Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 379-385

ADRIANO MANIGLIA (*)

Generazione di gruppi di funzioni generalizzati (**)

1 - Premesse

Sia $\mathscr{F}$ l'insieme di tutte le funzioni di n variabili indipendenti $\omega^1, \dots, \omega^n$, con $\omega \equiv (\omega^1, \dots, \omega^n)$ variabile in un certo dominio di R^n, che verifichino condizioni di regolarità tali da assicurare, analiticamente, la validità di ciò che si dirà nel seguito.

Nell'insieme $\mathscr{F}$ ora considerato scegliamo n^2 funzioni (1), $\eta^{\alpha\beta}(\omega)$, $(\alpha, \beta = 1, \dots, n)$ antisimmetriche in α e β e che verifichino la proprietà

$$\eta^{\lambda\mu}\frac{\partial\eta^{\nu\varrho}}{\partial\omega^\mu} + \eta^{\nu\mu}\frac{\partial\eta^{\varrho\lambda}}{\partial\omega^\mu} + \eta^{\varrho\mu}\frac{\partial\eta^{\lambda\nu}}{\partial\omega^\mu} = 0\,; \tag{1.1}$$

con esse forniamo una matrice funzionale antisimmetrica $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ mediante la quale possiamo definire la P.P.G. fra due funzioni (cfr. [4], pag. 413) e costruire, partendo da insiemi di s funzioni indipendenti di $\mathscr{F}(s \leqslant n)$, gruppi di funzioni generalizzati (G.F.G.) di rango $r(s \leqslant r \leqslant n)$, singolari e non singolari, a seconda che la matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ sia singolare o no (cfr. risp. [3] e [1]).

Nel caso in cui $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ è non singolare (2) si ha che $\mathscr{F}$ è un G.F.G. e che ogni altro gruppo di rango $r < n$ risulta essere un suo sottogruppo di funzioni generalizzato (S.G.F.G.); inoltre, poichè $\mathscr{F}$ è un'algebra (3), ha senso eseguire, fra funzioni appartenenti ai suoi diversi S.G.F.G., tutte le operazioni definite

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via Arnesano, 73100 Lecce, Italy.

(**) Ricevuto: 12-IV-1979.

(1) È chiaro, da quanto segue, che n almeno di queste funzioni sono nulle.

(2) Si ricordi che in tal caso n dev'essere un numero pari.

(3) Con l'usuale operazione di prodotto fra due funzioni.

in $\mathscr{F}$ stesso, e cercare quindi nuovi S.G.F.G. che siano legati a queste operazioni, cioè alle varie strutture di cui $\mathscr{F}$ è munito.

Una ricerca dello stesso tipo è lecito fare nel caso in cui $\left(\eta^{\alpha\beta}(\omega)\right)$ è singolare [4], ma c'è da tener presente alcune differenze rispetto al caso non singolare. Se il rango di $\left(\eta^{\alpha\beta}(\omega)\right)$ e $n-k$, esistono k funzioni neutre indipendenti (cfr. [**5**]) ed è possibile determinare in $\mathscr{F}$ una base (canonica) formata da $(n-k)$ funzioni non neutre e da k funzioni neutre (cfr. [**3**], Teor. IV); da ciò si ha che l'insieme $\mathscr{F}$ viene ripartito in due sottoinsiemi: un G.F.G.S. di rango $n-k$ [5], ed un sottoinsieme N i cui elementi sono tutte e sole quelle funzioni che dipendono da ω per il tramite di k qualsiasi funzioni neutre indipendenti.

Nel seguito noi tratteremo dapprima il caso in cui $\left(\eta^{\alpha\beta}(\omega)\right)$ è non singolare, ed in un secondo tempo il caso singolare.

Inoltre, senza ledere la generalità degli argomenti trattati e per facilità di esposizione, supporremo di fissare in $\mathscr{F}$, una volta per tutte, una funzione $f \neq 0$ e due G.F.G. G_r e $G_{r'}$ di rango r ed r' rispettivamente.

2 - S.G.F.G. [6] generato in $\mathscr{F}$ dalla somma di f e di G_r

Consideriamo il sottoinsieme di $\mathscr{F}$: $H = \{h \in \mathscr{F} / h = f + g \text{ con } g \in G_r\}$ che diciamo somma di f e di G_r.

Se $h = f + g$, $h' = f + g'$ sono due funzioni di H, si ha

$$(h, h')^* = (f + g, f + g')^* = (f, f)^* + (f, g')^* + (g, f)^* + (g, g')^* . \tag{2.1}$$

Dalla presenza nel 2° membro della (2.1) del secondo e del terzo addendo, si deduce che H in generale non è un S.G.F.G. di $\mathscr{F}$; infatti ciò si verifica solo se

(a) $(f, g')^* = (g, f)^* = 0$,

cioè nel caso che f appartiene al S.G.F.G. reciproco di G_r, oppure se

(b) $(f, g')^*$ e $(g, f)^*$ sono funzioni di G_r, cioè nel caso che $f \in G_r$ [7].

---

[4] In tal caso n può essere sia pari che dispari (cfr. [**3**]).

[5] $n-k$ risulta essere sempre un numero pari.

[6] Nei § **2**, ..., **8** è trattato il caso in cui $\left(\eta^{\alpha\beta}(\omega)\right)$ è non singolare, come già annunciato.

[7] Se fosse $(\cdot)\ (f, g' - g)^* = f + \bar{g}$, $\forall g, g' \in G_r$, con $\bar{g} \in G_r$, allora considerate due altre funzioni h, h' in G_r, sarebbe anche: $(\cdot\cdot)\ (f, h' - h)^* = f + \bar{h}$ con $\bar{h} \in G_r$. Sottraendo $(\cdot\cdot)$ da $(\cdot)$ si avrebbe $(f, (g' - g) - (h' - h))^* = (\bar{g} - \bar{h}) \in G_r$. Tenendo presente che G_r è spazio vettoriale, dall'arbitrarietà di g, g', h, h' si verificherebbe che $(f, \tilde{g})^* \in G_r$, $\forall \tilde{g} \in G_r$ il che comporta ovviamente che $f \in G_r$.

Supponiamo ora che le condizioni (a) e (b) non siano verificate. Allora osserviamo che, essendo $H \subseteq \mathscr{F}$, ed essendo $\mathscr{F}$ un G.F.G., è non vuota la famiglia dei S.G.F.G. di $\mathscr{F}$ che contengono H, in quanto ad essa appartiene $\mathscr{F}$ stesso; non solo, ma tale famiglia è finita, e quindi l'intersezione dei suoi elementi è ancora un S.G.F.G. di $\mathscr{F}$ (cfr. [**2**], pag. 283) contenente H; se ne trae che il S.G.F.G. minimo contenente H è proprio l'intersezione dei S.G.F.G. che contengono H stesso: indichiamo tale S.G.F.G. minimo con H^*. Sia ora $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, sempre nell'ipotesi che le condizioni (a) e (b) non siano verificate, una base di G_r.

Poichè $f \notin G_r$, le $(r+1)$ funzioni $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ sono indipendenti, e partendo da esse si può costruire un G.F.G. G_s $(s \geqslant r+1)$ contenente senz'altro H, e che è ancora un S.G.F.G. di $\mathscr{F}$. G_s lo diciamo S.G.F.G. di $\mathscr{F}$ generato da H.

Facciamo vedere ora che $G_s = H^*$.

$G_s \supseteq H^*$: infatti, poichè H^* è contenuto in ogni S.G.F.G. contenente H, è contenuto anche in G_s.

$G_s \supseteq H^*$: infatti, detto $\bar{G}$ un qualsiasi S.G.F.G. di $\mathscr{F}$ contenente H, si ha che ad esso appartengono le funzioni $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ e quindi $\bar{G} \supseteq G_s$.

Ora, essendo H^* l'intersezione di tutti i gruppi del tipo di $\bar{G}$, risulta anche $H^* \supseteq G_s$.

Con una notazione usuale in algebra indichiamo $H^* = G_s$ con $\langle H \rangle$.

3 - S.G.F.G. generato in $\mathscr{F}$ dall'unione di f con G_r

Consideriamo il sottoinsieme di $\mathscr{F}$: $U = \{f\} \cup G_r$ e, per evitare argomentazioni banali, supponiamo che $f \notin G_r$.

Se h, h' sono due funzioni distinte di U, si possono verificare due casi

(a)$'$ $(h, h')^* \in G_r$ se $h, h' \in G_r$;

(b)$'$ $(h, h')^* \notin G_r$ se una delle due funzioni h, h' coincide con f.

Inoltre si ha

(b)$'$ $\Rightarrow (h, h')^* \notin U$ e quindi in generale U non è S.G.F.G. di $\mathscr{F}$.

Consideriamo ora la base di G_r: $\varphi^1, \ldots, \varphi^r$; la $(r+1)$-upla di funzioni

$$f, \ \varphi^1, \ldots, \varphi^r \tag{3.1}$$

risulta essere indipendente e quindi, a partire da essa, si può costruire in $\mathscr{F}$, un S.G.F.G., $\langle U \rangle$, che coincide senz'altro con il S.G.F.G. $\langle H \rangle$ del n. precedente; $\langle U \rangle$ inoltre risulta banalmente essere anche il minimo S.G.F.G. di $\mathscr{F}$ contenente U, e quindi in conclusione si ha la seguente

Proposizione 1.3. I due sottoinsiemi di $\mathscr{F}$, H ed U generano lo stesso S.G.F.G. di $\mathscr{F}$.

4 - S.G.F.G. generato in $\mathscr{F}$ dalla somma di G_r e di $G_{r'}$

Consideriamo il sottoinsieme di $\mathscr{F}$: $H' = G_r + G_{r'} = \{h \in \mathscr{F} / \exists f \in G_r$ e $\exists f' \in G_{r'}$ tale che $h = f + f'\}$.

Dette h, h' due funzioni di H', se $h = f + f'$, $h' = g + g'$, con $f \in G_r$, $f' \in G_{r'}$, si ha

$$(h, h')^* = (f + f', g + g')^* = (f, g)^* + (f, g')^* + (f', g)^* + (f', g')^* \,. \tag{4.1}$$

Dalla presenza nel 2° membro della (4.1) del 2° e 3° addendo si deduce che in generale H' non è un S.G.F.G. di $\mathscr{F}$; più precisamente H' risulta essere un S.G.F.G. se si verifica una delle seguenti circostanze

(c) $(f, g')^* = (f, g)^* = 0$, cioè se G_r e $G_{r'}$ sono tali che uno sia sottogruppo del gruppo reciproco dell'altro;

(d) $G_r \subseteq G_{r'}$ oppure $G_{r'} \subseteq G_r$.

Supponiamo ora che le condizioni (c) e (d) non siano verificate; in tal caso H' non è senz'altro un S.G.F.G. di $\mathscr{F}$, non solo, ma essendo non vuota la famiglia dei S.G.F.G. di $\mathscr{F}$ che contengono H', in quanto anche in questo caso vi appartiene $\mathscr{F}$ stesso, considerata l'intersezione degli elementi di tale famiglia, otteniamo il S.G.F.G. di $\mathscr{F}$ contenente H', e che indichiamo con $\bar{H}^*$.

Siano ora: $\bar{r}$ = max numero di funzioni indipendenti in H', $\varphi^1, \ldots, \varphi^{\bar{r}}$ $\bar{r}$ funzioni indipendenti in H'. A partire dalle $\bar{r}$ funzioni $\varphi^1, \ldots, \varphi^{\bar{r}}$ costruiamo un S.G.F.G. di $\mathscr{F}$, di rango $\bar{s}(\bar{s} \geqslant \bar{r})$ e che indichiamo con $G_{\bar{s}}$. Risulta

$$H' \subset G_{\bar{s}}\,; \tag{4.2}$$

infatti se $h \in H'$, essa è una funzione che dipende da ω per il tramite delle $\varphi^1, \ldots, \varphi^{\bar{r}}$, altrimenti sarebbe indipendente da esse e quindi $\bar{r}$ non sarebbe il massimo numero di funzioni indipendenti di H'.

Inoltre, con un ragionamento analogo a quello adottato al n. **2**, si può provare che $\bar{H}^* = G_{\bar{s}}$. $G_{\bar{s}}$ lo diciamo ancora S.G.F.G. generato in $\mathscr{F}$ da H, e con notazione algebrica scriviamo $G_{\bar{s}} = \langle H' \rangle$. Vale quindi la

Proposizione 1.4. Il S.G.F.G. di $\mathscr{F}$ generato da H' è il minimo S.G.F.G. di $\mathscr{F}$ che contiene H' stesso.

5 - S.G.F.G. di $\mathscr{F}$ generato da $G_r \cup G_{r'}$

Consideriamo il sottoinsieme di $\mathscr{F}$: $U' = G_r \cup G_{r'}$. Indicate con f, g due funzioni di U', è chiaro che, nel caso che $f \in G_r$ e $g \in G_{r'}$, $(f, g)^* \notin U'$ se non quando siano verificate le condizioni (c) e (d) del n. 4.

Supposto che ciò non accada osserviamo che

$$U = \bigcup_{f \in G_r} (f \cup G_{r'}) \qquad \text{e} \qquad H' = \bigcup_{f \in G_r} (f + G_{r'}) \, .$$

Ricordando la Proposizione 1.3, si ha

$$\langle f \cup G_{r'} \rangle = \langle f + G_{r'} \rangle \Rightarrow \bigcup_{f \in G_r} \langle f \cup G_{r'} \rangle = \bigcup_{f \in G_r} \langle f + G_{r'} \rangle \Rightarrow \bigcup_{f \in G_r} \langle f \cup G_{r'} \rangle$$

$$= \langle \bigcup_{f \in G_{r'}} \langle f + G_{r'} \rangle \rangle \Leftrightarrow \langle U' \rangle = \langle H' \rangle \, .$$

Si ha quindi

Proposizione 1.5. Il S.G.F.G. di $\mathscr{F}$ generato dalla somma di G_r e $G_{r'}$ coincide con quello generato dalla loro unione.

6 - S.G.F.G. generati in $\mathscr{F}$ dal prodotto e dalla P.P.G. di f con G_r

Ci proponiamo ora di vedere come i S.G.F.G. di $\mathscr{F}$ generati dai suoi due sottoinsiemi

$$\Pi = \{p \in \mathscr{F} / p = f \cdot g \ \text{ con } g \in G_r\} \, , \qquad P = \{k \in \mathscr{F} / k = (f, g)^* \ \text{ con } g \in G_r\} \, ,$$

detti rispettivamente prodotto e P.P.G. di f con G_r, coincidono entrambi col S.G.F.G. $\langle H \rangle = \langle U \rangle$.

Intanto, se $p = f \cdot g$ e $p' = f \cdot g'$ sono due funzioni di Π e se $k = (f \cdot g)^*$ e $k' = (f, g')^*$ sono due funzioni di P, dal fatto che

$$(p, p')^* = gg'(f, f)^* + fg'(g, f)^* + fg(f, g')^* + f^2(g, g')^*$$

e dal fatto che $(k, k')^*$ è una funzione che dipende dalle ω per il tramite delle derivate delle $\eta^{\alpha\beta}$ e di f oltre che da quelle di g e g', seque che Π e P non sono S.G.F.G. di $\mathscr{F}$ se non quando sono verificate le condizioni (a) e (b) del n. **2**.

Nel caso poi che tali condizioni non sono verificate, i S.G.F.G. di $\mathscr{F}$ generati da Π e P sono proprio quelli costruiti a partire dalle $r + 1$ funzioni (indipendenti) $f, \varphi^1, \ldots, \varphi^r$, dove $(\varphi^1, \ldots, \varphi^r)$ è una base di G_r.

Vale dunque il seguente

Teorema 1.6. *I* S.G.F.G. *generati in* $\mathscr{F}$ *dal prodotto e dalla* P.P.G. *di* f *con* G_r *coincidono con i* S.G.F.G. *generati dalla somma e dall'unione di* f *con* G_r; *si ha cioé* $\langle H\rangle = \langle U\rangle = \langle \Pi\rangle = \langle P\rangle$.

7 - S.G.F.G. generati in $\mathscr{F}$ dal prodotto e dalla P.P.G. di G_r con $G_{r'}$

Siano

$$\Pi' = \{p \in \mathscr{F}' / p = f\cdot g \text{ con } f \in G_r \text{ e } g \in G_{r'}\},$$

$$P' = \{k \in \mathscr{F}' / k = (f, g)^* \text{ con } f \in G_r \text{ e } g \in G_{r'}\}$$

due sottoinsiemi di $\mathscr{F}$ che chiamiamo prodotto e P.P.G. di G_r con $G_{r'}$.

Con argomentazioni analoghe a quelle esposte al n. **6** è facile vedere che essi non sono due S.G.F.G. di $\mathscr{F}$, se non quando ci si pone nelle condizioni (c) e (d) del n. **4**. Inoltre, se tali condizioni non sono verificate, dal fatto che

$$\Pi' = \bigcup_{f\in G_r} f\cdot G_{r'}, \qquad P' = \bigcup_{f\in G_r} (f, G_{r'})^*$$

e tenendo presente quanto detto al n. precedente, segue facilmente che

$$\langle H'\rangle = \langle U'\rangle = \langle \Pi'\rangle = \langle P'\rangle, \tag{7.1}$$

e che quindi vale il

Teorema 1.7. *I* S.G.F.G. *di* $\mathscr{F}$ *generati dal prodotto e dalle* P.P.G. *di* G_r *e* $G_{r'}$ *coincidono con quelli generati dalla loro somma e dalla loro unione.*

8 - Caso dei G.F.G.S.

Supponiamo ora che la matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$, di cui al n. **1**, sia singolare; vediamo se anche in questo caso sono validi i Teoremi 1.6 e 1.7 e, qualora non lo siano, se è possibile modificarne l'enunciato in modo tale da renderli validi nel caso singolare.

Noi sappiamo che le ipotesi più restrittive in cui valgono i suddetti teoremi sono quelle espresse dalle condizioni (a) e (b) del n. **2** per il Teorema 1.6 e quelle espresse dalle condizioni (c) e (d) del n. **4** per il Teorema 1.7.

Sappiamo pure che (cfr. [**3**], teor. I) l'insieme N di funzioni definito al n. **1** è un sottoinsieme del gruppo reciproco di ogni G.F.G.S.; si deduce da ciò che le condizioni (a), (b), (c) e (d), pur potendo esprimere circostanze diverse nei due casi, singolare e non singolare, conservano per entrambi la medesima validità nella forma; si può dunque concludere che i due succitati teoremi continuano a valere, sotto le stesse ipotesi, anche nel caso dei G.F.G.S.

9 - Conclusioni

Fra tutte le operazioni che si possono definire fra gli elementi dei diversi Gruppi di Funzioni Generalizzati singolari e non singolari, definiti da una medesima matrice, la somma, l'unione, il prodotto e la P.P.G., sono tali da originare degli insiemi di funzioni, in generale diversi fra loro, i quali però generano tutti lo stesso Gruppo di Funzioni generalizzato.

Bibliografia

[1] G. Andreassi, *Gruppi di funzioni generalizzati*, Rend. di Mat. (in corso di stampa).

[2] L. P. Eisenhart, *Continuous groups of trasformations*, Dover Pubblications, New York 1961.

[3] A. Maniglia, *Gruppi di funzioni generalizzati singolari*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 115-123.

[4] N. Mukunda and E. C. G. Sudarshan, *Structure of the Dirac Bracket in classical Mechanics*, Department of Physics, Syracuse University, Syracuse, N.Y. april 1967.

[5] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A modern perspective*, Wiley, N.Y. 1974.

Summary

In this paper the notion is introduced of generalized (singular or not) function group generated by an arbitrary set of functions of n variables; then considering two groups (singular or not) their sum, their union, their product and their Generalized Poisson Bracket are defined and it is proved that these sets define the same generalized function group.

* * *