Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 299-309

VITTORIO MANGIONE e ALBERTO VEZZANI (*)

Caratterizzazioni di note classi di varietà quasi hermitiane e di connessioni di Levi-Civita generalizzate (**)

1 - Introduzione

Su di una varietà quasi hermitiana V, G. B. Rizza ha considerato la classe $\mathscr{L}$ delle connessioni di Levi-Civita generalizzate e le sottoclassi $\mathscr{L}_+$, $\mathscr{L}_-$, $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_M$, costituite dalle connessioni di $\mathscr{L}$ appartenenti rispettivamente alle classi ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0 e di Martinelli (1).

In questo lavoro le connessioni Λ delle classi $\mathscr{L}_+$, $\mathscr{L}_-$, $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_M$ *vengono caratterizzate*, entro la classe $\mathscr{L}$, *mediante opportune condizioni sul campo tensoriale* $D_\Lambda \boldsymbol{J} - \mathring{D}\boldsymbol{J}$, cui si perviene per derivazione covariante (rispetto a Λ e rispetto alla connession $\mathring{\Gamma}$ di Levi-Civita) del campo $\boldsymbol{J}$ della struttura quasi complessa di V (Teor. $\boldsymbol{T}_2$, $\boldsymbol{T}_3$, $\boldsymbol{T}_4$, $\boldsymbol{T}_5$; n. **6**).

Altre caratterizzazioni delle connessioni Λ di $\mathscr{L}$, appartenenti alle sottoclassi $\mathscr{L}_+$, $\mathscr{L}_M$, sono ottenute a partire da condizioni sul campo $D_\Lambda \boldsymbol{J}$, nell'ipotesi che V sia *una varietà Kähleriana*, nel primo caso, e che V sia *una varietà quasi-Tachibana o quasi-Kōto*, nel secondo caso (Teor. $\boldsymbol{T}_6$, $\boldsymbol{T}_7$, $\boldsymbol{T}_8$, $\boldsymbol{T}_9$; n. **7**).

I quattro teoremi ora citati, insieme ai Teor. $\boldsymbol{T}_{10}$, $\boldsymbol{T}_{11}$, sempre al n. **7**, consentono anche di *caratterizzare entro le varietà quasi Hermitiane, le varietà Kähleriane, quasi-Tachibana, quasi-Kōto, Hermitiane.* Precisamente, l'esistenza di connessioni delle classi $\mathscr{L}_+$, $\mathscr{L}_M$, $\mathscr{L}_0$, soddisfacenti a particolari condizioni, conduce alle accennate caratterizzazioni.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N S A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 6-III-1979.

(1) Per le connessioni di Martinelli ved. [6] e $[7]_1$; per le connessioni ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0 ved. $[7]_{1,2}$. Per la classe $\mathscr{L}$ e le sue sottoclassi ved. $[7]_{3,4}$. Altre proprietà delle classi di connessioni citate si trovano anche in [4], $[5]_{1,2}$.

Conviene osservare che questi risultati costituiscono delle generalizzazioni di noti teoremi di caratterizzazione per le classi di varietà più sopra citate, nel senso che qui tali caratterizzazioni vengono ottenute con riferimento a connessioni più generali della connessione di Levi-Civita ([2]).

Da segnalare infine la nozione di Λ-ricorrenza, introdotta al n. **3** in relazione ad un qualunque campo tensoriale su V, e successivamente applicata al campo $\boldsymbol{J}$ della struttura quasi complessa (Teor. $\boldsymbol{T}_1$, Cor. $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$; n. **6** e Teor. $\boldsymbol{T}_6$; n. **7**).

2 - Generalità

Sia V una varietà *quasi Hermitiana* di dimensione $2n$ $(n \geqslant 2)$ e classe C^{2n+1} ([3]). Sia x un punto di V, $\mathscr{T}^r_s$ lo spazio lineare dei campi tensoriali di tipo (s, r) su V.

Si considerino il campo $\boldsymbol{J}$ di $\mathscr{T}^1_1$, di classe C^{2n}, che definisce la *struttura quasi complessa* di V, e il campo g di $\mathscr{T}^0_2$ che definisce la *struttura riemanniana* di V.

Come è noto ([4]), per ogni connessione Λ su V risulta univocamente

$$\Lambda = \Gamma + T = \overset{\circ}{\Gamma} + \Sigma + T\,, \tag{1}$$

essendo Γ la *connessione simmetrica associata* a Λ, $\overset{\circ}{\Gamma}$ la *connessione di Levi-Civita*, T la *torsione* di Λ e Σ il campo simmetrico di $\mathscr{T}^1_2$ ottenuto per differenza da Γ e $\overset{\circ}{\Gamma}$.

Nel seguito per la derivazione covariante relativa a Λ, Γ, $\overset{\circ}{\Gamma}$ verranno usati i simboli D_Λ, D_Γ, $\overset{\circ}{D}$, rispettivamente.

3 - Campi Λ-ricorrenti

Un campo tensoriale $\boldsymbol{t}$ di $\mathscr{T}^r_s$ si dirà *Λ-ricorrente*, se esiste un campo vettoriale covariante v tale che $D_\Lambda \boldsymbol{t} = v \otimes \boldsymbol{t}$ ([5]).

([2]) Ci si riferisce ai teoremi 1, 3, 4, 5, 2, 6 del lavoro $[7]_5$. Si veda anche [**10**], def. 4.1, p. 197; teor. 2.1, p. 193.

([3]) Per le nozioni fondamentali sulle varietà quasi hermitiane si veda [**10**], ch. **9**; [**3**], II, ch. **9**. Per le nozioni fondamentali sulle varietà quasi complesse si veda [**2**]. Per le notazioni si vedano i lavori $[\mathbf{7}]_{2,5}$.

([4]) Ved. p. es. [**8**], p. 132; $[\mathbf{7}]_1$; $[\mathbf{5}]_{1,2}$.

([5]) Se $\Lambda = \overset{\circ}{\Gamma}$ si ritrova l'ordinaria nozione di campo ricorrente. Ved. p. es. [**9**].

Sussiste il Lemma

L_1. *Sia* $\boldsymbol{t}$ *un campo non singolare di* $\mathscr{T}_1^1$. *Se* $\boldsymbol{t}$ *è* Λ*-ricorrente e* Λ^**-ricorrente, risulta* $D_\Lambda \boldsymbol{t} = D_{\Lambda^*}\boldsymbol{t}$.

Dalle ipotesi, denotato con H il campo di $\mathscr{T}_2^1$ ottenuto per differenza di Λ^* e Λ, risulta

$$(2) \qquad (v^* - v) \otimes \boldsymbol{t} = D_{\Lambda^*}\boldsymbol{t} - D_\Lambda \boldsymbol{t} = c_2^2(H \otimes \boldsymbol{t}) - c_3^1(H \otimes \boldsymbol{t}) \ (^6) .$$

Poichè $\boldsymbol{t}$ non è singolare, esiste un campo $\boldsymbol{t}^*$ di $\mathscr{T}_1^1$ tale che $c_1^2(\boldsymbol{t} \otimes \boldsymbol{t}^*) = \delta$ (7). Moltiplicando la (2) a destra per $\boldsymbol{t}^*$ e operando successivamente le contrazioni c_2^2, c_2^1 si ottiene $v = v^*$ e quindi l'asserto.

Si noti che nella dimostrazione le strutture quasi complessa e riemanniana di V non intervengono. Di conseguenza il lemma sussiste più in generale per una qualunque varietà reale.

4 - Condizioni formali

Per i campi L di $\mathscr{T}_2^1$ G. B. Rizza ha introdotto le *condizioni*:

A $\qquad WL = L , \qquad \alpha W \alpha L = L ,$

B $\qquad W\alpha L = L , \qquad \alpha W L = L ,$

C $\qquad \alpha W \alpha W L = L ,$

D $\qquad W \alpha W L = L ,$

e le *condizioni simmetriche*:

$\bar{\boldsymbol{A}}$ $\qquad WL = - L , \qquad \alpha W \alpha L = - L ,$

$\bar{\boldsymbol{B}}$ $\qquad W\alpha L = - L , \qquad \alpha W L = - L ,$

$\bar{\boldsymbol{C}}$ $\qquad \alpha W \alpha W L = - L ,$

$\bar{\boldsymbol{D}}$ $\qquad W \alpha W L = - L .$

---

(6) In generale c_j^i è l'applicazione di contrazione relativa all'i-esimo indice di contravarianza ed allo j-esimo indice di covarianza. Ved. p. es. [**1**], p. 45.

(7) δ è il campo tensoriale di Kronecker.

In esse intervengono in modo essenziale l'*isomorfismo* $\alpha = \sigma - \varepsilon$ di $\mathcal{T}^1_2$ ottenuto per differenza dagli omomorfismi di simmetrizzazione e di emisimmetrizzazione e gli *isomorfismi* W, λ di $\mathcal{T}^1_2$, dipendenti dalla struttura quasi complessa della varietà V e definiti da

$$\lambda L = c^1_3(L \otimes \boldsymbol{J}) \,, \qquad WL = -\, c^2_2(\lambda L \otimes \boldsymbol{J}) \,. \tag{3}$$

Interviene nel seguito anche l'omomorfismo

$$K = \tfrac{1}{4}(1 + W\alpha + \alpha W + \alpha W \alpha W) \,,$$

introdotto dallo stesso autore (8).

Sono utili le *relazioni*:

$$\alpha\alpha = 1 \,, \quad \lambda\lambda = -1 \,, \quad WW = 1 \,, \tag{4}$$

$$W\lambda = \lambda W \,, \quad \alpha W \alpha W = W \alpha W \alpha \,, \quad \alpha\lambda = \lambda\alpha \text{ (9)} \,. \tag{5}$$

Conviene anche ricordare che *$D_\Lambda \boldsymbol{J}$ soddisfa la condizione* $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ (10), e che *la condizione* $K(L) = L$ equivale alla condizione $\boldsymbol{B}$ per L (11).

Intervengono nel seguito le *osservazioni*:

$\boldsymbol{O}_1$: *Ognuna delle condizioni* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \overline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{B}}_1, \overline{\boldsymbol{B}}_2$ *implica la condizione* $\boldsymbol{C}$.

$\boldsymbol{O}_2$. *Se L è un campo emisimmetrico, le condizioni* $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1, \overline{\boldsymbol{A}}_1, \overline{\boldsymbol{B}}_1$ *equivalgono rispettivamente alle condizioni* $\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}_2, \overline{\boldsymbol{A}}_2, \overline{\boldsymbol{B}}_2$.

$\boldsymbol{O}_3$: *Se L è un campo emisimmetrico le condizioni* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ *equivalgono ordinatamente alle condizioni* $\overline{\boldsymbol{B}}, \overline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{D}}, \overline{\boldsymbol{C}}$.

Le proprietà enunciate in $\boldsymbol{O}_1$ e $\boldsymbol{O}_2$, relative alle condizioni $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ sono note (12). Le altre si dimostrano in modo analogo.

---

(8) Per le condizioni elencate ved. $[7]_1$, p. 240-242; $[7]_5$, p. 472-473. In $[7]_1$, (22), p. 241 ed in $[7]_2$, (6), p. 13 è definito e studiato l'omomorfismo K. Per gli omomorfismi W, λ e le loro proprietà ved. p. es. $[7]_2$, p. 11 e $[7]_5$, p. 472. Alcune delle condizioni considerate si ritrovano anche in [**10**], ch. **6**, p. 134 e segg., espresse con operatori diversi.

(9) Cfr. nota precedente, $[7]_5$, p. 242 e $[7]_2$, p. 11.

(10) Ved. [**4**], p. 145, fine n. **5**.

(11) Ved. $[7]_1$, teor. $\boldsymbol{T}_1$, p. 242.

(12) Cfr. nota precedente, pp. 241-42.

In relazione ad O_3, poichè $\alpha L = - L$ per ipotesi, è immediato riconoscere l'equivalenza tra le condizioni A_1 e $\overline{B}_1$ onde da O_2 segue la equivalenza tra A e $\overline{B}$. In modo analogo si stabiliscono le altre proprietà, tenendo presente la seconda delle (5).

5 - Il campo tensoriale W^*E

Sia E un *campo emisimmetrico* di $\mathscr{T}^1_2$. Con riferimento all'isomorfismo W (n. 4) si consideri il campo tensoriale $W^*E = (1 - W)E$.

Sussistono le *proprietà*:

P_1. *W^*E soddisfa la condizione $\overline{A}_1$* [13].

P_2. *Ciascuna delle condizioni $\overline{A}_2, B_1, B_2, C, \overline{D}$ per W^*E equivale all'emisimmetria di W^*E ed alle condizioni $C, \overline{D}$ per E.*

P_3. *Ciascuna delle condizioni $A_1, \overline{B}_1, \overline{B}_2, D$ per W^*E implica l'annullarsi di W^*E e risulta equivalente alle condizioni $A, \overline{B}$ per E.*

La proprietà P_1 è ovvia conseguenza della $(4)_3$.

Per stabilire P_2, si noti che l'emisimmetria di W^*E equivale a quella di WE e che le condizioni C e $\overline{D}$ per il campo emisimmetrico E sono equivalenti in virtù di O_3.

Ciò premesso, tenendo presente la $(4)_3$ e l'emisimmetria di E ($\alpha E = - E$), è elementare provare che l'emisimmetria di W^*E equivale alle condizioni $C, \overline{D}$ per E e alla condizione $\overline{D}$ per W^*E. Analogamente si vede che dall'emisimmetria di W^*E segue la condizione B_1 per W^*E e di conseguenza, a causa delle osservazioni O_2, O_3, O_1, seguono le condizioni $B_2, \overline{A}, C$ per W^*E.

Inversamente, in virtù della proprietà P_1 e dell'osservazione O_1, ognuna delle condizioni $\overline{A}_2, B_1, B_2$ per W^*E implica la condizione C per W^*E. Operando su questa con l'isomorfismo α e tenendo presente le (4) e la emisimmetria di E, si ottiene

$$W\alpha WE + WE + E + \alpha WE = 0 \,. \tag{6}$$

---

[13] La proprietà sussiste, più in generale, sostituendo ad E un arbitrario campo di $\mathscr{T}^1_2$.

D'altra parte, tenendo presente la $(5)_2$, la condizione $\boldsymbol{C}$ su W^*E diviene

$$(7) \qquad - W\alpha WE + \alpha WE - E + WE = 0 .$$

Sommando membro a membro, segue l'emisimmetria di WE e quindi di W^*E. In conclusione la proprietà $\boldsymbol{P}_2$ è dimostrata.

Per stabilire $\boldsymbol{P}_3$, si osservi che dal confronto di $\boldsymbol{A}_1$ e $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ (proprietà $\boldsymbol{P}_1$) segue subito l'annullarsi di W^*E. In virtù di $\boldsymbol{O}_1$, ognuna delle condizioni $\overline{\boldsymbol{B}}_1$, $\overline{\boldsymbol{B}}_2$ per W^*E implica la $\boldsymbol{C}$ per W^*E e quindi, tenuta presente la $\boldsymbol{P}_2$, seguono le condizioni $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ per W^*E. Dal confronto segue ancora $W^*E = 0$. Ancora, la condizione $\boldsymbol{D}$ su W^*E, dato che $WW^*E = - W^*E$ (proprietà $\boldsymbol{P}_1$), implica la $\overline{\boldsymbol{B}}_1$ per W^*E e questa, come si è visto, conduce a $W^*E = 0$.

La dimostrazione di $\boldsymbol{P}_3$ si conclude notando che l'annullarsi di W^*E equivale alla condizione $\boldsymbol{A}$ per E. Quest'ultima in virtù della $\boldsymbol{O}_3$ equivale alla $\overline{\boldsymbol{B}}$.

Conviene terminare questo numero con due *osservazioni*:

$\boldsymbol{O}_4$. *Ciascuna delle condizioni* $\boldsymbol{A}_2$, $\overline{\boldsymbol{C}}$ *per* W^*E *equivale all'annullarsi di* $K(E)$.

$\boldsymbol{O}_5$. *Ciascuna delle condizioni* $\boldsymbol{B}$, $\overline{\boldsymbol{A}}$ *su* E *implica l'emisimmetria di* W^*E; *ciascuna delle condizioni* $\boldsymbol{D}$, $\overline{\boldsymbol{C}}$ *su* E *implica le condizioni* $\boldsymbol{A}_2$, $\overline{\boldsymbol{C}}$ *su* W^*E.

Si osservi anzitutto che, a causa di $\boldsymbol{P}_1$, le condizioni $\boldsymbol{A}_2$, $\overline{\boldsymbol{C}}$ per W^*E sono equivalenti. Ciò premesso, poichè $\alpha E = - E$, può scriversi $K(E) = \frac{1}{4}(E - WE - \alpha W\alpha E + \alpha W\alpha WE) = \frac{1}{4}(1 - \alpha W\alpha)\, W^*E$, da cui segue subito $\boldsymbol{O}_4$. La prima parte di $\boldsymbol{O}_5$ è immediata conseguenza di $\boldsymbol{O}_3, \boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{P}_2$.

Per la seconda parte si noti che le condizioni $\boldsymbol{D}$, $\overline{\boldsymbol{C}}$ su E sono equivalenti in virtù di $\boldsymbol{O}_3$. Per ipotesi è dunque $\alpha W\alpha WE = W\alpha W\alpha E = - E$, da cui, operando con l'isomorfismo W, è anche $\alpha W\alpha E = - WE$. È ormai immediato verificare che W^*E soddisfa alla condizione $\boldsymbol{A}_2$, equivalente a $\overline{\boldsymbol{C}}$ in base alla $\boldsymbol{O}_4$.

6 - Le classi $\mathscr{L}_+$, $\mathscr{L}_-$, $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_M$.

Conviene anzitutto ricordare che le *connessioni della classe* $\mathscr{L}$ (o *connessioni di* Levi-Civita *generalizzate*) sono quelle rappresentate da

$$(8) \qquad \Lambda = \overset{\circ}{\Gamma} + T .$$

Risulta cioè $\Gamma = \overset{\circ}{\Gamma}$ e $\Sigma = 0$ (n. **2**) (14).

(14) Cfr. nota (1); altri risultati concernenti la classe $\mathscr{L}$ ed alcune sue sottoclassi si trovano in $[\mathbf{7}]_4$ e $[\mathbf{5}]_2$.

In particolare interessano qui le classi $\mathscr{L}_+$, $\mathscr{L}_-$, $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_M$, costituite dalle connessioni di $\mathscr{L}$ che appartengono rispettivamente alle classi ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0 e di Martinelli (15).

Siano Λ, Λ^* due connessioni su V ed H il campo tensoriale di $\mathscr{T}^1_2$ ottenuto per differenza ($\Lambda = \Lambda^* + H$). È fondamentale per il seguito la *relazione*

$$D_\Lambda \boldsymbol{J} - D_{\Lambda^*}\boldsymbol{J} = -\lambda W^* H \,. \tag{9}$$

In particolare, se Λ è una connessione di $\mathscr{L}$ e se $\Lambda^* = \overset{\circ}{\Gamma}$ si ha

$$D_\Lambda \boldsymbol{J} - \overset{\circ}{D}\boldsymbol{J} = -\lambda W^* T \,. \tag{10}$$

Ciò premesso, la nozione di ricorrenza in senso classico o generalizzato (n. **3**) conduce ad alcuni risultati.

$\boldsymbol{T}_1$. *Se il campo $\boldsymbol{J}$, che definisce la struttura quasi complessa di V, è ricorrente rispetto a due connessioni Λ, Λ^*, risulta $D_{\Lambda^*}\boldsymbol{J} = D_\Lambda \boldsymbol{J}$ ed il campo H soddisfa alla condizione $\boldsymbol{A}_1$.*

Seguono i corollari:

$\boldsymbol{C}_1$. *Se Λ appartiene alla classe $\mathscr{L}$ ed il campo $\boldsymbol{J}$ è ricorrente e Λ-ricorrente, allora Λ appartiene alla classe $\mathscr{L}_+$.*

$\boldsymbol{C}_2$. *Se V è kähleriana e $\boldsymbol{J}$ è ricorrente rispetto ad una connessione Λ, risulta $D_\Lambda \boldsymbol{J} = 0$.*

La prima parte del teorema $\boldsymbol{T}_1$ è immediata conseguenza del lemma $\boldsymbol{L}_1$ del n. **3**, in quanto *il campo $\boldsymbol{J}$ non è singolare* (16). La seconda parte discende subito dal teorema $\boldsymbol{T}_9$ del lavoro [7]$_1$ (17).

Tenuto conto dell'osservazione al termine del n. **3**, si noti che il teorema stabilito non fa intervenire la struttura riemanniana di V. *Dunque il teorema* $\boldsymbol{T}_1$

(15) Ved. [**6**], p. 12; [**7**]$_1$, p. 11, teor. $\boldsymbol{T}_2$, $\boldsymbol{T}_3$. Le classi ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0 e di Martinelli sono definite, rispettivamente, dalle condizioni $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{C}$ sulla torsione (ved. teor. citati).

(16) Invero $\boldsymbol{J}$ può riguardarsi come un isomorfismo di $\mathscr{T}^1_1$, avente la proprietà $\boldsymbol{J}^2 = -1$.

(17) Per un errore di stampa nel testo del citato $\boldsymbol{T}_9$ figura $\boldsymbol{A}$ in luogo di $\boldsymbol{A}_1$.

sussiste più in generale con riferimento ad una qualunque varietà a struttura quasi complessa.

Nelle ipotesi del corollario $\boldsymbol{C}_1$, dal teorema $\boldsymbol{T}_1$, posto $\Lambda^* = \mathring{\Gamma}$, segue $D_\Lambda \boldsymbol{J} = \mathring{D}\boldsymbol{J}$. Poichè nel caso attuale $\Gamma = \mathring{\Gamma}$, il teorema $\boldsymbol{T}_{12}$ del lavoro [7]$_1$ conduce all'asserto.

Se poi V è kähleriana, $\boldsymbol{J}$ è ricorrente, anzi, come è noto, $\mathring{D}\boldsymbol{J} = 0$. Dal teorema T_1 segue immediatamente $\boldsymbol{C}_2$.

Un secondo gruppo di risultati si riferisce alle connessioni della classe $\mathscr{L}$ e sfrutta in modo essenziale la relazione (10).

$\boldsymbol{T}_2$. *Ognuna delle condizioni* $\boldsymbol{A}_1, \overline{\boldsymbol{B}}_1, \overline{\boldsymbol{B}}_2, \boldsymbol{D}$ *sul campo* $D_\Lambda \boldsymbol{J} - \mathring{D}\boldsymbol{J}$ *è necessaria e sufficiente perchè una connessione* Λ *della classe* $\mathscr{L}$ *appartenga ad* $\mathscr{L}_+$.

$\boldsymbol{T}_3$. *Ognuna delle condizioni* $\overline{\boldsymbol{A}}_2, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}, \overline{\boldsymbol{D}}$ *sul campo* $D_\Lambda \boldsymbol{J} - \mathring{D}\boldsymbol{J}$ *è necessaria e sufficiente perchè una connessione* Λ *della classe* $\mathscr{L}$ *appartenga ad* $\mathscr{L}_M$.

$\boldsymbol{T}_4$. *Ognuna delle condizioni*

$$\varepsilon(D_\Lambda \boldsymbol{J} - \mathring{D}\boldsymbol{J}) = -\lambda T\,, \qquad \sigma(D_\Lambda \boldsymbol{J} - \mathring{D}\boldsymbol{J}) = \lambda W T\,,$$

è necessaria e sufficiente perchè una connessione Λ *della classe* $\mathscr{L}$ *appartenga ad* $\mathscr{L}_0$.

$\boldsymbol{T}_5$. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una connessione della classe* $\mathscr{L}$ *appartenga ad* $\mathscr{L}_-$ *è* $(D_\Lambda \boldsymbol{J} - \mathring{D}\boldsymbol{J}) = -2\lambda T$.

Conviene completare i risultati con due osservazioni.

$\boldsymbol{O}_6$. *Se* Λ *appartiene ad* $\mathscr{L}_0$, *il campo* $D_\Lambda \boldsymbol{J} - \mathring{D}\boldsymbol{J}$ *verifica le condizioni* $\boldsymbol{A}_2, \overline{\boldsymbol{C}}$.

$\boldsymbol{O}_7$. *Se* Λ *appartiene ad* $\mathscr{L}_0$ *ed il campo* $D_\Lambda \boldsymbol{J} - \mathring{D}\boldsymbol{J}$ *è simmetrico ovvero emisimmetrico, allora* Λ *coincide con la connessione di* Levi-Civita $\mathring{\Gamma}$.

È bene infine osservare per il seguito che

$\boldsymbol{O}_8$. *Se* Λ *appartiene ad* $\mathscr{L}$, *condizione necessaria e sufficiente affinchè* Λ *sia* $\mathscr{L}_+$ *è che il campo* $D_\Lambda \boldsymbol{J} - \mathring{D}\boldsymbol{J}$ *sia nullo.*

Per stabilire i risultati enunciati si noti anzitutto che, essendo λ permutabile con α e con W ed anti-involutorio, se per un campo L di $\mathscr{T}^1_2$ sussiste una delle condizioni indicate all'inizio del n. 4, la medesima condizione sussiste anche per λL; e viceversa.

Ciò premesso, tenute presenti le definizioni delle classi $\mathscr{L}_+$, $\mathscr{L}_M$, i teoremi $\boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3$ discendono subito dalla relazione fondamentale (10), utilizzando opportunamente le proprietà $\boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_2$.

Il teorema T_4 segue subito dalla (10) e dalla definizione della classe $\mathscr{L}_0$, non appena si noti che la condizione D sulla torsione di Λ equivale alla simmetria di WT. Infine, dalla (10) e dalla definizione della classe $\mathscr{L}_-$, segue immediatamente il teorema T_5.

L'osservazione O_6 discende subito dalla (10) e dall'ultima parte della osservazione O_5. L'osservazione O_7 è conseguenza diretta del teorema T_4. L'osservazione O_8 segue dal teorema T_2, tenuto conto di P_2 e della (10), o anche, dal teorema T_{12} di [7]$_1$.

Conviene terminare osservando esplicitamente che, in virtù di O_8, *ognuna delle condizioni del teor.* T_2 *per il campo* $D_\Lambda J - \mathring{D}J$ *equivale al suo annullarsi.*

7 - Teoremi di caratterizzazione

Le considerazioni dei numeri precedenti permettono di ottenere altri risultati. Precisamente, su una *varietà quasi hermitiana* V *e per una connessione* Λ *della classe* $\mathscr{L}$, *sussistono i teoremi:*

T_6. *Due qualunque delle proprietà:* (a)$_6$ Λ *è una connessione* ϱ_+, (b)$_6$ J *è* Λ*-ricorrente,* (c)$_6$ V *è Kähleriana, implicano la rimanente.*

T_7. *Due qualunque delle proprietà:* (a)$_7$ Λ *è una connessione* ϱ_+, (b)$_7$ $D_\Lambda J$ *soddisfa ad una delle condizioni* A_1, $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$, D, (c)$_7$ V *è Kähleriana, implicano la rimanente.*

T_8. *Due qualunque delle proprietà:* (a)$_8$ Λ *è una connessione di* Martinelli, (b)$_8$ $D_\Lambda J$ *soddisfa ad una delle condizioni* B_1, B_2, $\overline{D}$, (c)$_8$ V *è quasi* Tachibana, *implicano la rimanente.*

T_9. *Due qualunque delle proprietà:* (a)$_9$ Λ *è una connessione di* Martinelli, (b)$_9$ $D_\Lambda J$ *soddisfa ad una delle condizioni* $\overline{A}_2$, C, (c)$_9$ V *è quasi* Kōto, *implicano la rimanente.*

Sussistono inoltre i teoremi:

T_{10}. *Sia* Λ *una connessione della classe* $\mathscr{L}_+$. *Allora se* $D_\Lambda J$ *è simmetrico,* V *è kähleriana e viceversa.*

T_{11}. *Sia* Λ *una connessione della classe* $\mathscr{L}_0$. *Allora se* $D_\Lambda J$ *soddisfa ad una delle condizioni* A_2, $\overline{C}$, V *è Hermitiana e viceversa.*

Prima di passare alla dimostrazione dei teoremi enunciati conviene osservare che essi consentono di *caratterizzare la varietà Kähleriane, quasi Tachibana, quasi Kōto, hermitiane, in relazione all'esistenza di connessioni delle classi* $\mathscr{L}_+$,

$\mathscr{L}_M$, $\mathscr{L}_0$ *soddisfacenti a particolari condizioni.* Da questo punto di vista, i teoremi $\boldsymbol{T}_6$, $\boldsymbol{T}_7$, $\boldsymbol{T}_8$, $\boldsymbol{T}_9$, $\boldsymbol{T}_{10}$, $\boldsymbol{T}_{11}$, *appaiono come generalizzazioni dei teoremi* **1, 3, 4, 5, 2, 6** del lavoro $[7]_5$. Invero alla connessione di Levi-Civita, che ha un ruolo essenziale in questi ultimi teoremi, vengono ora sostituite connessioni di tipo più generale.

Si noti ora che i teoremi $\boldsymbol{T}_6$, $\boldsymbol{T}_7$, $\boldsymbol{T}_8$, $\boldsymbol{T}_9$, possono essere considerati da un altro punto di vista. I primi due permettono, sulle varietà kähleriane, di *caratterizzare entro $\mathscr{L}$ la sottoclasse $\mathscr{L}_+$.* Gli altri due consentono di *caratterizzare entro $\mathscr{L}$ la sottoclasse $\mathscr{L}_M$,* quando la varietà sia, rispettivamente, quasi-Tachibana o quasi-Kōto.

Segue ora la dimostrazione dei teoremi.

Per stabilire il teorema $\boldsymbol{T}_6$ basta tenere presenti la $\boldsymbol{O}_8$ del n. **6**, il corollario C_1 e il teorema **1** di $[7]_5$. Al teorema $\boldsymbol{T}_7$ si perviene senza difficoltà in virtù del teorema $\boldsymbol{T}_2$ del n. **6** e del teorema **3** del lavoro $[7]_5$. Analogamente il teorema $\boldsymbol{T}_8$ si ottiene subito tenendo conto del teorema $\boldsymbol{T}_3$ del n. **6** e del teorema **4** del lavoro $[7]_5$. La dimostrazione di $\boldsymbol{T}_9$ discende subito avendo presente ancora il teorema $\boldsymbol{T}_3$ del n. **6** ed il teorema **5** di $[7]_5$.

Si perviene poi al teorema $\boldsymbol{T}_{10}$, sfruttando la $\boldsymbol{O}_8$ del n. **6** ed il teorema **2** di $[7]_5$: Si ottiene infine il teorema $\boldsymbol{T}_{11}$, tenendo presente la osservazione $\boldsymbol{O}_6$ del n. **6** e il teorema **6** di $[7]_5$.

Bibliografia

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre*, 3, Hermann, Paris 1958.

[2] B. ECKMANN, *Cours sur les variétés complèxes*, C.I.M.E., Cremonese, Roma 1956.

[3] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, *Foundations of differential Geometry* (I), (II), Interscience Publ., New York I, 1963-1969.

[4] V. MANGIONE, *Su alcune classi di connessioni di una varietà quasi complessa*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **9** (1968), 139-153.

[5] V. MANGIONE e A. VEZZANI: $[\bullet]_1$ *Due classi di connessioni sulle varietà riemanniane e quasi hermitiane*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **34** (1975-76), 97-110; $[\bullet]_2$ *Teoremi di rappresentazione per le connessioni della classe $\mathscr{D}$ e di alcune sottoclassi notevoli*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **2** (1976), 277-285.

[6] E. MARTINELLI, *Punti di vista geometrici nello studio delle varietà a struttura complessa*, C.I.M.E., Cremonese, Roma 1956.

[7] G. B RIZZA: [•]$_1$ *Sulle connessioni di una varietà quasi complessa,* Ann. Mat. (4) **68** (1965), 233-254; [•]$_2$ *Teoremi di rappresentazione per alcune classi di connessioni su di una varietà quasi complessa,* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, **1** (1969), 9-25; [•]$_3$ *Alcuni risultati sulle varietà quasi hermitiane,* X Congresso U.M.I., Cagliari (Settembre 1975); [•]$_4$ *A set of affine connections of Riemannian and almost Hermitian Manifolds,* Simon Stevin, Wis-en Natuurkundig Tijdshrift **51** (1977), 79-81; [•]$_5$ *On Kähler manifolds and their generalizations,* Rend. Lincei (8), **62** (1977), 471-475.

[8] J. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus,* Springer, Berlin 1954.

[9] T. J. WILLMORE, *An introduction to differential geometry,* Clarendon-Press, Oxford 1961.

[10] K. YANO, *Differential geometry on complex and almost complex spaces,* Pergamon Press, Oxford 1965.

Summary

Let V be an almost Hermite manifold. The study of four classes of generalized Riemannian connections leads to new characterizations for Kähler manifolds, almost Tachibana manifolds, almost Kōto manifolds and Hermite manifolds.

Moreover, characterization theorems for the four classes can be obtained, by considering the covariant derivative of the field $\boldsymbol{J}$ of the almost complex structure of V. Further results of the same type hold, when V belongs to one of the above mentioned classes of manifolds.

* * *