varphi(y) \in \boldsymbol{H}^{1-1/nq}(\boldsymbol{R})$; *la funzione*

$$u(x, y) = \frac{x}{\Gamma(1/q)q^{2/q}} \int_{-\infty}^{y} \frac{\varphi(t)}{(y-t)^{1+1/q}} \exp\Big(-\frac{x^q}{q^2(y-t)}\Big)\,dt. \tag{2.3}$$

appartiene a $\mathscr{W}(X_+)$, *è soluzione del problema* (2.1)-(2.2) *e verifica la seguente stima*

$$\iint_{X_+} [x^{-1+2/n}|u_y|^2 + x^{-2p-1+2/n}|u_{xx}|^2 + x^{-2p-3+2/n}|u_x|^2]\,dx\,dy$$

$$\leqslant \text{cost}\int_{-\infty}^{+\infty} |D^{1-1/nq}\varphi(y)|^2\,dy = \text{cost}\,\|\varphi(y)\|^2_{H^{1-1/nq}(R)}\,.$$

Dim. La dimostrazione è del tutto simile a quella riportata in [**10**]$_3$ per il teorema 4.5 e segue dalla rappresentazione di $\hat{u}(x,\eta)$, trasformata di Fourier rispetto ad y della $u(x,y)$,

$$\hat{u}(x,\eta) = \hat{A}(x,\eta)\,\hat{\varphi}(\eta)\,, \tag{2.4}$$

ove

$$\hat{A}(x,\eta) = \frac{\pi(-i)^{1/2q+1}|x|^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(1/q)\,q^{1/q}}\,H^{(2)}_{1/q}\Big(\frac{2\sqrt{-i\eta}\;|x|^{q/2}}{q}\Big)\,\eta^{1/2q}\,,$$

e

$$\sqrt{-i\eta} = \begin{cases} \exp(-\pi/4\,i)\sqrt{|\eta|} & \text{per } \eta>0\,,\\ \exp(-3/4\,\pi i)\sqrt{|\eta|} & \text{per } \eta<0\,,\end{cases} \tag{2.5}$$

essendo $H^{(2)}_{1/q}(z)$ la seconda funzione di Bessel di terzo tipo di ordine $1/q$ (funzione di Hankel).

3 - Problema misto in Q_+

3.1 – Si considera il seguente problema misto

$$x^p u_y - u_{xx} = 0\,, \qquad \text{in } Q_+\,, \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = h(x)\,, \qquad 0<x<+\infty\,, \tag{3.2}$$

$$u(0,y) = \varphi(y)\,, \qquad 0<y<+\infty\,. \tag{3.3}$$

Le (3.2) e (3.3) sono intese, come di consueto, nel senso delle tracce e per il parametro p vale sempre: $-2+1/n<p\leqslant -2+1/(n-1)$ $(n\geqslant 2)$.

Data la linearità del problema si può risolvere cercando una soluzione $u \in \mathscr{W}(Q_+)$ della forma $u = u_1 + u_2$, ove u_1 è la restrizione a Q_+ della soluzione del problema (2.1)-(2.2), tale che $u(x, 0) = 0$, e u_2 è soluzione della equazione (3.1) con condizione iniziale (3.2) e dato al contorno omogeneo.

$$u(0, y) = 0 \qquad 0 < y < +\infty . \tag{3.4}$$

Per risolvere il problema (3.1)-(3.2)-(3.4) basta trovare una soluzione per il problema a valori iniziali

$$\begin{aligned} &|x|^p u_y - u_{xx} = 0 && \text{in } Y_+ , \\ &u(x, 0) = \operatorname{sign} x\, h(|x|) && -\infty < x < +\infty , \end{aligned} \tag{3.5}$$

e considerare la restrizione della soluzione a Q_+.

Nel problema (3.5), l'equazione è invariante per riflessioni rispetto all'asse y, mentre il dato iniziale è dispari in x perciò la soluzione avrà lo stesso carattere di disparità e rispetterà la condizione (3.4).

Si può enunciare il seguente

Teorema 3.1. *Sia* $h(x) \in \mathscr{H}_0(\boldsymbol{R}_+)$: *la funzione*

$$u(x, y) = \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} \frac{\xi^p}{y} (\xi x)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\xi^q + x^q}{q^2 y}\right) I_{1/q}\left(\frac{2x^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2 y}\right) h(\xi)\, d\xi , \tag{3.6}$$

con $I_{1/q}(z)$ *funzione di Bessel di primo tipo modificata di ordine* $1/q$, *appartiene a* $\mathscr{W}_0(Q_+)$, *è soluzione del problema* (3.1)-(3.2)-(3.4) *e verifica le seguenti stime*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y>0} \int_0^{+\infty} x^{-q-1+2/n} |u(x, y)|^2\, dx \leqslant \int_0^{+\infty} x^{-q-1+2/n} |h(x)|^2\, dx , \tag{3.7}$$

$$\|u\|_{\mathscr{W}_0(Q_+)} \leqslant \text{cost}\, \|h\|_{\mathscr{H}_0(R_+)} , \tag{3.8}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y>0} \int_0^{+\infty} x^{p-1+2/n} |u_x(x, y)|^2\, dx \leqslant \text{cost}\, \|h\|_{\mathscr{H}_0(R_+)} . \tag{3.9}$$

Da questo teorema e dal Teorema 2.1 si può dedurre il seguente

Teorema 3.2. *Siano* $h \in \mathscr{H}(\boldsymbol{R}_+)$ *e* $\varphi \in \boldsymbol{H}^{1-1/nq}(\boldsymbol{R})$. *Allora il problema* (3.1)-(3.2) (3.3) *ha una soluzione* $u \in \mathscr{W}(Q_+)$ *purchè* h *soddisfi la condizione*

$$\int_0^{+\infty} x^{-q-1+2/n} |h(x)|^2\, dx < +\infty$$

e $\sup \varphi \subseteq \overline{R}_+$.

La soluzione ha la seguente rappresentazione

$$u(x,y)=\frac{x}{\Gamma(1/q)\,q^{2/q}}\int_{-\infty}^{y}\frac{\varphi(t)\exp\left(-x^q/q^2(x-t)\right)}{(y-t)^{1+1/q}}\,\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{q}\int_0^{+\infty}\frac{\xi^p(x\xi)^{\frac12}}{y}\exp\left(-\frac{x^q+\xi^q}{q^2y}\right)I_{1/q}\left(\frac{2x^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2y}\right)h(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,,$$

e verifica la seguente stima

$$\|u\|_{\mathscr{W}(Q_+)}\leqslant\mathrm{cost}\left(\|h\|_{\mathscr{H}_0(R_+)}+\|\varphi\|_{H^{1-1/nq}(R)}\right).$$

Dim. del Teorema 3.1. La risoluzione del problema (3.1)-(3.2)-(3.4) è ricondotta a quella del problema (3.5) ed è basata sul metodo di separazione delle variabili e di sovrapposizione e sulla trasformata di Hankel generalizzata, indicata nel seguito con $\mathscr{h}_{\nu,\alpha}(\cdot)$. Per la definizione e per le proprietà di quest'ultimo operatore, i suoi legami con la trasformata di Mellin, si rimanda al Lemma 3.6 in $[\mathbf{10}]_4$ e se ne utilizza la nomenclatura.

La soluzione del problema (3.5) si rappresenta nella forma:

$$u(x,y)=\operatorname{sign}x\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{q^2}{4}t^2y\right)(t|x|)^{\frac12}\,\bar{a}(t)J_{1/q}\left(t|x|^{q/2}\right)\mathrm{d}t,$$

ove $J_\nu(z)$ è la funzione di Bessel di primo tipo di ordine ν ed $\bar{a}(t)$ è scelta in modo da verificare la condizione iniziale, cioè

$$h(|x|)=\int_0^{+\infty}(t|x|)^{\frac12}\,\bar{a}(t)J_{1/q}\left(t|x|^{q/2}\right)\mathrm{d}t\,.$$

Posto $|x|^{q/2}=\xi$ e $\bar{a}(t)=t^{-2+1/q+2/nq}a(t)$, si ottiene

$$\tilde{h}(\xi)=\xi^{-3/2+2/nq}h(\xi^{2/q})=\int_0^{+\infty}(t\xi)^{-3/2+1/q+2/nq}a(t)J_{1/q}(t\xi)\,\mathrm{d}t=\mathscr{h}^{-1}_{1/q,\alpha}(a(t),\xi)\,,$$

$\alpha=5/2-1/q-2/nq$ (α e $1/q$ verificano le limitazioni richieste).

Poichè $h\in\mathscr{H}_0(\boldsymbol{R}_+)$ segue facilmente che $\tilde{h}(\xi)\in L^2(\boldsymbol{R}_+)$; allora esiste $a(t)$ in $L^2(R_+)$ (anzi in $\mathscr{B}$) (2) tale che

$$a(t)=\mathscr{h}^{-1}_{1/q,\alpha}\left(\tilde{h}(\xi),t\right).\tag{3.10}$$

---

(2) Si ricorda che, come in $[\mathbf{10}]_4$, lemma 3.6,

$$\mathscr{B}=\{f\in L^2(\boldsymbol{R}^+):\ \varrho\to|\varrho^{1/2-\alpha}|\,\mathscr{M}f(\tfrac12+i\varrho)\in L^2(\boldsymbol{R})\}$$

ed $\mathscr{M}$ è l'operatore trasformata di Mellin.

Sostituendo ad $a(t)$ l'espressione trovata, fatta la restrizione della soluzione del problema (3.5) a Q_+, scambiando l'ordine di integrazione si ottiene la rappresentazione (3.6). Per provare le stime (3.7), (3.8), (3.9) conviene scrivere la soluzione nella forma

$$u(\xi^{2/q}, y) = \xi^{3/2-2/nq}\Big(\mathscr{h}^{-1}_{1/q,\alpha}\cdot \exp\Big(-\frac{q^2\, t^2\, y}{4}\Big)\cdot \mathscr{h}_{1/q,\alpha}\tilde{h}\Big)(\xi)\,.$$

La funzione $\xi \to \xi^{-3/2+2/nq}u(\xi^{2/q}, y)$ è data dalla composizione di tre operatori applicati ad $\tilde{h}$: l'operatore $\mathscr{h}_{1/q,\alpha}$ opera da $L^2(R_+)$ a $\mathscr{B}$, il prodotto per $\exp(-(q^2/4)t^2y)$ è un'operazione continua da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}$ ed infine $\mathscr{h}^{-1}_{1/q,\alpha}$ riporta in $L^2(R_+)$. Allora la composizione dei tre operatori è definita su tutto $L^2(\boldsymbol{R}_+)$ ed è continua; $\forall y > 0$ fissato, applicate le proprietà della trasformata di Hankel generalizzata

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} |\xi^{2/nq-3/2}\, u(\xi^{2/q}, y)|^2\, d\xi \\
&\leqslant \text{cost}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\varrho^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\Big|\mathscr{M}\Big\{\exp\Big(-\frac{q^2\, t^2\, y}{4}\Big)\, a(t);\ (\tfrac{1}{2}+i\varrho)\Big\}\Big|^2\, d\varrho \\
&\leqslant \text{cost}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\varrho^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\big|\mathscr{M}\{a(t);\ (\tfrac{1}{2}+i\varrho)\}\big|^2\, d\varrho \\
&\leqslant \text{cost}\int_0^{+\infty}|\tilde{h}(\xi)|^2\, d\xi = \text{cost}\int_0^{+\infty} x^{-q-1+2/n}\, |h(x)|^2\, dx\,.
\end{aligned}$$

Ritornando alla variabile x nel 1° membro di questa catena di diseguaglianze, e facendone $\operatorname*{ess\,sup}_{y>0}$ si ottiene la (3.7). Si considera ora u_y:

$$u_y(\xi^{2/q}, y) = -\frac{q^2}{4}\,\xi^{3/2-2/nq}\,\mathscr{h}^{-1}_{1/q,\alpha}\Big(\exp\Big(-\frac{q^2\, t^2\, y}{4}\Big)\, t^2 a(t),\ \xi\Big),$$

da cui si può ricavare l'uguaglianza

$$\xi^{2/nq-3/2}\, u_y(\xi^{2/q}, y) = -\frac{q^2}{4}\,\mathscr{h}^{-1}_{1/q,\bar{\alpha}}\ \Big(\exp\Big(-\frac{q^2\, t^2\, y}{4}\Big)\, t a(t),\ \xi\Big)$$

($\bar{\alpha} = \alpha - 1$; $\bar{\alpha}$ e $1/q$ verificano le limitazioni richieste per la trasformazione di Hankel).

Da questa, elevando al quadrato e integrando in ξ, dopo aver applicato la diseguaglianza relativa alla trasformata, si ottiene

$$\int_0^{+\infty}\xi^{4/nq-1}|u_y(\xi^{2/q},y)|^2\,d\xi\leqslant \text{cost}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\varrho^2)^{\frac12-\bar\alpha}|\mathscr{M}\{\exp(-\frac{q^2}{4}t^2y)\,ta(t);\,(\tfrac12+i\varrho)\}|^2\,d\varrho$$

$$=\text{cost}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\varrho^2)^{\frac12-\bar\alpha}\,d\varrho\int_0^{+\infty}t^{\frac12+i\varrho}\exp(-\frac{q^2}{4}t^2y)\,ta(t)\,dt\int_0^{+\infty}t_1^{1/2-i\varrho}\exp(-\frac{q^2}{4}t_1^2y)\,t_1a(t_1)\,dt_1\,.$$

Integrando entrambi i membri in y, scambiando opportunamente l'ordine di integrazione, fatto il cambiamento di variabile $t_1=t\tau$, dalle proprietà di convoluzione della trasformata di Mellin si ha

$$\iint_{Q_+}\xi^{4/nq-1}|u_y(\xi^{2/q},y)|^2\,d\xi\,dy\leqslant\text{cost}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\sigma^2)^{\frac12-\bar\alpha}|\mathscr{M}\{a(t);\,\tfrac12+i\sigma\}|^2\,d\sigma\,. \tag{3.11}$$

Modificando la (3.10) si ricava anche che

$$a(t)=\mathscr{h}_{1+1/q,\bar\alpha}[((\frac{2}{q}+\frac{2}{nq}-\frac{3}{2})\,\tilde h(\xi)+\xi\tilde h'(\xi)),\,t]\,, \tag{3.12}$$

ove per le proprietà di h e h', $((1-\alpha)\tilde h(\xi)+\xi\tilde h'(\xi))\in L^2(\boldsymbol{R}_+)$.

La (3.11) viene allora modificata e ritornando alla variabile x

$$\iint_{Q_+}x^{2/n-1}|u_y(x,y)|^2\,dx\,dy\leqslant\text{cost}\,\|(\frac{2}{q}+\frac{2}{nq}-\frac{3}{2})\,\tilde h(\xi)+\xi\tilde h'(\xi)\|_{L^2(R_+)}\leqslant\text{cost}\,\|h\|_{\mathscr{H}_0(R_+)}\,.$$

Poichè u è la soluzione dell'equazione (3.1) la stessa stima vale per

$$\iint_{Q_+}x^{-2p-1+2/n}|u_{xx}|^2\,dx\,dy\,.$$

Inoltre esprimendo opportunamente u_x e procedendo in modo analogo a quanto fatto per le stime precedenti, si dimostra la (3.9).

3.2 – È opportuno per il seguito evidenziare alcune proprietà della traccia, sul semiasse positivo delle y, della derivata rispetto ad x della soluzione u del problema (3.1)-(3.2)-(3.4) in Q_+; sia $g(y)=u_x(0,y)$.

Si osserva che tale traccia esiste dal momento che la soluzione u si può estendere all'intero piano $\boldsymbol{R}^2$ come funzione di $\mathscr{C}^\infty$. Dalla rappresentazione (3.6) derivando rispetto ad x e facendo tendere x a zero, si ottiene

$$g(y)=\frac{1}{\Gamma(1/q)\,q^{2/q}y^{1+1/q}}\int_0^{+\infty}\xi^{p+1}h(\xi)\exp(-\frac{\xi^q}{q^2y})\,d\xi\qquad(0<y<+\infty)\,. \tag{3.13}$$

Per detta traccia vale il seguente

Teorema 3.3. *La funzione $g(y)$ rappresentata dalla* (3.13) *ha le seguenti proprietà:*

(i) $y^{(n+1)/nq-1}g(y) \in L^2(\boldsymbol{R}_+)$,

(ii) $g(y) \in \boldsymbol{H}^{1-(n+1)/nq}(\boldsymbol{R})$ *e* $\operatorname{supp} g \subseteq \bar{R}_+$.

Dim. Per la (i), si maggiora la

$$\|y^{(n+1)/nq-1}g(y)\|_{L^2(R_+)} = \Big(\int_0^{+\infty} \frac{y^{2(n+1)/nq-4-2/q}}{[\Gamma(1/q)]^2 q^{4/q}} \Big(\int_0^{+\infty} \xi^{p+1}h(\xi)\exp\Big(-\frac{\xi^q}{q^2 y}\Big)\,d\xi\Big)^2 dy\Big)^{\frac12},$$

attraverso il cambiamento di variabile $\xi = (\tau y)^{1/q}$ e la diseguaglianza di Minkowsky con

$$\|\dots\|_{L^2(R_+)} \leqslant \operatorname{cost} \int_0^{+\infty} \exp\Big(-\frac{\tau}{q^2}\Big)\Big(\int_0^{+\infty} y^{-2+2/nq}h^2\big((\tau y)^{1/q}\big)\,dy\Big)^{\frac12} d\tau\,,$$

e ancora, posto $y = t^q/\tau$,

$$\|\dots\|_{L^2(R_+)} \leqslant \operatorname{cost}\Big(\int_0^{+\infty} \tau^{\frac12-1/nq}\exp\Big(-\frac{\tau}{q^2}\Big)\,d\tau\Big)\Big(\int_0^{+\infty} t^{-q-1+2/n}h^2(t)\,dt\Big)^{\frac12}$$

$$= \operatorname{cost}\|x^{-q/2-\frac12+1/n}h(x)\|_{L^2(R_+)}$$

(l'integrale in τ esiste finito poichè $-1/2 < 1/2 - 1/nq \leqslant 3/2 - 1/n$).

Per la (ii), si estende $g(y)$ a tutto $\boldsymbol{R}$, ponendo $g(y) = 0$ per $y < 0$ (è indicata con $g(y)$ anche l'estensione) e si prova che

$$|\tau|^{1-(n+1)/nq}\hat{g}(\tau) \in L^2(\boldsymbol{R})\,. \tag{3.14}$$

Per fare ciò basta provare, in base al teorema di convoluzione, che la funzione

$$0 < y \to \int_y^{+\infty} (t-y)^{(n+1)/nq-2}g(t)\,dt\,,$$

è a quadrato integrabile in $\boldsymbol{R}_+$.

Con il cambiamento di variabile $t = y\theta$ e per mezzo della diseguaglianza di Minkowski, si ha

$$\mathscr{I} = [\int_0^{+\infty} (\int_y^{+\infty} g(t)\,(t-y)^{(n+1)/nq-2}\,\mathrm{d}t)^2\,\mathrm{d}y]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \int_1^{+\infty} (\theta-1)^{(n+1)/nq-2}\,(\int_0^{+\infty} y^{2(n+1)/nq-2}\,g^2(y\theta)\,\mathrm{d}y)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\theta\ ;$$

posto $y = \tau/\theta$

$$\mathscr{I} \leqslant (\int_1^{+\infty} \frac{(\theta-1)^{(n+1)/nq-2}}{\theta^{(n+1)/nq-\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}\theta)\,(\int_0^{+\infty} \tau^{2(n+1)/nq-2}\,g^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau)^{\frac{1}{2}}.$$

L'integrale in θ esiste finito in quanto l'integranda è asintotica a $\theta^{-3/2}$ per $\theta \to +\infty$, e $(\theta-1)$ non ha mai esponente inferiore a $-1/2$.

4 - L'equazione parabolica « forward-backward » in Y_+

Utilizzando i risultati di **2** e **3** relativi ai problemi (A) e (B), si vuole risolvere il problema (C), cioè

$$\operatorname{sign} x\,|x|^p\,u_y - u_{xx} = 0\ , \qquad \text{in } Y_+\,, \tag{4.1}$$

$$u(x, 0_+) = h(x)\ ,\ \text{q.o.} \qquad \text{in } 0 < x < +\infty\,, \tag{4.2}$$

con $h(x)$ funzione assegnata sul semiasse positivo delle x, appartenente ad un opportuno spazio di tracce.

Sia $-3/2 < p < -1$, si dimostra il seguente

Teorema 4.1. *Sia* $h(x) \in \mathscr{H}(\mathbf{R}_+)$ *allora il problema* (4.1)-(4.2) *ha una soluzione* u *in* $\mathscr{W}(Y_+)$ *purchè* $h(x)$ *verifichi la condizione*

$$\int_0^{+\infty} x^{-q}\,|h(x)|^2\,\mathrm{d}x < +\infty\,. \tag{4.3}$$

Oss. Dall'esporre a grandi linee il procedimento seguito nella dimostrazione sarà evidente come questo teorema si possa dimostrare soltanto per valori di $p \in (-3/2, -1)$.

Dim. Si assegna un dato fittizio sull'asse y nell'adeguato spazio di funzioni e si risolve nel semipiano $x < 0$, X_-, l'analogo del problema (A): esiste una soluzione $v \in \mathscr{W}(X_-)$ determinata dal dato. Si considera poi la soluzione $w \in \mathscr{W}(Q_+)$ del problema (B), determinata dal dato fittizio sull'asse y e dalla condizione sul semiasse positivo delle x (cfr. Teorema 3.2).

Si definisce così una funzione u

$$u(x, y) = \begin{cases} v(x, y) & \text{per } x < 0 \,,\; y > 0 \,, \\ w(x, y) & \text{per } x > 0 \,,\; y > 0 \,, \end{cases}$$

alla quale si richiede di avere una certa regolarità in corrispondenza ad $x = 0$; precisamente si vuole che

$$u(0_-, y) = u(0_+, y)\,, \tag{4.4}$$

e che

$$u_x(\varepsilon, \cdot) - u_x(-\varepsilon, \cdot) \to 0 \qquad \text{per } 0 < \varepsilon \to 0\,. \tag{4.5}$$

Quest'ultima richiesta conduce a risolvere un'equazione di Wiener-Hopf la cui incognita è il dato fittizio, ma solo nel caso $n = 2$, cioè $-3/2 < p \leqslant -1$; negli altri casi ($n > 2$) la differenza $u_x(\varepsilon, \cdot) - u_x(-\varepsilon, \cdot)$ si mantiene singolare quando $\varepsilon \to 0$, quindi non è possibile parlare di «raccordo» per la derivata normale.

Per quanto detto la funzione u ha la seguente rappresentazione:

$$u(x, y) \tag{4.6}$$

$$= -\frac{x}{\Gamma(1/q)\, q^{2/q}} \int_y^{+\infty} \frac{\varphi_1(y) \exp\left(-|x|^q/q^2(y-t)\right)}{(y-t)^{1+1/q}}\, dt \qquad \text{per } x < 0\,,\; y > 0\,.$$

$$= \frac{x}{\Gamma(1/q)\, q^{2/q}} \int_{-\infty}^{y} \frac{\varphi_2(y) \exp\left(-x^q/q^2(y-t)\right)}{(y-t)^{1+1/q}}\, dt + \mathscr{U}(x, y) \qquad \text{per } x > 0\,,\; y > 0\,.$$

con

$$\mathscr{U}(x, y) = \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} \frac{\xi^p}{y} (\xi x)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\xi^q + x^q}{q^2 y}\right) I_{1/q}\left(\frac{2x^{q/2}}{q^2 y}\, \xi^{2/q}\right) h(\xi)\, d\xi\,, \tag{4.7}$$

$\varphi_1(y) \in \boldsymbol{H}^{1-1/2q}(\boldsymbol{R})$, $\quad \varphi_2(y) \in \boldsymbol{H}^{1-1/2q}(\boldsymbol{R})$, $\quad \operatorname{supp} \varphi_2(y) \subseteq \overline{\boldsymbol{R}}_+$, $\quad h(x) \in \mathscr{H}_0(\boldsymbol{R})$.

La funzione rappresentata dalla (4.6) verifica l'equazione (4.1) ed è di classe $\mathscr{W}$ nel semipiano Y_+ tagliato lungo il semiasse positivo delle y; inoltre verifica la condizione (4.2) avendo scelto $\varphi_2(y)$ con supp $\varphi_2 \subseteq \overline{\boldsymbol{R}}_+$.

Affinchè u appartenga a $\mathscr{W}(Y_+)$ si dovranno realizzare le (4.4) e (4.5). Per la (4.4) basta che sia

$$\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = \varphi(y)\,, \qquad \text{in } 0 < y < +\infty\,.$$

Per la (4.5), si può estendere la soluzione $u(x, y)$ data dalla (4.6) anche nel semipiano $y < 0$, pensandola ivi nulla. Si chiami ancora u questa estensione e sia $\hat{u}$ la trasformata di Fourier rispetto ad y:

$$\hat{u}(x, \eta) = \begin{cases} \dfrac{-i\pi}{2^{1/q}\Gamma(1/q)} z^{1/q} H^{(2)}_{1/q}(z)\hat{\varphi}(\eta) + \hat{\mathscr{U}}(x, \eta) & \text{per } x > 0\,, \\[2ex] \dfrac{-i\pi}{2^{1/q}\Gamma(1/q)} \tilde{z}^{1/q} H^{(2)}_{1/q}(\tilde{z})\hat{\varphi}(\eta) & \text{per } x < 0\,, \end{cases}$$

con:

$$z = \frac{2\sqrt{-i\eta}\,|x|^{q/2}}{q}\,; \qquad \sqrt{-i\eta} \quad \text{definito dalla (2.5);}$$

$$\tilde{z} = z \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\eta\right).$$

Ne segue che

$$\text{(4.8)} \quad \hat{u}_x(x, \eta) = \begin{cases} -\dfrac{\pi\eta}{q2^{1/q-1}\Gamma(1/q)} |x|^{q-1} z^{1/q-1} H^{(2)}_{1/q-1}(z)\hat{\varphi}(\eta) + \hat{\mathscr{U}}_x(x, \eta) & \text{per } x > 0\,, \\[2ex] -\dfrac{\pi\eta}{q2^{1/q-1}\Gamma(1/q)} |x|^{q-1} \tilde{z}^{1/q-1} H^{(2)}_{1/q-1}(\tilde{z})\hat{\varphi}(\eta) & \text{per } x < 0\,. \end{cases}$$

La (4.5) è equivalente a

$$\hat{u}_x(\varepsilon, \cdot) - \hat{u}_x(-\varepsilon, \cdot) \to 0 \qquad \text{per } 0 < \varepsilon \to 0$$

e, per la rappresentazione (4.8), a

$$\text{(4.9)} \quad \hat{\mathscr{U}}_x(0, \eta) = \frac{\Gamma(1-1/q)\,\exp\big(i(\pi/q)\big)}{q^{2/q-1}\Gamma(1/q)} \left\{1 + \exp\left(-i\frac{\pi}{q}\operatorname{sign}\eta\right)\right\} (-i\eta)^{1/q}\hat{\varphi}(\eta)\,.$$

Si ricorda che $\hat{\mathscr{U}}_x(0,\eta)$ coincide con $\hat{g}(\eta)$, trasformata di Fourier di $g(y)$ definita dalla (3.13).

Per le proprietà espresse nel Teorema 3.3 conviene modificare la (4.9) in

$$\hat{K}(\eta)\cdot\hat{\chi}(\eta)=\hat{f}(\eta)\,, \tag{4.10}$$

con

$$\hat{f}(\eta)=\eta^{1-3/2q}\hat{g}(\eta)\,,$$

$$\begin{aligned}\hat{K}(\eta)&=\frac{\Gamma(1-1/q)(-i)^{1/q}}{q^{2/q-1}\Gamma(1/q)}\exp\left(i\frac{\pi}{q}\right)\left\{1+\exp\left(-i\frac{\pi}{q}\operatorname{sign}\eta\right)\right\}\\&=C_+ \qquad\qquad\qquad \text{per } \eta>0\,,\\&=C_-=C_+\exp\left(i(\pi/q)\right)\qquad \text{per } \eta<0\,,\end{aligned}$$

e

$$\hat{\chi}(\eta)=\eta^{1-1/2q}\hat{\varphi}(\eta)\qquad(\operatorname{supp}\chi\subseteq\overline{\boldsymbol{R}}_+)\,.$$

La (4.10) è così la trasformata di Fourier di una equazione di Wiener-Hopf, con termine noto f in L^2, nucleo K dato da

$K=\lambda\cdot$(delta di Dirac) $+\,\mu\cdot$(valor principale di $1/\pi x$), ove

$$\begin{aligned}\lambda&=\frac{1}{2}(C_++C_-)=\frac{C_+}{2}\left(1+\exp\left(i\frac{\pi}{q}\right)\right),\\ \mu&=\frac{i}{2}(C_+-C_-)=\frac{i}{2}C_+\left(1-\exp\left(i\frac{\pi}{q}\right)\right),\end{aligned}\tag{4.11}$$

essendo $\hat{K}$ una funzione positivamente omogenea di grado zero, e incognita $\chi(y)$ che è la derivata di ordine $1-1/2q$ della $\varphi(y)$.

$\chi(y)$ è soluzione della

$$\text{restrizione di } K*\chi \text{ a } (0,+\infty)=f\,, \tag{4.12}$$

con la condizione

$$\text{restrizione di } \chi \text{ a } (-\infty,0)=0\,; \tag{4.13}$$

la convoluzione $K*\chi$ è data da $\lambda\chi+\mu\boldsymbol{H}\chi$ con $\boldsymbol{H}$ trasformata di Hilbert.

Per questa classe di equazioni di Wiener-Hopf a nucleo singolare sono riportati in [**12**] risultati che permettono di affermare che l'equazione (4.12)-

(4.13) ha una sola soluzione $\chi \in L^2(0, +\infty)$ per ogni $f \in L^2(0, +\infty)$. Dal momento che $\chi = D^{1-1/2q}\varphi$ esiste una sola $\varphi \in H^{1-1/2q}$ con supp $\varphi \subseteq \bar{R}_+$ che verifica la (4.9).

Allora la funzione u rappresentata dalla (4.6) con $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, con φ così determinata, fornisce la soluzione cercata.

Oss. Qui di seguito si danno alcune informazioni sulla risoluzione del sistema (4.12)-(4.13) e si fornisce una rappresentazione della soluzione. Il procedimento è basato sulla fattorizzazione della trasformata di Fourier del nucleo, che si può scrivere anche nella forma $\hat{K}(\eta) = \lambda - i\mu \operatorname{sign} \eta$ (λ e μ già definiti dalle (4.11)).

$\hat{K}$ si può fattorizzare mediante la coppia di funzioni

$$K_+(\zeta) = (-i\zeta)^k\,, \qquad \operatorname{Im}(\zeta) \geqslant 0\,,$$

$$K_-(\zeta) = (\lambda - i\mu)\exp(ik\pi)(i\zeta)^{-k}\,, \qquad \operatorname{Im}(\zeta) \leqslant 0\,,$$

con $k = 1/2q - 1$.

Procedendo come in [**12**], si può concludere che la trasformata della soluzione è data da

$$C_+ \exp\left(i\pi\left(\frac{1}{2q} - 1\right)\right)\hat{\chi}(\eta) = (i\eta)^k \Phi(\eta - i\cdot 0)\,; \tag{4.14}$$

ove Φ è l'integrale di Cauchy

$$\Phi(\zeta) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-it)^{1-1/2q}\hat{f}(t)}{2\pi i(t-\zeta)}\,dt\,.$$

Dalla (4.14) con opportuni calcoli si ottiene ($y > 0$)

$$\chi(y) = \frac{\exp(-i(2\pi/q))}{C_+}\left[\left(1 + \exp\left(i\frac{\pi}{q}\right)\right)f(y) - i\left(1 - \exp\left(i\frac{\pi}{q}\right)\right)y^{1-1/2q}\int_0^{+\infty}\frac{t^{1/2q-1}f(t)}{\pi(y-t)}\,dt\right]$$

$$= \exp\left(-i\frac{2\pi}{q}\right)\left[\left(1 + \exp\left(i\frac{\pi}{q}\right)\right)D^{1-1/2q}g(y) - i\left(1 - \exp\left(i\frac{\pi}{q}\right)\right)y^{1-1/2q}\right.$$

$$\left.\int_0^{+\infty}\frac{t^{1/2q-1}D^{1-1/2q}g(t)}{\pi(y-t)}\,dt\right].$$

Bibliografia

[1] O. Arena, *On a degenerate elliptic-parabolic equation*, Comm. Partial Differential Equations **3** (11) (1978), 1007-1040.

[2] M. S. Bauendi and P. Grisvard, *Sur une équation d'évolution changeant de type*, J. Functional Analysis **2** (1968), 352-369.

[3] H. Brezis, W. Rosenkrantz and B. Singer, *On a degenerate elliptic-parabolic equation occuring in the theory of probability*, Comm. Pure Appl. Math. **24** (1971), 395-416.

[4] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi: $[\cdot]_1$ *Tables of integral transforms* (I), McGraw-Hill, New York 1954; $[\bullet]_2$ *Higher trascendental function* (II), McGraw-Hill, New York 1953.

[5] W. Feller, *Two singular diffusion problems*, Ann. of Math. **54** (1951), 173-182.

[6] W. Fleming, *A problem of random acceleration*, U.S. Army Math. Center, Univ. of Wisconsin, M.R.C. 1963.

[7] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, University Press, Cambridge 1952.

[8] J. J. Kohn and L. Nirenberg, *Degenerate elliptic-parabolic equations of second order*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 797-872.

[9] O. A. Oleĭnik and E. V. Rakdevič, *Second order equations with nonnegative characteristic form*, Amer. Math. Soc., Plenum Press, New York 1973.

[10] C. D. Pagani: $[\bullet]_1$ *Su un problema di valori iniziali per una equazione parabolica singolare*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **103** (1969), 618-653; $[\bullet]_2$ *Su alcune questioni connesse con l'equazione generalizzata di Fokker-Planck*, Boll. Un. Mat. Ital. **6** (1970), 961-986; $[\bullet]_3$ *On the parabolic equation* $\operatorname{sign} x\,|x|^p u_y - u_{xx} = 0$ *and a related one*, Ann. Mat. Pura Appl. **99** (1974), 333-399; $[\bullet]_4$ *On an initial-boundary value problem for the equation* $w_t = w_{xx} - x w_y$, Ann. Soc. Norm. Sup. Pisa (4) **2** (1975), 219-263.

[11] C. D. Pagani and G. Talenti, *On a forward-backward parabolic equation*, Ann. Mat. Pura Appl. **90** (1971), 1-58.

[12] G. Talenti, *Sulle equazioni integrali di Wiener-Hopf*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **7** (1973), 18-118.

[13] G. Watson, *The theory of Bessel functions*, Univ. Press, Cambridge 1958.

Summary

The equation $u_y - \operatorname{sign} x\,|x|^\alpha u_{xx} = 0$ *with* $\alpha > 1$ *and appropriate boundary problems in weighted Sobolev spaces are studied. Particularly we find the solution of an initial value problem in the half-plane* $y > 0$, *where the equation is forward-backward parabolic. The problem reduces to the study of a singular Wiener-Hopf integral equation.*

* * *