N. ROUCHE (*), **Vers où va l'enseignement mathématique?**

Pour savoir comment évoluera ou comment pourrait évoluer l'enseignement des mathématiques dans les années à venir, il importe d'abord de savoir ce qu'est cet enseignement aujourd'hui, c'est-à-dire ce qu'en ont fait les réformateurs des années 60, ceux qui ont introduit les mathématiques dites « modernes ». Or ces réformateurs, en France, aux Etats-Unis, en Belgique, moins en Italie, ont déclaré que l'enseignement des mathématiques emprunterait dorénavant la voie axiomatique. On s'est donc mis à enseigner des mathématiques axiomatiques et structurales, à enseigner des structures.

Or qu'est-ce qu'une structure? C'est en quelque sorte le résultat d'une activité mathématisante unifiante (par abstraction) au départ de problèmes et de théories donnés: on reconnaît et formalise les relations communes à plusieurs domaines. Mais une fois ce travail accompli, il se passe quelque chose de très important du point de vue de l'enseignement qui en rendra compte. Le discours qui expose une structure a perdu la trace de ses origines plus concrètes (problèmes et théories). Il ne s'en encombre pas.

Cependant, le souvenir de ces origines persiste dans la tête *des mathématiciens* professionnels. Je cite Bourbaki de mémoire: « chaque structure apporte avec elle son langage propre, tout chargé de résonances intuitives particulières, issues des théories d'où l'a dégagée l'analyse axiomatique ».

Le malheur veut que si, dans les écoles, on enseigne avant tout les structures, les élèves eux n'ont pas ce souvenir des problèmes et des théories particulières d'où elles sont issues. On enseigne des mathématiques toutes faites, qu'on illustre d'exemples naïfs (pour qu'ils soient simples). On apprend à lire des mathématiques, pas à en faire. Je dirais, en empruntant les termes de Lakatos [**1**], que l'enseignement procède « par la croissance monotone du nombre des théorèmes indubitablement établis » et non par « l'amélioration incessante des conjectures par la spéculation et la critique, par la logique des preuves et réfutations ».

Il résulte de tout cela que les élèves et étudiants d'après la réforme travaillent les mathématiques à on certain niveau d'abstraction. Ils comprennent ce qu'ils font, ils sont à l'aise à ce niveau, mais ils n'en sortent pas. Ils n'ont pas l'idée d'en sortir parce qu'ils n'y sont pas venus en partant d'ailleurs. Ils croient que les maths c'est crela. Ils *acquièrent des concepts*, mais ces concepts ne sont pas pour eux *disponibles*, exploitables sur toutes sortes de plans. Le phénomène s'observe très nettement chez les étudiants universitaires de mathématiques.

Essayons de retracer brièvement l'évolution historique qui a amené à l'enseignement des mathématiques de la réforme. Cette évolution est une évolution des mathématiques elles-mêmes. Historiquement, les mathématiques sont nées de la vie, du quotidien, du concret, du familier. Pour la

---

(*) Indirizzo: Institut de Mathématique Pure et Appliquée. Chemin du Cyclotron 2, B-1348 Louvain La Neuve, Belgique.

géométrie, c'est évident. Le calcul intégral est né des évaluations d'aires, le calcul différentiel de l'étude des vitesses, les nombres irrationnels de problèmes très précis de géométrie, les équations différentielles de problèmes mécaniques, etc.

Mais les mathématiques procèdent, en se structurant, et sous l'impulsion d'exigences logiques, à des refontes qui bouleversent *l'ordre d'apparition et de construction* des concepts. C'est ainsi que l'on voit des concepts familiers rejetés très loin dans la version structuralisée des mathématiques : il y a un ordre d'engendrement des structures les unes par les autres, et cet ordre n'a rien à voir avec celui dans lequel un homme rencontre dans le quotidien les faits et les phénomènes que ces structures modélisent.

Voici trois exemples élémentaires de ce rejet vers les lointains de la science axiomatisée de notions pourtant familières : (1) la mesure des longueurs; (2) les angles et surtout la mesure des angles; (3) la mesure des aires et volumes. Notons en passant que la mesure des longueurs a même été rejetée par l'intelligentsia athénienne, et dans ce cas pas rejetée plus loin dans la construction mathématique, mais rejetée tout court. Et on sait les efforts qu'il a fallu pour tirer les mathématiques de là !

Comme il en va dans les mathématiques, ainsi en va-t-il aussi dans leur enseignement. Beaucoup d'objets familiers y sont rejetés vers les lointains mathématiques. Et alors les mathématiques structurales élémentaires, s'étant coupées d'un certain concret, en découvrent un nouveau, qui est un *faux concret*. Faux parce que sa seule raison d'être est d'illustrer les structures. On ne mathématise pas le concret, on concrétise les maths. Et les illustrations n'n'ont plus de pertinence *pour personne*. Elles ne retrouvent parfois une certaine pertinence qu'au niveau ludique. Il est vrai qu'on arrive à amuser des enfants avec des ensembles et des relations « naïves ».

La réforme a quinze ans maintenant. Un peu partout s'amorce un retour vers un enseignement mathématique davantage enraciné, à son départ, dans le quotidien, davantage soucieux de partir de l'élève. Mais il faut souhaiter que ce retour se fasse en connaissance de cause, et qu'il n'apparaisse pas seulement comme une *concession* des mathématiciens à la personne des enfants, ou comme un *compromis* entre l'abstrait et le concret. On aboutirait à une éducation mathématique qui ne sait pas ce qu'elle veut. Et les enfants ne sentent que trop bien (obscurément, sans l'analyser) et ne subissent que trop les hésitations des éducateurs. Que faut-il donc faire? Des structures ou du concret (du vrai concret)? Mais le vrai concret n'est pas structurable sur place, il ne l'est qu'à terme, au bout d'un long travail. Alors quoi? Du vrai concret mal mathématise? du faux concret? ou bien laisser coexister des structures impeccables et du vrai concret qui n'y rentre pas?...

Il est probable qu'on trouvera une solution et que celle-ci sera fondée sur la substitution d'un point de vue génétique au point de vue purement structural. On va prendre conscience de la *genèse des concepts* dans l'esprit des élèves et du fait que cette genèse se fait par étapes beaucoup plus nombreuses qu'on ne le pense d'habitude. Le travail à faire dans les classes sera celui de la mathématisation *motivée* et *sérieuse* des vrais concepts quotidiens.

Etre attentif à la genèse d'un concept implique un regard sur tout ce qui préfigure ce concept dans la pratique et l'imagination de tous les jours. Certaines plongées dans l'histoire seront bien utiles aussi.

Pour réussir à enseigner dans cette optique, il faut que les mathématiciens arrivent à se dépouiller de leurs évidences acquises, de toutes ces choses qui sont devenues si simples pour eux qu'il n'ont plus conscience des difficultés qu'elles peuvent présenter à quiconque.

Je voudrais illustrer mon propos sur un exemple précis: celui de la vitesse. Le mathématicien croit avoir touché le fond du problème quand il a dit: la vitesse est une dérivée. Cette phrase dicte tous les modes d'enseignement de la vitesse dans le secondaire et ailleurs. Les mathématiciens n'acceptent pas de parler de vitesse tant qu'ils n'ont pas défini les limites, la continuité, les dérivées, en fondant tout cela sur les propriétés les plus profondes des nombres réels. Les physiciens s'embourbent dans de curieux quotients d'infiniment petits. La phrase « la vitesse est une dérivée » est le témoin, assez ancien pour une fois, du rejet d'une notion *plus loin dans les mathématiques*. C'est une phrase péremptoire, et qui occulte la notion quotidienne de vitesse, en empêchant qu'on s'en occupe.

Or ce concept quotidien de vitesse existe bel et bien, il est clair, il fonctionne, et *ce n'est pas une dérivée*! Des phrases telles que

(a) ce mobile va plus vite que cet autre (surtout quand l'un est en train de dépasser l'autre, la perception de l'ordre des vitesses est très fine, même si les vitesses ne sont pas mesurées);

(b) deux mobiles vont en sens contraire;

(c) mon auto fait 80 km/h;

ces phrases ont un sens très précis et déterminent des comportements adaptés.

Voici un autre argument qui va dans le même sens et que j'emprunte, cette fois, à l'histoire. Galilée ne connaissait pas la dérivée. Comment a-t-il fait pour établir des résultats aussi importants sur le mouvement uniforme et surtout sur le mouvement uniformément accéléré? Il faut se souvenir en outre que, sur le plan expérimental, Galilée ne savait pas mesurer les vitesses, il n'avait même pas l'idée de les mesurer, de leur associer un nombre.

Alors qu'a-t-il fait? Il a conçu les vitesses comme des grandeurs au sens du 5e Livre d'Euclide et les a représentées par des segments. Il en a exprimé certaines propriétés par des axiomes. Par exemple pour le mouvement uniforme:

*Axiome III.* Dans un seul et même intervalle de temps, la distance parcourue à une vitesse plus grande est plus grande que la distance parcourue à une vitesse moindre.

*Axiome IV.* La vitesse requise pour parcourir une distance plus grande est plus grande que celle requise pour parcourir une distance plus petite durant le même intervalle de temps.

Ces axiomes se déduisent immédiatement du concept de vitesse comme dérivée. Mais ils sont parfaitement concevables sous forme indépendante. La preuve d'ailleurs c'est que Galilée les a énoncés et judicieusement utilisés.

Bien entendu, la vitesse pour un enfant ou un homme de la rue d'aujourd'hui n'est plus ce qu'elle était pour Galilée. La différence, c'est qu'aujourd'hui on mesure tout le temps des vitesses, les gens sont familiers avec les principales unités de vitesse, les vitesses s'expriment par des nombres et peuvent aussi se noter sur des axes gradués. Nous vivons dans une civilisation du nombre et avons perdu l'habitude, qui remontait aux Grecs, de ramener toutes les grandeurs à la géométrie. Donc la conception spontanée de la vitesse a évolué au cours des siècles, mais pas plus aujourd'hui qu'au XVIIe siècle, elle n'est la limite d'un certain quotient différentiel appelé dérivée. Il faut donc entreprendre de cheminer avec les élèves depuis cette conception spontanée jusq'à la dérivée. Celui qui a la patience de provoquer puis d'observer ce cheminement sera étonné de le voir marqué par tant de péripéties. Mais au bout du compte, et comme conséquence même de ces péripéties, et si tout progrès est motivé, et si on n'a introduit la dérivée que quand on a *vraiment* besoin d'elle (c'est-à-dire pour les mouvements accélérés non uniformément), on trouvera dans la tête d'une majorité d'élèves un concept de vitesse, et de dérivée, non seulement compris mais disponible.

Disponible, cela veut dire enraciné dans des représentations de toutes sortes, évoqué, lorsqu'il peut servir, par le jeu des associations d'idées naissant d'elles-mêmes dans un contexte riche. Les concepts bien acquis sont ceux à qui on a laissé le temps de naître et de se former, *de problème en problème*. L'enseignement des mathématiques de demain pourrait être, devrait être très attentif aux lentes et riches périodes de maturation conceptuelle.

## References

[1] Imre Lakatos, *Proofs and refutations*, Cambridge University Press 1979.

* * *