Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 23-33

C. FERRERO COTTI e M. G. RINALDI (*)

Sugli stems i cui ideali sinistri (destri) propri sono massimali (**)

Introduzione

In questo lavoro si generalizzano agli stems destri le considerazioni di [4] relative agli anelli nello spirito di [2].

Osservato che se uno stem destro N i cui ideali sinistri (destri) propri sono massimali possiede ideali bilateri propri, questi pure sono massimali (anche come ideali bilateri), valgono per N i risultati di [2]. In particolare lo stem N ha più di due ideali bilateri propri se e solo se è uno zero-anello oppure uno stem costante il cui gruppo additivo è abeliano elementare di rango 2.

Nel caso che N abbia esattamente due ideali bilateri ed abbia tutti gli ideali sinistri (destri) massimali si prova che N non ha ideali sinistri (destri) che non siano bilateri (Teorema 1). Questi stems vengono completamente classificati nel Teorema 3.

Nel caso che N possieda esattamente un ideale bilatero si trovano condizioni affinchè N abbia più di due ideali sinistri (destri) e si vede che non si hanno risultati sostanzialmente diversi fra la ipotesi di massimalità relativa agli ideali sinistri oppure destri.

A differenza di [4] si affronta anche il caso degli stems semplici e qui si nota una effettiva differenza fra le ipotesi di massimalità per ideali sinistri oppure

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 8-III-1979.

destri. Si prova infatti (Teorema 4) che uno stem destro semplice in cui sono massimali tutti gli ideali sinistri ha al più due ideali sinistri, mentre si danno esempi di stems destri semplici tutti i cui ideali destri sono massimali, ma con più di due ideali destri; per questi ultimi stems si trovano solo alcune proprietà.

In tutto il lavoro utilizziamo risultati e notazioni di [**6**], a volte senza esplicito richiamo, mentre, per $S \subseteq N$, indichiamo con S^n il sottostem generato dall'insieme $S^{(n)} = \{x_1 x_2 \dots x_n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in S\}$; poniamo inoltre $A_d(S) = \{x \in N \mid Sx = 0\}$, $A_s(S) = \{x \in N \mid xS = 0\}$ ed $A(S) = A_d(S) \cap A_s(S)$.

1 - Caso non semplice

Iniziamo la ricerca con un enunciato che, per il fatto che negli stems ideali destri ed ideali sinistri giocano ruoli diversi, solo apparentemente indica due versioni dello stesso fatto.

Teorema 1. *Uno stem N ha tutti gli ideali propri sinistri (destri) massimali e possiede esattamente due ideali bilateri se e solo se è somma diretta di due stems privi di ideali sinistri (destri) propri e non possiede ideali sinistri (destri) che non sono bilateri.*

Siano I, J i due ideali bilateri propri e distinti di N. Per il teorema 2 di [**2**], N risulta somma diretta di I, J.

Siano *massimali gli ideali sinistri propri di* N: I, J risultano pertanto stems privi di ideali sinistri.

Mostriamo che *N non possiede ideali sinistri diversi da I, J*. Sia K un ideale sinistro proprio di N distinto da I, J: risulta $N = I \dotplus J = I + K = J + K$, ove « $\dotplus$ » indica la somma diretta (interna) (cfr. [**6**], def. 2.4) mentre « $+$ » indica la somma di ideali sinistri (cfr. [**6**], def. 2.2), inoltre $I \cap J = I \cap K = J \cap K = 0$. Procediamo per casi e cominciamo col supporre inoltre che *N sia zero-simmetrico*; allora $IJ = JI = IK = 0$; ricordato ([**6**], prop. 2.22) che $n(a+b) = na + nb$ se $a \in A$, $b \in B$ ed A, B sono ideali sinistri a intersezione nulla, si ha subito $NK = 0$ ed $IN = 0$ e dunque $K^2 = I^2 = J^2 = 0$. Pertanto N è uno zero-stem e K è un ideale bilatero, contro l'ipotesi. Ne segue che gli unici ideali sinistri di N sono I, J.

Sia N costante, allora tutti i sottogruppi normali di N^+ sono ideali bilateri di N e dunque N non ha ideali sinistri che non sono bilateri.

Sia infine $N = N_0 + N_c$, ove $N_0 \neq 0$ ed $N_c \neq 0$ ([**6**], prop. 1.13) (1); dimostriamo che N_0, N_c coincidono con i precedenti ideali I, J. Cominciamo col dimostrare che N_0 è uno dei precedenti ideali I, J, altrimenti si avrebbe

(1) Ove con [**6**] abbiamo posto $N_0 = \{x \in N \mid x0 = 0\}$ ed $N_c = \{x \in N \mid x0 = x\}$.

$N_0 \cap I = N_0 \cap J = 0$, perchè N_0 è un ideale sinistro ed I, J non hanno ideali sinistri propri; dunque $I, J \subset N_c$ (perchè I, J sono ideali destri; cfr. [**6**], prop. 2.18). Ne segue che $N = I \dotplus J$ sarebbe costante, contro il supposto.

Non è restrittivo supporre $N_0 = I$ e dunque $J \subseteq N_c$ ([**6**], prop. 2.18). Risulta $N = N_0 + J$ ed ogni $x \in N_c$ può essere scritto come $x = n_0 + j$ (per $n_0 \in N_0$, $j \in J$ opportuni); pertanto è $-j + x = n_0 \in N_0 \cap N_c = 0$. Di qui $N_c \subseteq J$ ed anzi, per quanto sopra, $J = N_c$.

Possiamo ora concludere la prima parte della dimostrazione.

Sia K un ideale sinistro di N distinto da N_0 e da N_c; ovviamente $N = N_0 \dotplus N_c = N_0 \dotplus K = N_c + K$. Perchè K è un ideale sinistro si ha che $N_0 K \subseteq K$ ([**6**], prop. 1.34); d'altronde $N_0 K \subseteq N_0$, perchè $N_0 = I$, allora $N_0 K \subseteq N_0 \cap K = 0$. Per $n_0 \in N_0$, possiamo scrivere $n_0 = n_c + k$ ($n_c \in N_c$, $k \in K$ opportuni) e risulta, $\forall k' \in K$, $n_0 k' = n_c k' + kk'$ e, per quanto sopra, di qui si ha $kk' = -n_c$. Visto che $N_c \cap K = 0$, risulta $n_c = 0$ e dunque $n_0 = k$ e pertanto $N_0 \subseteq K$ e cioè $N_0 = K$. Si conclude che N non ha altri ideali sinistri oltre N_0 ed N_c.

Siano *massimali gli ideali destri propri di* N.

Ora I, J sono privi di ideali destri: mostriamo che N *non possiede altri ideali destri.*

Sia K un ideale destro di N proprio e distinto da I, J; al solito $N = I \dotplus J = I + K = J + K$.

Sia N *zero-simmetrico*; allora $IJ = JI = KI = KJ = 0$ ed inoltre ([**6**], prop. 2.22) risulta $n(i + j) = ni + nj$; ne segue, posto $n = i' + j'$, che $kn = k(i' + j') = ki' + kj' = 0$ onde $KN = 0$ e perciò $K^2 = 0$. Inoltre posto $n = j + k$ si ha $ni = (j + k)i = ji + ki = 0$ onde $NI = 0$ e $I^2 = 0$; infine si mostra che anche $J^2 = 0$ ed N riesce uno zero-stem perchè $N^2 \subseteq I \cap J = 0$ e K risulta un ideale bilatero, il che contrasta con l'ipotesi.

Se N *è costante* la cosa è ovvia; *sia infine* $N = N_0 + N_c$ *con* $N_0 \neq 0$ *ed* $N_c \neq 0$. Mostriamo che N_0, N_c coincidono con i precedenti ideali I, J. Visto che (lemma 3 di [**2**]) N^+ è abeliano, allora N_c è un ideale destro di N e pertanto se fosse $I \cap N_c = 0$ e $J \cap N_c = 0$ allora $N = I \dotplus J$ sarebbe zero-simmetrico e questo non è il nostro caso. Dovrà essere pertanto $N_c = I$ ovvero $N_c = J$. Non è restrittivo supporre $N_c = I$, allora $N = J \dotplus N_c$ con $J \subseteq N_0$: ne segue $J = N_0$. Sia K un ideale destro di N distinto da N_0 ed N_c; allora $N_c \cap K = 0$ onde $K \subseteq N_0$ e dunque $K = N_0$ e questo basta per completare la dimostrazione della prima parte dell'enunciato.

L'inverso è ovvio.

Heatherly in [3] chiama $C-Z$ decomponibili gli stems destri N in cui N_c è un ideale ed $N_0 \neq 0$.

Tenendo presente il Teorema 1 si ha subito il

Corollario 1. *Gli stems destri N i cui ideali sinistri (destri) sono massimali con $N_0 \neq 0$, $N_c \neq 0$ e con esattamente due ideali bilateri, sono particolari stems $C - Z$ decomponibili.*

Passiamo ora al caso degli stems destri che possiedono esattamente un ideale bilatero. Il risultato più importante a questo proposito è fornito dal

Teorema 2. *Sia N uno stem destro i cui ideali sinistri (destri) sono massimali e che possieda esattamente un ideale bilatero proprio I. Se N possiede almeno due ideali sinistri (destri) distinti da I, allora N risulta zero-simmetrico, coincide con tutte le proprie potenze ed è $IN = NI = 0$.*

Cominciamo col verificare che se N *non è zero-simmetrico* e possiede esattamente un ideale bilatero I, *allora N possiede al più due ideali.* Se N è costante la cosa è ovvia.

Sia $N = N_0 + N_c (N_0 \neq 0, N_c \neq 0)$ e *siano massimali gli ideali sinistri di N.* Visto che N_0 è un ideale sinistro di N risulterà $I \cap N_0 = 0$ ovvero $I = N_0$. Nel primo caso $I \subseteq N_c$ e dunque $I = N_c$ e perciò $N = N_0 + I$.

Sia K un ideale sinistro di N distinto da N_0: risulta $N = N_0 + I = N_0 + K = I + K$. Visto che $N_0 K \subseteq K$ ([6], prop. 1.34) e che, per $k \in K$, possiamo scrivere $k = n_0 + n_c$ (con $n_0 \in N_0$, $n_c \in N_c$ opportuni), allora per $\bar{k} \in K$ risulta $k\bar{k} = n_0 \bar{k} + n_c \bar{k}$ ovvero $-n_0 \bar{k} + k\bar{k} = n_c \in K \cap N_c = 0$: ne segue $K \subseteq N_0$ e dunque ancora $K = N_0$. Se invece $I = N_0$, riesce $N = N_0 + K$. In tale caso però, visto che N_0 è un ideale bilatero, risulta $N_0 K \subseteq K$ ed inoltre $N_0 K \subseteq N_0$ e dunque $N_0 K = 0$. Del resto, $\forall k \in K$, possiamo scrivere $k = n_0 + n_c$ (con $n_0 \in N_0$, $n_c \in N_c$ opportuni) onde $kk' = n_c, \forall k' \in K$; dunque $n_c \in K$ e pertanto $n_c \in N_c \cap K$; ne segue $n_0 = -n_c + k \in K \cap N_0 = 0$ ed $n_0 = 0$. Dunque $K \subseteq N_c$ e risulta un ideale bilatero di N distinto da I, il che è assurdo.

Passiamo ora al caso in cui tutti *gli ideali destri di N siano massimali* e ricordiamo che ora N^+ è abeliano (lemma 3 di [2]). Visto che N_c è un ideale destro di N, risulta $I \cap N_c = 0$, ovvero $I = N_c$. Sia $I \cap N_c = 0$, allora $I \subseteq N_0$; visto che si ha $N = I + N_c$ possiamo scrivere, per $n_0 \in N_0$, $n_0 = i + n_c$ (per opportuni $i \in I$, $n_c \in N_c$) e dunque $n_0 - i = n_c$ ed $n_0 = i$: si conclude che $I = N_0$.

Sia K un ideale destro proprio di N: risulta ([6], prop. 2.18) $K = K \cap N_0 + K \cap N_c$ con $K \cap N_c = 0$, ovvero $K = N_c$. Se $K = N_c$ l'affermazione è dimostrata; se $K \cap N_c = 0$, risulta $K \cap N_0 = I$ e dunque $K = I$ e l'affermazione è dimostrata nel caso $I \cap N_c = 0$.

Sia $I = N_c$ e sia K un ideale destro proprio di N; risulta $K \cap N_c = 0$ ovvero

$K = N_c$; nel secondo caso N possiede un solo ideale destro che risulta bilatero. Nel primo caso $K \subseteq N_0$ e pertanto risulta $N = N_0 + I = K + I$ con $I = N_c$: per $n_0 \in N_0$ possiamo scrivere $n_0 = k + i$ (per opportuni $k \in K$, $i \in I$) e dunque $n_0 - k = i$ ed $n_0 = k$. Ne segue $N_0 = K$ e questo caso non sussiste perchè K risulterebbe essere un ideale bilatero di N distinto da I contro il supposto.

Sia infine N *zero-simmetrico con* $N^2 \neq N$; allora, poichè N^+ è abeliano, N^2 è un ideale bilatero di N.

Siano *massimali tutti gli ideali sinistri di* N e siano K, K' due ideali sinistri propri di N. Risulta $N = N^2 + K = K + K' = N^2 + K'$ ed inoltre $NK \subseteq N^2 \cap K$ (perchè $NK \subseteq K$); dunque $NK = 0$ ed analogamente $NK' = 0$. Per $n' \in N$ possiamo scrivere $n' = k + k'$ (per opportuni $k \in K$, $k' \in K'$); di qui e dalla prop. 2.22 di [**6**] segue $nn' = n(k + k') = 0$ e dunque $N^2 = 0$ e questo contrasta l'ipotesi che esistano ideali sinistri non bilateri propri.

Siano invece *massimali tutti gli ideali destri di* N e siano K, K' due ideali destri di N. Risulta $N = N^2 + K = N^2 + K' = K + K'$. Visto che $KN \subseteq K$, riesce $KN \subseteq N^2 \cap K = 0$ e dunque $KN = K'N = 0$. Ragionando come poco sopra si prova che $N^2 = 0$ il che è ancora assurdo. Dunque N riesce zero-simmetrico e coincide con tutte le sue potenze. Il resto si dimostra con la solita tecnica.

Dal Teorema 2 e da [**3**] segue subito il

Corollario 2. *Sia* N *uno stem destro con* $N_0 \neq 0$ *ed* $N_c \neq 0$, *i cui ideali sinistri sono massimali e con un solo ideale bilatero. Lo stem* N *ha un solo ideale sinistro (e dunque bilatero) se e solo se non è* $C - Z$ *decomponibile.*

Sia N *uno stem destro con* $N_0 \neq 0$ *ed* $N_c \neq 0$, *i cui ideali destri sono massimali e con un solo ideale bilatero. Lo stem* N *ha un solo ideale destro (e dunque bilatero) se e solo se è* $C - Z$ *decomponibile.*

Infine si ha la

Osservazione 2. *Il gruppo additivo di uno stem destro i cui ideali sinistri sono massimali, avente esattamente un ideale bilatero* I *e con almeno due ideali sinistri distinti da* I, *è abeliano elementare di rango due.*

Poichè ora (Teorema 2) $I^2 = 0$, gli ideali sinistri I, K, K' risultano N-gruppi semplici ed N^+ è abeliano (lemma 3 di [**2**]), si ha che I è uno zero-anello semplice: dunque I^+ è isomorfo ad un gruppo di ordine primo. Anche K^+, K'^+ soddisfano alla stessa proprietà, perchè isomorfi ad I^+, il che dimostra l'enunciato.

È ovvio che se N è un anello con tutti gli ideali destri massimali, con un solo ideale bilatero I e almeno due ideali destri distinti da I, allora N^+ è abeliano elementare di rango due.

Mostriamo che esistono stems (addirittura anelli) tutti i cui ideali sinistri (destri) sono massimali, con un solo ideale bilatero ed aventi più di due ideali sinistri (destri). Sia $N^+ = C_2 \oplus C_2'$ (ove C_2, C_2' sono due gruppi di ordine 2 generati da 1 ed a rispettivamente). Definiamo un prodotto in N^+ nel seguente modo

$$\langle x, y\rangle \cdot \langle z, t\rangle = \begin{cases} \langle 0, 0\rangle & \text{se } y = 0 \\ \langle z, t\rangle & \text{se } y = a\,. \end{cases} \tag{1}$$

La struttura $[N; +, \cdot]$ è un anello: infatti N^+ è un gruppo abeliano; il prodotto è ovviamente associativo e distributivo a sinistra. Inoltre risulta ora

$$(\langle x, y\rangle + \langle z, t\rangle)\langle u, v\rangle = \tag{2}$$

$$= \langle x + z, y + t\rangle \langle u, v\rangle = \begin{cases} \langle 0, 0\rangle & \text{se } y + t = 0 \\ \langle u, v\rangle & \text{se } y + t = a \end{cases}$$

ed anche

$$\langle x, y\rangle\langle u, v\rangle + \langle z, t\rangle\langle u, v\rangle = \begin{cases} \langle u, v\rangle + \langle 0, 0\rangle = \langle u, v\rangle & \text{se } y = a\,, \quad t = 0 \\ \langle 0, 0\rangle + \langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle & \text{se } y = 0\,, \quad t = a \\ \langle 0, 0\rangle & \text{se } y = t = 0 \\ \langle u, v\rangle + \langle u, v\rangle = \langle 0, 0\rangle & \text{se } y = t = a; \end{cases}$$

donde si ricava la

$$\langle x, y\rangle\langle u, v\rangle + \langle z, t\rangle\langle u, v\rangle = \begin{cases} \langle 0, 0\rangle & \text{se } y + t = 0 \\ \langle u, v\rangle & \text{se } y + t = a\,. \end{cases} \tag{3}$$

Dal confronto di (2) con (3) segue che il prodotto considerato è distributivo rispetto alla somma anche a destra.

Consideriamo i sottogruppi $I = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$, $K = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, a\rangle\}$, $K' = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, a\rangle\}$ di N^+; osserviamo che I è un ideale bilatero di N: infatti $IN = 0 \subseteq I$ ed $NI \subseteq I$; mentre K, K' risultano ideali sinistri di N, perchè risulta $NK \subseteq K$ ed $NK' \subseteq K'$ come subito si verifica, ma non sono ideali di N, perchè è $KN \not\subseteq K$: infatti $\langle 0, a\rangle\langle 1, a\rangle = \langle 1, a\rangle \notin K$. Si vede subito infine che tutti gli ideali sinistri di N sono massimali.

Per avere l'esempio relativo agli ideali destri, basta scambiare il prodotto (1).

2 - Due ideali bilateri

Riportiamo, per comodità del lettore, definizione classiche ([**6**], [**1**]).

Uno stem destro N si dice semplice se è privo di ideali bilateri; diciamo Blackett-semplice uno stem zero-simmetrico, i cui ideali sinistri soddisfano la condizione catenaria discendente per ideali sinistri (D.C.C.L.) e che non possiede ideali sinistri annullati a sinistra da tutti gli elementi di N.

Uno stem Blackett-semplice si dice irriducibile se non possiede ideali sinistri minimali non nulli.

Gli stems Blackett-semplici ed irriducibili sono stati studiati in modo completo (2).

T e o r e m a 3. *Uno stem destro N ha tutti gli ideali sinistri propri massimali e possiede esattamente due ideali bilateri se e solo se vale almeno una delle seguenti condizioni:*

$(1)_a$ *N è prodotto diretto di due stems Blackett-semplici e irriducibili;*

$(1)_b$ *N è prodotto diretto di uno zero-stem semplice e di uno stem Blackett-semplice e irriducibile;*

$(1)_c$ *N è prodotto diretto di due zero-stems i cui gruppi additivi hanno ordini primi distinti;*

(2) *N è prodotto diretto di due stems costanti i cui gruppi additivi hanno ordini primi distinti;*

$(3)_a$ *N è prodotto diretto di uno stem Blackett-semplice irriducibile e di uno stem costante semplice;*

$(3)_b$ *N è prodotto diretto di uno zero-stem semplice e di uno stem costante semplice.*

Siano I, J i due unici ideali bilateri propri e distinti di N. Per il teorema 2 di [**2**] si ha che $N = I + J$ e I, J sono stems semplici privi di ideali sinistri

---

(2) Comunicazione privata di Blackett: gli stems Blackett-semplici e irriducibili sono tutti e soli quelli che si ottengono nel seguente modo.

Sia N un gruppo qualunque di elemento neutro 0; sia $G^* = G \cup \{\underline{0}\}$ l'unione di un gruppo di automorfismi di N con l'endomorfismo nullo $\underline{0}$ di N e sia $f: N \to G^*$ una funzione di N in G^*. Posto $\varphi_n = f(n)$, se (1) $\varphi_{\varphi_{n_1}(n_2)} = \varphi_{n_2} \circ \varphi_{n_1}$, e se (2) $f^{-1}(\underline{0})$ contiene lo zero di N ma non è un sottogruppo di N, allora N, rispetto al prodotto definito da $nn' = \varphi_n(n')$, risulta uno stem Blackett-semplice ed irriducibile.

(Teorema 1); se sono zero-simmetrici e non zero-stems risultano Blackett-semplici e irriducibili; questo fatto verrà sempre utilizzato senza esplicito richiamo. Procediamo per casi

Sia N zero simmetrico.

Poichè $A_s(N)$ risulta un ideale di N, abbiamo tre casi.

$(1)_a$ $A_s(N)=0$: visto che, essendo N zero-simmetrico, risulta $IJ=JI=0$ e anche ([**6**], prop. 2.22) $n(i+j)=ni+nj$ si ha che per n, $n'\in N$ esistono $i, i'\in I$ e $j, j'\in J$ tali che $nn'=ii'+jj'$. Ne segue che N è prodotto diretto (somma diretta distributiva) di I e J. Inoltre I, J non sono zero-stems: infatti se fosse $I^2=0$, allora sarebbe anche $NI=0=IN$ e dunque $I\subseteq A_s(N)=0$ il che è assurdo. Siamo nel caso $(1)_a$.

$(1)_b$ *$A_s(N)$ sia un ideale proprio di N: non è restrittivo porre $A_s(N)=I$;* allora $N=A_s(N)+J$ e $JA_s(N)=0$. Dunque $A_s(N)=A(N)$ ed inoltre J è privo di ideali sinistri e non è uno zero-anello, perchè $N^2=J^2$ ed $N^2\neq 0$ visto che $A_s(N)\neq N$. Siamo nel caso $(1)_b$.

Sia N uno zero-stem o uno stem costante: il teorema 2 di [**2**] fornisce il caso $(1)_c$ e il caso (2).

Sia $N=N_0+N_c$, $N_0\neq 0$ ed $N_c\neq 0$. Allora $I=N_0$, $J=N_c$ (Teorema 1). Dalla $N_0N\subseteq N_0$ segue $N_0N_c\subseteq N_0$; inoltre $N_0N_c\subseteq N_c$ e dunque $N_0N_c=0$. Inoltre posto $n=n_0+n_c$ ed $n'=n_0'+n_c'$ $(n_0, n_0'\in N_0, n_c, n_c'\in N_c)$ risulta $nn'=(n_0+n_c)(n_0'+n_c')=n_0(n_0'+n_c')+n_c$, ma $n_0(n_0'+n_c')=n_0n_0'+n_0n_c'=n_0n_0'$ (perchè N_0, N_c sono ideali e per la prop. 2.22 di [**6**]) e dunque N risulta prodotto diretto di uno stem Blackett-semplice e irriducibile e di uno stem costante semplice, ovvero di uno zero-stem semplice e di uno stem costante semplice. Siamo nei casi $(3)_a$, $(3)_b$. L'inverso è ovvio.

Per il caso che N sia uno *stem destro i cui ideali destri propri sono massimali e con esattamente due ideali bilateri*, si ha un risultato analogo a quello del Teorema 3 solo che gli stems che vi compaiono sono stems semplici privi di ideali destri ma non necessariamente Blackett-semplici nè irriducibili.

3 - Caso semplice

Passiamo ora al caso degli stems destri semplici i cui ideali sinistri sono massimali.

Lemma 1. *Uno stem destro semplice N i cui ideali sinistri propri sono* *massimali e con più di un ideale sinistro proprio è zero-simmetrico; i suoi ideali sinistri sono N-gruppi semplici isomorfi fra loro. Se inoltre N ha più di due ideali sinistri, allora N coincide con tutte le proprie potenze.*

Sia $N = N_0 + N_c$, con $N_0 \neq 0$, $N_c \neq 0$. Sia K un ideale sinistro di N distinto da N_0; risulta $N = N_0 + K$.

Ora $N_0 K \subseteq K$ e $K \cap N_0 = 0$; per $k \in K$ possiamo scrivere $k = n_0 + n_c$ ($n_0 \in N_0$, $n_c \in N_c$ opportuni) e pertanto, per $\bar{k} \in K$, $k\bar{k} = n_0\bar{k} + n_c$ onde $n_c \in K \cap N_c$ ed essendo, per quanto precede $n_0 = k - n_c$, risulta $n_0 \in K \cap N_0 = 0$ onde $K \subseteq N_c$. Ne segue $K = N_c$ ed allora N_c risulta un ideale sinistro di N e dunque bilatero, il che è escluso perchè N è semplice. In tale caso N_0 risulta l'unico ideale sinistro di N e questo contraddice l'ipotesi.

Non potendo ovviamente essere $N_0 = 0$ (gli stems costanti, se semplici, non hanno alcun ideale nè destro nè sinistro) si ha $N_0 = N$.

Abbia N più di due ideali sinistri, allora N^+ è abeliano ed N^2 risulta un ideale di N: risulta $N^2 = N$ perchè N non può essere uno zero-anello semplice e possedere ideali sinistri. Il resto è ovvio.

Siamo infine in grado di dimostrare il seguente

Teorema 4. *Uno stem destro semplice i cui ideali sinistri propri sono massimali possiede al più due ideali sinistri propri.*

Supponiamo che lo stem N abbia tre ideali sinistri propri e distinti I, J, K.

Proviamo dapprima che ogni ideale sinistro di N ha quadrato non nullo. Dal momento che ogni somma finita di stems nilpotenti è nilpotente (teorema 2.101 di [**6**]), non può esistere più di un ideale sinistro proprio di N a quadrato nullo (Lemma 1). Sia K un ideale sinistro con $K^2 = 0$ di N; risulta $N = I + J = I + K = J + K$; per $j \in J$ possiamo scrivere $j = i + k$ ($i \in I$, $k \in K$ opportuni) e per $\bar{i} \in I$ possiamo scrivere $\bar{i} = \bar{j} + \bar{k}$ ($\bar{j} \in J$, $\bar{k} \in K$ opportuni). Applicando due volte la prop. 2.22 di [**6**], si ha che per $k' \in K$ risulta $k'j = k'(i + k) = k'i$ e analogamente $k'\bar{i} = k'(\bar{j} + \bar{k}) = k'\bar{j}$. Poichè $I \cap J = 0$ ed inoltre, essendo N zero-simmetrico, risulta $NI \subseteq I$ e $NJ \subseteq J$, allora risulta $k'j = k'i \in I \cap J = 0$ e analogamente $k'i = k'j \in I \cap J = 0$. Ne segue $KI = 0$ e $KJ = 0$, da cui, essendo $N = I + J$, si trae che K è contenuto nell'annullatore sinistro di N, che ora è nullo, perchè è un ideale bilatero di N ed N è semplice. Si conclude quindi che gli ideali sinistri propri di N sono non nilpotenti: in virtù del teorema 3.51 di [**6**] e per il Lemma 1, ognuno di essi ammette almeno una unità destra.

Siano e_1, e_2 unità destre rispettivamente di I e J.

Osserviamo intanto che $Ie_1 \subseteq Ne_1 \subseteq I$ e poichè, ovviamente $I \subseteq Ie_1$, si ha che $I = Ne_1 = Ie_1$: quindi $N = I + J = Ne_1 + Ne_2$.

L'annullatore sinistro di e_1, $A_s(e_1)$, è un ideale sinistro di N che, non potendo coincidere con N (perchè $Ne_1 = I \neq 0$), sarà nullo oppure proprio. In quest'ultimo caso chiamiamo $\bar{e}$ la sua unità destra e prendiamo in considerazione l'annullatore sinistro di $\bar{e}$ che, al solito sarà nullo oppure proprio: in ogni caso però la sua intersezione con $A_s(e_1)$ si ridurrà al solo zero, essendo $\bar{e}$ l'unità destra di $A_s(e_1)$.

Se ne trae che l'omomorfismo $\varphi: N \to N$ definito ponendo $\varphi(n) = n(e_1 + \bar{e})$ risulta essere un isomorfismo, visto che il suo nucleo risulta $A_s(e_1) \cap A_s(\bar{e})$.

Esiste quindi un elemento e di N tale che $\varphi(e) = e(e_1 + \bar{e}) = e_1 + \bar{e}$ da cui $\varphi(e^2) = \varphi(e)$ ossia $e^2 = e$ ed inoltre, per ogni n in N, $\varphi(n) = n(e_1 + \bar{e}) = ne(e_1 + \bar{e}) = \varphi(ne)$ ossia $n = ne$: dunque N *è* dotato di unità destra.

Essendo $N = I + J = I + K$, risulterà

$$e = e_1' + e_2' = e_1'' + e_3 \tag{4}$$

dove e_1', e_1'' sono unità destre in I mentre e_2' ed e_3 lo sono di J e di K rispettivamente; tali elementi risultano inoltre idempotenti e ortogonali (teorema 3.43 di [**6**]).

Inoltre $e_1''e_2 = e_2e_1'' = 0$ [3] e quindi dalla (4), moltiplicando a destra per e_1'', si ha subito $e_1' = e_1''$. Ma allora riesce anche $e_2' = e_3$ e quindi tale elemento risulta necessariamente nullo, appartenendo contemporaneamente a J ed a K: questo è assurdo.

Si conclude che N ha al più due ideali sinistri massimali.

Un discorso un po' diverso va fatto per gli stems destri N *semplici i cui ideali destri propri sono massimali.* In essi infatti si possono avere quanti ideali destri si vuole, come mostreremo in un esempio.

Teorema 5. *Sia N uno stem destro semplice i cui ideali destri propri sono massimali. Se N ha più di due ideali destri, allora N è zero-simmetrico, abeliano e coincide con tutte le sue potenze.*

Lo stem N è abeliano per il lemma 3 di [**2**].

Sia $N = N_0 + N_c$, con $N_0 \neq 0$ ed $N_c \neq 0$; ora N_c è un ideale destro di N, visto che N^+ è abeliano.

(3) Per convincersene basta moltiplicare a destra la seconda delle (4) per e_1': si ottiene $e_1' = e_1'' + e_3e_1'$ ossia $e_3e_1' = e_1 - e_1'$ da cui, moltiplicando a destra per e_2 e tenendo conto del fatto che e_1 ed e_2 sono ortogonali, si ottiene subito che $e_1''e_2' = 0$; che poi $e_2'e_1''$ sia nullo si ottiene in modo analogo dalla seconda delle (4) moltiplicando a destra una volta per e_2' e una volta per e_3, tenendo ancora conto del fatto che tali elementi sono ortogonali.

Sia I un ideale destro di N proprio e distinto da N_c. Allora $I \cap N_c = 0$ e pertanto $I \subseteq N_0$ (cfr. prop. 2.18 di [**6**]). Visto che $N = I + N_c = N_0 + N_c$, si può facilmente mostrare che risulta $I = N_0$: il che è escluso. Dunque $N_c = 0$ ovvero $N_c = N$; quest'ultimo caso però è escluso perchè allora tutti gli ideali di N risulterebbero bilateri e pertanto si conclude che N è zero-simmetrico.

Inoltre N^2 è un ideale di N (perchè N^+ è abeliano) e pertanto, essendo N semplice non zero-anello, deve necessariamente risultare $N^2 = N$ e dunque N coincide con tutte le sue potenze.

Un esempio. Sia $N^+ = C_p \oplus C_p'$. Posto $\bar{C} = \{\langle x, 0\rangle \mid x \in C_p \setminus 0\}$, definiamo un prodotto nel seguente modo:

$$ab = \begin{array}{ll} 0 & \text{se } b = 0 \\ a & \text{se } b \in \bar{C} \\ -a & \text{se } b \notin \bar{C} \cup \{\langle 0, 0\rangle\}\,. \end{array}$$

Si verifica subito che $[N; +, \cdot]$ è uno stem destro semplice in cui tutti i sottogruppi di N^+ sono ideali destri massimali di N.

Bibliografia

[1] D. W. Blackett, *Simple and semisimple near-rings*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 772-785.

[2] C. Ferrero Cotti e M. G. Rinaldi, *Sugli stems i cui ideali propri sono massimali*, Riv. Mat. Univ. Parma, (4) **6** (1980).

[3] H. E. Heaterly, *C-Z transitivity and C-Z decomposable near-rings*, J. of Algebra, (4) **19** (1971), 496-508.

[4] J. Luh, *Rings in which every proper ideal is maximal*, Fund. Math., **91** (1976), 183-188.

[5] A. Oswald, *Semisimple near-rings have the maximum condition on N-subgroups*, J. London Math. Soc., (2) **11** (1975), 408-412.

[6] G. Pilz, *Near-rings*, North-Holland, New York 1977.

Summary

We study right near-rings N whose proper left (right) ideals are maximal. We get a classification of this near-rings: in particular we consider the case simple and we prove that a near-ring simple whose proper left ideals are maximal has at most two left proper ideals.

* * *