Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 401-405

ALESSANDRO TANCREDI e ALBERTO TOGNOLI (*)

Su una decomposizione dei punti di non coerenza di uno spazio analitico reale (**)

Introduzione

Sia X uno spazio analitico reale e sia $N(X)$ l'insieme dei punti in cui X è non coerente. In [3] è stato provato che $N(X)$ è contenuto in un sottoinsieme analitico di codimensione almeno 2, mentre in [2] è dato un esempio in cui $N(X)$ non è un sottoinsieme analitico di X. In [4] M. Galbiati ha dimostrato che $N(X)$ è un sottoinsieme semianalitico di X di codimensione almeno 2 facendo vedere che X ammette una stratificazione semianalitica tale che $N(X)$ risulta unione di suoi strati.

In questo lavoro si dà una diversa e più diretta dimostrazione del fatto che $N(X)$ è semianalitico provando il seguente

Teorema 1. *Sia X uno spazio analitico reale; l'insieme $N(X)$ dei punti in cui X è non coerente è un sottoinsieme semianalitico chiuso di X di codimensione almeno due.*

1 - Osservazioni preliminari

Poichè la questione in esame è di natura locale supporremo che X sia un sottoinsieme analitico di $\boldsymbol{R}^n$, irriducibile di dimensione p, tale che esista un sottoinsieme analitico complesso Y di $\boldsymbol{C}^n$, puramente dimensionale di dimen-

---

(*) Indirizzi: A. TANCREDI, Istituto di Matematica, Università, 06100 Perugia, Italy; A. TOGNOLI, Istituto di Matematica, Università, 56100 Pisa, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 7-VI-1979.

sione p, per il quale sia $Y \cap \boldsymbol{R}^n = X$; si può prendere per Y la complessificazione ben ridotta di X (cfr. [4]). Osserviamo infine che il coniugio di $\boldsymbol{C}^n$ induce una antiinvoluzione $\sigma\colon Y \to Y$ tale che $X = \{y \in Y \mid \sigma(y) = y\}$ (cfr. [7]).

Sia $\hat{Y}$ il normalizzato di Y e sia $\pi\colon \hat{Y} \to Y$ l'applicazione canonica. Come è noto, $\hat{Y}$ è uno spazio complesso localmente irriducibile di dimensione p e π un'applicazione propria con fibre finite; inoltre, se S è il luogo singolare di Y, π induce un isomorfismo dell'aperto denso $\hat{Y} - \pi^{-1}(S)$ di $\hat{Y}$ sull'aperto denso $Y - S$ di Y (cfr. [1]). Ricordiamo che $\hat{Y}$ può identificarsi con l'insieme delle coppie (Y'_y, y), ove $y \in Y$ e Y'_y è una componente irriducibile del germe Y_y, e che l'applicazione canonica è allora individuata da $\pi(Y'_y, y) = y$. La topologia sull'insieme suddetto viene definita nel modo seguente: se Y' è un sottoinsieme analitico irriducibile di Y che induce il germe Y'_y, si considerano gli intorni aperti irriducibili V di y in Y'; gli insiemi $\hat{V}$ costituiti dalle coppie (V'_u, u), ove V'_u è una componente irriducibile di V_u e $u \in V$, costituiscono un sistema di intorni del punto (Y'_y, y) in $\hat{Y}$.

In [7] si prova che l'applicazione $\hat{\sigma}\colon \hat{Y} \to \hat{Y}$ definita da $\hat{\sigma}(Y'_y, y) = (\sigma(Y'_y), \sigma(y))$ è una antiinvoluzione che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \hat{Y} \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[d, "\pi"'] & \hat{Y} \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "\sigma"'] & Y \end{tikzcd}$$

Definiamo i due sottoinsiemi analitici reali di $\hat{Y}$

$$\hat{X} = \{\hat{y} \in \hat{Y} \mid \hat{\sigma}(\hat{y}) = \hat{y}\}, \qquad \check{X} = \pi^{-1}(X).$$

Risulta ovviamente $\hat{X} \subset \check{X}$ e π induce un'applicazione analitica reale di $\check{X}$ in X che seguiteremo a indicare ancora con π. In [7] si prova che se X è coerente e Y è la sua complessificazione, allora $\check{X}$ coincide con $\hat{X}$ ed è uno spazio analitico reale coerente la cui complessificazione è $\hat{Y}$.

Lemma 1. – *Sia a un punto di X.* (i) *Se X'_a è una componente irriducibile di X_a di dimensione p, allora la sua complessificata $\tilde{X}'_a$ è una componente irriducibile di Y_a; inoltre il punto $\hat{a} = (\tilde{X}'_a, a)$ è in $\hat{X}$ e $\dim_R \hat{X}_{\hat{a}} = p$.* (ii) *Se $\hat{a}$*

è il punto (Y'_a, a) *di* $\hat{X}$ *e se* $\dim_R (Y'_a \cap \boldsymbol{R}^n) < p$, *allora* $\dim_R \hat{X}_{\hat{a}} < p$; *in particolare se* $\dim_R X_a < p$, *allora* $\dim_R \hat{X}_{\hat{y}} < p$ *per ogni* $\hat{y} \in \pi^{-1}(a) \cap \hat{X}$.

Dim. (i) Si vede subito che $\tilde{X}'_a$ è una componente irriducibile di Y_a. Poichè una antiinvoluzione trasforma germi di componenti irriducibili in germi di componenti irriducibili (cfr. [7]), $\sigma(\tilde{X}'_a)$ è una componente irriducibile di Y_a che, nel nostro caso, deve coincidere con $\tilde{X}'_a$; invero, se così non fosse, essendo $X'_a \subset \tilde{X}'_a \cap \sigma(\tilde{X}'_a)$, risulterebbe $\dim_R X'_a < p$, in contrasto con le ipotesi fatte. Si vede subito che in ogni intorno di $\hat{a}$ in $\check{X}$ cadono punti che sono immagini inverse secondo π di punti regolari sia per X che per Y, per cui si può concludere che $\dim_R \hat{X}_{\hat{a}} = p$.

(ii) Sia $\hat{a} = (Y'_a, a) \in \hat{X}$ e sia Y' un sottoinsieme analitico irriducibile che induce il germe Y'_a; possiamo supporre che $\hat{Y}'$ sia un intorno di $\hat{a}$ in $\hat{Y}$. Risulta $\hat{Y}' \cap \hat{X} \subset \pi^{-1}(Y' \cap X)$ e quindi si ha $\dim_R \hat{X}_{\hat{a}} < p$.

2 - Insiemi semianalitici

Per le proprietà degli insiemi semianalitici di cui avremo bisogno rimandiamo a [5] e [6]. Mantenendo le notazioni usate fino ad ora porremo

$$\hat{X}_p = \{\hat{y} \in \hat{X} \,|\, \dim_R \hat{X}_{\hat{y}} = p\}\,, \qquad \hat{C}^1 = \{\hat{y} \in \hat{X} \,|\, \dim_R \hat{X}_{\hat{y}} < p\}\,, \qquad \hat{C}^2 = \check{X} - \hat{X}\,,$$

$$\hat{A}^1 = \overline{\hat{C}^1} \cap \hat{X}_p, \qquad \hat{A}^2 = \overline{\hat{C}^2} \cap \hat{X}_p, \qquad A^1 = \pi(\hat{A}^1)\,, \qquad A^2 = \pi(\hat{A}^2)\,.$$

Lemma 2. A^1 e A^2 *sono sottoinsiemi semianalitici di* X; *risulta inoltre* $\dim A^1 \leqslant p-3$ *e* $\dim A^2 \leqslant p-2$.

Dim. Cominciamo con l'osservare che l'insieme $\hat{M}$ dei punti in cui $\hat{X}$ è regolare di dimensione p è un sottoinsieme semianalitico di $\hat{X}$; essendo poi $\overline{\hat{M}} = \hat{X}_p$ anche quest'ultimo è semianalitico in $\hat{X}$. È allora ovvio che $\hat{C}^1 = \hat{X} - \hat{X}_p$ è semianalitico in $\hat{X}$ e quindi anche in $\check{X}$, giacchè $\hat{X}$ è chiuso; analogamente si vede che $\hat{C}^2$ è semianalitico in $\check{X}$.

L'insieme $\hat{C}^1$ è contenuto nel luogo singolare dello spazio complesso normale $\hat{Y}$; di conseguenza deve essere $\dim \hat{C}^1 \leqslant p-2$.

D'altro canto sia $\hat{x} = (Y'_x, x)$ un punto di $\hat{C}^2$; allora $\sigma(Y'_x)$ è una componente irriducibile di Y_x diversa da Y'_x, per cui $\dim_R (Y'_x \cap X) < p$. Ne segue che $\dim_R \check{X}_{\hat{x}} < p$ e quindi $\dim \hat{C}^2 \leqslant p-1$.

Si vede ancora subito che $\hat{A}^1$ e $\hat{A}^2$ sono entrambi semianalitici in $\check{X}$; avendosi poi $\hat{C}^1 \cap \hat{A}^1 = \emptyset$ e $\hat{C}^2 \cap \hat{A}^2 = \emptyset$, risulta $\dim \hat{A}^1 \leqslant p-3$ e $\dim \hat{A}^2 \leqslant p-2$.

Infine, poichè π è un'applicazione analitica propria con fibre finite, si può concludere che A^1 e A^2 sono sottoinsiemi semianalitici di X e dim $A^1 \leqslant p-3$, dim $A^2 \leqslant p-2$.

Lemma 3. *Se $a \in X - A^1 \cup A^2$, ogni componente irriducibile di dimensione p del germe X_a è coerente.*

Dim. Sia Z_a una componente irriducibile di dimensione p del germe X_a; per il Lemma 1 il punto $\hat{a} = (\tilde{Z}_a, a)$ è in $\hat{X}_p - \overline{\hat{C}}^1 \cup \overline{\hat{C}}^2$. Siano rispettivamente Z e $\tilde{Z}$ i sottoinsiemi analitici irriducibili che inducono i germi Z_a e $\tilde{Z}_a$. Restringendosi opportunamente in un intorno di a si può supporre $Z = \tilde{Z} \cap X$ e che $\hat{\tilde{Z}} \cap \check{X}$ sia un intorno aperto di $\hat{a}$ in $\check{X}$ che non incontra $\hat{C}^1$ e contenuto in $\hat{X}$; di conseguenza possiamo assumere

$$\hat{\tilde{Z}} \cap \check{X} = \hat{\tilde{Z}} \cap \hat{X}_p . \tag{$*$}$$

Sia ora x un punto qualunque di Z. Osserviamo intanto che Z_x non ha componenti irriducibili di dimensione minore di p giacchè dalla $(*)$ segue $\dim_R \check{X}_{\hat{y}} = \dim_R \hat{X}_{\hat{y}} = p$ per ogni $\hat{y} \in \hat{\tilde{Z}} \cap \check{X}$. Siano $\tilde{Z}_x^1, \ldots, \tilde{Z}_x^{n_x}$ le componenti irriducibili di $\tilde{Z}_x$; ancora dalla $(*)$ segue che i punti $\hat{x}_i = (\tilde{Z}_x^i, x)$ sono in $\hat{X}$ per ogni $i = 1, \ldots, n_x$. Avendosi $\dim_R \hat{X}_{\hat{x}_i} = p$, per ogni $i = 1, \ldots, n_x$, dal Lemma 1 segue subito che la dimensione della parte reale di ogni $\tilde{Z}_x^i$ non può essere inferiore a p. Da quanto detto segue che per ogni $x \in Z$ il numero delle componenti irriducibili di Z_x è uguale al numero delle componenti irriducibili di $\tilde{Z}_x$; essendo infine $\dim_R Z_x = \dim_C \tilde{Z}_x$ per ogni $x \in Z$, possiamo concludere che $\tilde{Z}$ è il complessificato di Z il quale risulta quindi coerente.

3 - Dimostrazione del Teorema 1

Sia T l'insieme dei punti $x \in X$ tali che in X_x esistano componenti irriducibili di dimensione strettamente inferiore a p e sia ${}_{p-1}X = T - A^1 \cup A^2$. Tenendo conto del Lemma 3 si vede subito che ${}_{p-1}X$ è un sottoinsieme analitico di X di dimensione al più $p-1$.

Proveremo il Teorema 1 per induzione sulla dimensione p facendo vedere che risulta

$$N(X) = N({}_{p-1}X) \cup A^1 \cup A^2 .$$

Cominciamo con l'osservare che, se $x \in N({}_{p-1}X)$, per la definizione di ${}_{1-p}X$

esiste una componente irriducibile non coerente di X_x di dimensione strettamente inferiore a p e quindi deve essere $x \in N(X)$.

D'altro canto sia $x \notin N(X)$; per il Lemma 1, ogni punto $\hat{x} \in \pi^{-1}(x) \cap \hat{X}_p$ è del tipo $\hat{x} = (\tilde{X}'_x, x)$ ove $\tilde{X}'_x$ è la complessificata di una componente irriducibile X'_x di X_x. Se $\tilde{X}'$ è un sottoinsieme analitico irriducibile che induce il germe $\tilde{X}'_x$, per la coerenza di X_x si può supporre che per ogni $y \in \tilde{X}' \cap X$ ogni componente irriducibile di $\tilde{X}'_y$ sia fissa rispetto alla antiinvoluzione σ e quindi che sia $\check{X} \cap \hat{\tilde{X}}' = \hat{X} \cap \hat{\tilde{X}}'$. Ne segue che $\hat{X}$ ha dimensione p in un intorno di $\hat{x}$, per cui $\hat{x} \notin \bar{C}^1 \cup \bar{C}^2$ e si può concludere che $x \notin A^1 \cup A^2$.

Viceversa sia x un punto di X che non sia in $N({}_{p-1}X) \cup A^1 \cup A^2$: se $x \in T$, allora $x \in {}_{p-1}X$, ed essendo $x \notin N({}_{p-1}X)$, tutte le componenti irriducibili di dimensione strettamente minore di p sono coerenti; d'altro canto, dal Lemma 3 segue che sono coerenti anche le componenti irriducibili di X_x di dimensione p, per cui $x \notin N(X)$.

Bibliografia

[1] S. S. Abhyankar, *Local analytic geometry*, Academic Press, New York and London 1964.

[2] F. Acquistapace, F. Broglia e A. Tognoli, *Sull'insieme di non coerenza di un insieme analitico reale*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **55** (1973), 42-45.

[3] W. Fensch, *Reel-analytische Strukturen*, Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Munster 1966.

[4] M. Galbiati, *Stratifications et ensemble de non-cohérence d'un espace analytique réel*, Inventiones Math. **34** (1976), 113-128.

[5] H. Hironaka, *Introduction to real analytic sets and real analytic maps*, Quaderni dei Gruppi di Ricerca Matematici del C.N.R., Pisa 1973.

[6] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, Lecture note, I.H.E.S. Bures-sur-Yvette 1965.

[7] A. Tognoli, *Proprietà globali degli spazi analitici reali*, Ann. Mat. Pura Appl. **75** (1967), 143-218.

Summary

Let $N(X)$ be the set of non coherent points of a real analytic space X; in this paper we find a decomposition of $N(X)$ into semianalytic subsets.

* * *