Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 35-41

C. PELLEGRINO e N. A. MALARA (*)

Un metodo per la stima dei parametri di modelli di tipo n-esponenziale (**)

1 - Dati un numero naturale k diverso da zero, una k-pla $\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \rangle$ di numeri reali distinti e diversi da zero, una $(k+1)$-pla $\langle A_0, A_1, \ldots, A_k \rangle$ di numeri reali; posto (qualunque siano i numeri naturali i ed n minori di k, il numero naturale j minore od uguale a k ed il numero reale h diverso da zero)

$$w_0(t) = A_0 \,, \qquad w_{n+1}(t) = w_n(t) + A_{n+1} \exp[\alpha_{n+1} t] \,, \tag{1.1}$$

$$a_j^0 = \delta_j^0 \text{ (1)} \,, \qquad a_0^j = 1 \,, \qquad a_{i+1}^{n+1} = a_{i+1}^n - \exp[\alpha_{n+1} h] a_i^n \,, \tag{1.2}$$

$$b_0 = A_0 \,, \qquad b_{n+1} = b_n(1 - \exp[\alpha_{n+1} h]) \,, \tag{1.3}$$

per $n \geqslant 1$, si ha che

$$w_n(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i \exp[\alpha_i t] \,, \tag{1.4}$$

$$b_n = A_0 \prod_{i=1}^{n} (1 - \exp[\alpha_i h]) = A_0 \sum_{j=0}^{n} a_j^n = A_0(1 + \sum_{i=1}^{n} a_i^n) \text{ (2)} \,, \tag{1.5}$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j^n w_n(t + (n-j)h) = b_n \text{ (3)} \,. \tag{1.6}$$

(*) Indirizzo degli AA.: C. PELLEGRINO, Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy; N. A. MALARA, Istituto di Matematica, Università, 41100 Modena, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A.(C.N.R.). — Ricevuto: 18-V-1979.

(1) Con δ_j^n abbiamo indicato il simbolo di Kronecher.

(2) Si noti che gli $\exp[\alpha_i h]$ sono reali positivi, distinti, diversi da uno e che $(1 + \sum_{i=1}^{n} a_i^n) \neq 0$.

(3) Si noti che a_j^n e b_n non dipendono dagli A_i (con $i \geqslant 1$) e che $b_n = 0$ se e solo se $A_0 = 0$.

Infatti, trascurando (per non appesantire l'esposizione della presente nota) le dimostrazioni della (1.4) e della (1.5) che non presentano particolari difficoltà, dimostriamo (per induzione su n) la (1.6) che è una equazione alle differenze finite (cfr. [**1**], [**2**], [**4**]) di passo h, *lineare*, di ordine n ed a coefficienti e termine noto costanti (⁴):

(i) per $n = 1$ o 2 la (1.6) è ovvia (cfr. [**3**]);

(ii) se supponiamo di aver dimostrato la (1.6) per $n \geqslant 2$, si ha che

$$\sum_{j=0}^{n+1} a_j^{n+1} w_{n+1}(t + (n+1-j)h)$$

$$= a_0^{n+1} w_{n+1}(t + (n+1)h) + \sum_{j=1}^{n+1} a_j^{n+1} w_{n+1}(t + (n+1-j)h)$$

$$= w_{n+1}(t + (n+1)h) + \sum_{i=0}^{n} a_{i+1}^{n+1} w_{n+1}(t + (n-i)h)$$

$$= w_{n+1}(t + (n+1)h) + \sum_{i=0}^{n} \left(a_{i+1}^{n} - \exp[\alpha_{n+1}h]\, a_i^n\right) w_{n+1}(t + (n-i)h)$$

$$= w_{n+1}(t + (n+1)h) + \sum_{i=0}^{n} a_{i+1}^{n} w_{n+1}(t + (n-i)h) - \exp[\alpha_{n+1}h] \sum_{i=0}^{n} a_i^n w_{n+1}(t + (n-i)h)$$

$$= w_{n+1}(t + (n+1)h) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}^{n} w_{n+1}(t + (n-i)h) + a_{n+1}^n w_{n+1}(t) - \exp[\alpha_{n+1}h] \sum_{i=0}^{n} a_i^n\big(w_n(t + (n-i)h) + A_{n+1} \exp[\alpha_{n+1}(t + (n-i)h)]\big)$$

$$= a_0^n\; w_{n+1}(t + (n+1)\; h) + \sum_{j=1}^{n} a_j^n\; w_{n+1}(t + (n+1-j)h) - \exp[\alpha_{n+1}h] \sum_{j=0}^{n} a_j^n w_n(t + (n-i)h) - \exp[\alpha_{n+1}h] \sum_{j=0}^{n} a_j^n A_{n+1} \exp\,[\alpha_{n+1}(t + (n-j)h)]$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j^n w_{n+1}(t + (n+1-j)h) - b_n \exp[\alpha_{n+1}h] - \sum_{j=0}^{n} a_j^n A_{n+1} \exp\,[\alpha_{n+1}(t + (n+1-j)h)]$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left[a_j^n\big(w_n(t + (n+1-j)h) + A_{n+1} \exp[\alpha_{n+1}(t + (n+1-j)h)\big]\right] - b_n \exp[\alpha_{n+1}h] - \sum_{j=0}^{n} a_j^n A_{n+1} \exp\,[\alpha_{n+1}(t + (n+1-j)h)]$$

$$= b_n - b_n \exp[\alpha_{n+1}h] = b_n(1 - \exp[\alpha_{n+1}h]) = b_{n+1}\,.$$

(⁴) La (1.6) è omogenea se e solo se $A_0 = 0$.

2 – Per quanto detto in **1** è facile verificare che un modello $w(t)$ di tipo (1.4), con gli α_i tutti distinti e diversi da zero, soddisfa la seguente equazione alle differenze finite

$$w(t+nh) = b + \sum_{i=0}^{n-1} a_i w(t+ih) \tag{2.1}$$

se e solo se per $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$a_i = -a^n_{n-i}\,, \qquad b = b_n \quad (^5)\,. \tag{2.2}$$

Pertanto, fissato un numero naturale $m \geqslant n$ ed $m+n+1$ punti $P_r(t_r, w_r)$ (con $r = 0, 1, \dots, m+n$) del piano $\Pi(t, w)$ tali che per ogni r

$$t_r = t_0 + rh\,, \tag{2.3}$$

si ha che esiste *uno ed un solo* modello $\hat{w}(t) = \hat{A}_0 + \sum_{i=1}^{n} \hat{A}_i \exp[\hat{\alpha}_i t]$ del tipo (1.4) (con gli α_i tutti reali, distinti e diversi da zero) compatibile con gli $m+n+1$ punti P_r (6) se e solo se

(i) gli $m+1$ punti Q_s (con $s = 0, 1, \dots, m$) dello spazio $\mathscr{S}^{n+1}$ e di coordinate

$$x^{(j)}_s = w_{s+j} \qquad (\text{con } j = 0, 1, \dots, n)\ (^7)\,, \tag{2.4}$$

sono compatibili con il modello *lineare*

$$x^{(n)} = \hat{b} + \sum_{i=0}^{n-1} \hat{a}_i x^{(i)}\,; \tag{2.5}$$

(ii) gli n numeri reali $\lambda_i = \exp[\hat{\alpha}_i h]$ sono radici dell'equazione

$$\lambda^n - \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_{n-i} \lambda^{n-i} = 0 \quad (^8) \tag{2.6}$$

---

(5) Per semplificare le notazioni nella (2.1) e nella (2.2) abbiamo soppresso, dove possibile, l'indice n che da qui nel seguito considereremo fissato una volta per tutte. Dalle (2.2) segue che la (2.1) è la forma normale della (1.6).

(6) Cioè se qualunque sia r si ha che $\hat{w}(t_r) = w_r$. Per $m = n$ si ha che i punti P_r sono tanti quanti i parametri dei modelli di tipo (1.4).

(7) Si noti che w_{s+j} è il valore della variabile w relativo a $t_{s+j} = t_s + jh$.

(8) La (2.6) è l'equazione caratteristica della equazione omogenea associata alla (2.1).

e quindi

$$\hat{\alpha}_i = h^{-1} \ln \lambda_i \qquad (\text{cfr. } (^2))\,, \tag{2.7}$$

mentre

$$\hat{A}_0 = \hat{b}\Big(1 - \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i\Big)^{-1} \qquad (\text{cfr. la } (1.5) \text{ e la } (^2))\,; \tag{2.8}$$

(iii) gli $m + n + 1$ punti R_r dello spazio $\mathscr{S}^{n+1}$ e di coordinate

$$u_r^{(j)} = \begin{cases} w_r - \hat{A}_0 & \text{se } j = 0 \\ \exp[\hat{\alpha}_j t_r] & \text{se } j = 1, 2, \ldots, n\,, \end{cases} \tag{2.9}$$

sono compatibili con il modello *lineare*

$$u^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \hat{A}_i u^{(i)}\,. \tag{2.10}$$

3 – Anche in questi casi, come in quelli trattati in [**3**] e per le stesse ragioni, le considerazioni svolte sono di scarso interesse pratico; tuttavia quando l'ipotesi del modello di tipo (1.4) è corretta e le misure degli $m + n + 1$ valori w_r della variabile w per $t = t_r$ sono rilevate con « adeguata » precisione, poichè i modelli (2.5) ed (2.10) sono *lineari*, potremo utilizzare il metodo dei minimi quadrati per determinare una stima dei parametri α_i ed A_j.

Infatti, determinato il modello di tipo (2.5) che « più di ogni altro » (nel senso dei minimi quadrati) approssima gli $m+1$ punti Q_s dello spazio $\mathscr{S}^{n+1}$ e di coordinate (2.4), se le n radici λ_i dell'equazione (2.6) sono reali, distinte, positive e diverse da uno, calcolati $\hat{A}_0$ e gli $\hat{\alpha}_i$ mediante la (2.8) e le (2.7) e determinato il modello di tipo (2.10) che « più di ogni altro » (nel senso dei minimi quadrati) approssima gli $m+ n + 1$ punti R_r dello spazio $\mathscr{S}^{n+1}$ e di coordinate (2.9), si ha che gli $\hat{A}_j$ e gli $\hat{\alpha}_i$ sono una stima dei parametri del modello di tipo (1.4) che « più di ogni altro » (rispetto al metodo descritto) esprime il legame tra le variabili t e w sulla base degli $m + n + 1$ punti P_r dati. Se invece ciò non accade allora non è possibile esprimere (per mezzo del metodo descritto) il legame fra le variabili t e w mediante un modello di tipo (1.4) sulla base degli $m + n + 1$ punti P_r assegnati.

Da quanto è stato detto segue che la $(n+1)$-pla $\langle \hat{b}, \hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1}\rangle$ è la soluzione del sistema lineare

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad &(m+1)b + \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\sum_{s=0}^{m} x_s^{(i)}\Big) a_i = \Big(\sum_{s=0}^{m} x_s^{(n)}\Big)\\ &\Big(\sum_{s=0}^{m} x_s^{(k)}\Big) b + \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\sum_{s=0}^{m} x_s^{(i)} x_s^{(k)}\Big) a_i = \Big(\sum_{s=0}^{m} x_s^{(k)} x_s^{(n)}\Big) \quad (\text{per } k = 0, 1, \ldots, n-1)\end{aligned}$$

che è equivalente al sistema delle equazioni che si ottengono eguagliando a zero le derivate parziali rispetto b e rispetto a_k (per $k = 0, 1, \ldots, n-1$) della funzione

$$(3.2)\qquad E(b, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{s=0}^{m} \Big[\Big(b + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_s^{(i)}\Big) - x_s^{(n)}\Big]^2 .$$

Analogamente (sempre che le n radici λ_i dell'equazione (2.6) siano reali, distinte, positive e diverse da uno) la k-pla $\langle \hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_n\rangle$ è la soluzione del sistema lineare

$$(3.3)\qquad \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{r=0}^{m+n} u_r^{(i)} u_r^{(k)}\Big) A_i = \Big(\sum_{r=0}^{m+n} u_r^{(k)} u_r^{(0)}\Big) \qquad (\text{per } k = 1, 2, \ldots, n)$$

che è equivalente al sistema delle n equazioni che si ottengono eguagliando a zero le derivate parziali rispetto A_k (per $k = 1, 2, \ldots, n$) della funzione

$$(3.4)\qquad E(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \sum_{r=0}^{m+n} \Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k u_r^{(k)}\Big) - u_r^{(0)}\Big]^2 .$$

Osservazione 3.1. Ricordato quanto detto nell'Oss. 1.1 di [**3**] si ha che se dobbiamo esprimere il legame tra i punti $P_r(t_r, w_r)$ mediante un modello matematico di tipo (1.4) con $A_0 = 0$, ossia

$$(3.5)\qquad w(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \exp[\alpha_i t] ,$$

conviene interpolare i corrispondenti punti Q_s con un modello del tipo

$$(3.6)\qquad x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)} \quad (^9) ,$$

(9) Di conseguenza nelle (2.9) si deve porre $A_0 = 0$ ossia $u_r^{(0)} = w_r$ (cfr. (3)).

e quindi sostituire il sistema (3.1) con il sistema

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{m} x_s^{(i)} x_s^{(k)}\right) a_i = \sum_{s=0}^{m} x_s^{(n)} x_s^{(k)} \qquad (\text{per } k = 0, 1, \dots, n-1)\,; \tag{3.7}$$

inoltre, in tal caso, poichè i coefficienti del modello (3.5) sono $2n$, è sufficiente fissare $m \geqslant n-1$ anzichè $m \geqslant n$.

Osservazione 3.2. Il metodo indicato per la stima dei parametri dei modelli di tipo (1.4) [(3.5)] si può generalizzare [10] al caso di $(m+1)\cdot(n+1)$ [11] punti sperimentali $P_r(t_r, w_r)$ (con $r = 0, 1, \dots, mn + m + n$) tali che

(i) degli $m+1$ valori $t_{s(n+1)}$ (per $s = 0, 1, \dots, m$) almeno $n+1$ $[n]$ sono distinti (cfr. [6]);

(ii) per ogni $s = 0, 1, \dots, m$ e qualunque sia $j = 0, 1, \dots, n$, si ha che

$$t_{s(n+1)+j} = t_{s(n+1)} + jh\,, \tag{3.8}$$

purchè nel sistema (3.1) [(3.7)] si sostituiscano le coordinate (2.4) dei punti Q_s con le

$$x_s^{(j)} = w_{s(n+1)+j} \qquad (\text{per } s = 0, 1, \dots, m;\ n = 0, 1, \dots, n)\,, \tag{3.9}$$

e nelle (2.9) e nel sistema (3.3) si tenga conto che $r = 0, 1, \dots, mn + m + n$.

Osservazione 3.3. Le considerazioni sin qui svolte si possono estendere (con opportuni adattamenti) ad altri tipi di modelli matematici quali per esempio

$$\begin{aligned} w(t) &= (A_1 \cos \omega t + A_2 \operatorname{sen} \omega t) \exp[\alpha t] \\ &= \frac{A_1 - iA_2}{2} \exp[(\alpha + i\omega)t] + \frac{A_1 + iA_2}{2} \exp[(\alpha - i\omega)t]\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

---

[10] Tale generalizzazione consente di soddisfare particolari esigenze quali quella di utilizzare dati in cui si rilevano più di una misura della variabile w per uno stesso valore della variabile t.

[11] Sempre per $m \geqslant n$ $[m \geqslant n-1]$.

Bibliografia

[1] A. O. GUELFOND, *Calcul des différences finies*, Dunod, Paris, 1963.

[2] N. E. NÖRLUND, *Leçons sur les équation linéaires aux différences finies*, Gautier-Villars, Paris 1929.

[3] C. PELLEGRINO e G. L. VAONA, *Un metodo per la stima dei parametri di modelli di tipo mono e bi-esponenziale*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **6** (1980).

[4] C. SCARAVELLI, *Risoluzione razionale nelle funzioni date, dell'equazioni alle differenze (con un passo $h \neq 0$), d'ordine finito, lineari ed a coefficienti periodici di periodo h,* Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 17-43.

Summary

In this paper we propose a method to compute a valuation of the « mathematical models » parameters of n-exponential type that interpolate particular couples (t_r, w_r) *of sperimental data* (cfr. [3]).

* * *