

CELESTINA FERRERO COTTI (*)

Sulle involuzioni di certi stems (**)

Introduzione

Continuiamo qui gli studi iniziati in [4] relativi agli stems N con involuzione. Più precisamente dato uno stem N per lo più con $A(N) \cap N^2 = 0$ ci preoccupiamo di vedere come possono operare le eventuali involuzioni che è possibile definire in esso, specie nei confronti di suoi sottoinsiemi notevoli e come possono essere costruite in N involuzioni a partire da funzioni definite su suoi sottoinsiemi o quozienti notevoli. A tale scopo, nel primo paragrafo, introduciamo un concetto di «somma semidiretta per stems» che risulta solo parzialmente analogo alla omonima somma che classicamente si considera in teoria dei gruppi. Saranno studiati più tardi (Teoremi 3 e 4) come operano le involuzioni su siffatte somme. Inoltre (Teorema 1) classifichiamo gli stems distributivi N con $A(N) \cap N^2 = 0$ ed N^2 semplice: i due casi ivi individuati saranno separatamente studiati (Teoremi 5 e 6) per vedere come possono operare involuzioni definite su essi. All'uopo vengono utilizzate sia le dette somme semidirette che una generalizzazione agli stems degli ideali di Lie per gli anelli già implicitamente suggerita nel paragrafo 3 di [4].

La ricerca prosegue naturalmente con lo studio delle involuzioni sugli stems N in cui N^2 è semplice e contenuto in $A(N)$, in modo da avere una panoramica sugli stems con involuzione il cui quadrato è semplice. Per questo caso forniamo anche teoremi di commutatività e anticommutatività (Teoremi 7, 8, 9).

Da tutto lo studio risulta che sarebbe interessante avere tecniche per costruire su uno stem N involuzioni j che subordinino assegnate involuzioni su $N/A(N)$. Nello spirito di Schreier ed Everett si trovano funzioni di Weinert

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A.(C.N.R.).—Ricevuto: 12-VII-1979.

(cfr. [9]_{1,2}) che risolvono, anche se in modo non semplice e non effettivo, tale problema almeno nel caso in cui $A(N) \cap N^2 = 0$, caso che più ci aveva interessato in precedenza.

Nel corso del lavoro solo eccezionalmente abbiamo fatto riferimento ai casi particolari in cui gli stems via via studiati sono anelli; vale la pena di notare qui una volta per tutte che anche in tali casi — a parte il fatto che la somma semidiretta diventa un caso particolare della abituale somma diretta — i risultati da noi forniti sembrano essere nuovi forse in dipendenza del fatto che noi tendiamo a studiare più le involuzioni che può avere uno stem, che gli stems con una data involuzione.

Forse anche per questo le nostre notazioni — per lo più mutuata dalle notazioni classiche relative agli anelli con involuzione — sono qua e là incomplete (per esempio per lo più scriviamo $K(N)$ anzichè, come sarebbe più preciso e come siamo stati costretti a fare nel Teorema 12, $K_j(N)$).

I - Generalità

Sia N uno stem sinistro: chiamiamo *involuzione su N* un automorfismo j di ordine due del gruppo additivo N^+ di N tale che $j(xy) = j(y)j(x)$, $\forall x, y \in N$.

Se $M \subseteq N$ indichiamo con $\langle M \rangle$ il sottostem di N generato da M , con M^n il sottogruppo di N^+ generato da $M^{(n)} = \{x_1 x_2 \dots x_n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in M\}$; poniamo $2M = \{2x \mid x \in M\}$. Indichiamo invece con N^k il sottostem generato da $N^{(k)} = \{x_1 x_2 \dots x_k \mid x_1, \dots, x_k \in N\}$; poniamo inoltre $A(M) = \{x \in N \mid xy = yx = 0, \forall y \in M\}$ e chiamiamo centro l'insieme $Z(N) = \{x \in N \mid xy = yx, \forall y \in N\}$.

Uno stem N con involuzione j risulta *distributivo*: se $A(N) = 0$ è dunque un anello; inoltre N^2 ed $N' = N/A(N)$ risultano anelli con involuzione date rispettivamente dalla restrizione j_{N^2} di j ad N^2 e dalla $j'([x]) = [j(x)]$ (per $[x] \in N'$).

Posto $S(N) = \{x \in N \mid j(x) = x\}$ e $K(N) = \{x \in N \mid j(x) = -x\}$ e se π è l'epimorfismo canonico $N \rightarrow N'$, poniamo $\hat{S} = \pi^{-1}(S(N'))$ e $\hat{K} = \pi^{-1}(K(N'))$. Si sa (cfr. [4]) che $A(\hat{S})$ e $A(\hat{K})$ sono ideali e che l'insieme $T = \{x + j(x) \mid x \in N\}$ è contenuto in \hat{S} e l'insieme $T_0 = \{-x + j(x) \mid x \in N\}$ è contenuto in \hat{K} . Questi fatti verranno spesso utilizzati senza esplicito richiamo.

Sia $[N; +, \cdot]$ uno stem distributivo, si definisce *stem di Lie associato ad N* la struttura $[N; +, [,]]$ ove $[x, y] = xy - yx$, per $x, y \in N$. Tale stem risulta distributivo e, in generale, non associativo; inoltre valgono la $[x, x] = 0$ ($\forall x \in N$) e l'identità di Jacobi. Un sottoinsieme $C \subseteq N$ si dice *sottostem di Lie di N* se è un sottogruppo di N^+ ed inoltre risulta $[c, c'] \in C$ per $c, c' \in C$. Un sottoinsieme $D \subseteq N$ si dice *ideale di Lie di N* se è un sottogruppo normale di N^+

ed inoltre si ha $[n, d] \in D$, per $n \in N$, $d \in D$. Se $M, M' \subseteq N$, indicheremo con $[M, M']$ il sottogruppo di N^+ generato dagli elementi $xy - yx$, per $x \in M$ ed $y \in M'$.

Faremo riferimento, nel seguito alle notazioni e definizioni qui premesse ed utilizzeremo, senza esplicito richiamo, notazioni e risultati di [7].

Poichè ci interessa studiare il comportamento delle involuzioni su stems variamente decomponibili, vale la pena di poter parlare della decomposizione di uno stem in somma semidiretta, giusta la seguente definizione. Siano A uno zero-stem, B uno stem sinistro e sia f uno omomorfismo da B^+ ad $\text{Aut } A^+$; posto $f_b = f(b)$, per $b \in B^+$, definiamo in $A \times B$ le operazioni $\langle a, b \rangle + \langle a', b' \rangle = \langle a + f_b(a'), b + b' \rangle$ e $\langle a, b \rangle \cdot \langle a', b' \rangle = \langle 0, bb' \rangle$. La struttura $N = [A \times B; +, \cdot]$ risulta uno stem sinistro: lo chiameremo *somma semidiretta di A e B* e scriveremo $A +_f B$. Ovviamente N^+ è somma semidiretta di A^+ e B^+ ed N è distributivo se e solo se B lo è.

Osservazione 1. *Sia N uno stem distributivo. Si può scrivere $N = A +_f B$ (per f omomorfismo opportuno) se e solo se A è un ideale di N , B è un sottostem di N , $A \subseteq A(N)$, $A + B = N$ ed $A \cap B = 0$.*

Siano N uno stem distributivo, A un suo ideale e B un sottostem di N ; visto che $A \subseteq A(N)$ allora A è uno zero-stem e B è distributivo. Sia f l'omomorfismo $B^+ \rightarrow \text{Aut } A^+$ definito dalla $b \rightarrow \varphi_b: a \rightarrow b + a - b$. Poniamo $f_b = \varphi_b$. Poichè ora $A + B = N$ ed $A \cap B = 0$ allora ogni elemento x di N può scriversi in uno ed un solo modo come somma di un elemento di A e di un elemento di B ; posto $x = a + b$ ed $y = a' + b'$ risulta $x + y = (a + b) + (a' + b') = a + (b + a' - b) + b + b' = a + f_b(a') + b + b'$ ed anche $xy = (a + b)(a' + b') = bb'$ perchè $A \subseteq A(N)$. Ne segue che la corrispondenza $x = a + b \rightarrow \langle a, b \rangle$ è un isomorfismo da N ad $A +_f B$ e possiamo perciò asserire che N è somma semidiretta di A e B .

Sia viceversa $N = A +_f B$; mostriamo che A è un ideale di N contenuto in $A(N)$: infatti A^+ è normale in N^+ perchè N^+ è somma semidiretta di A^+ e B^+ ; le $AN \subseteq A$ ed $NA \subseteq A$ si verificano subito per via diretta. Dalle $\langle a, 0 \rangle \cdot \langle a', b \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \langle a', b \rangle \langle a, 0 \rangle$ segue poi $A \subseteq A(N)$. Il resto è ovvio.

Visto che argomento centrale di questo lavoro è lo studio degli stems con involuzione in cui $A(N) \cap N^2 = 0$, appare particolarmente importante il seguente

Teorema 1. *Sia N uno stem distributivo con $A(N) \cap N^2 = 0$; N^2 risulta semplice se e solo se N soddisfa ad una almeno delle seguenti condizioni.*

- (1) $N = A(N) +_f N^2$ ed $A(N)$ è massimale in N ;

(2) $N' = N/A(N)$ è un anello primo i cui quozienti propri sono zero-anelli.

Intanto osserviamo che se N^2 è semplice non nilpotente, allora $N' = N/A(N)$ è un anello primo (cfr. il cor. 1 di [2]₃ ove ora ovviamente possiamo sostituire $A(N)$ ad $A_a(N^2)$); sia in particolare N' semplice, allora $N'^2 = N'$ e dunque $A(N) + N^2 = N$: siamo nel caso (1); ovviamente $A(N)$ risulta massimale in N .

Altrimenti N' risulta primo e non semplice; sia allora I un ideale di N contenente propriamente $A(N)$: visto che ora $I \cap N^2 = 0$ ovvero $N^2 \subseteq I$, osserviamo che se $I \cap N^2 = 0$ risulta $IN = NI = 0$ e dunque $I \subseteq A(N)$; ne segue che se $A(N) \subset I$, allora $N^2 \subset I$ e perciò $A(N) + N^2 \subseteq I$. Dunque tutti i quozienti propri di N' sono zero-anelli, siamo nel caso (2).

Viceversa nel caso (1) risulta N^2 isomorfo ad $N' = N/A(N)$ che è un anello semplice perchè $A(N)$ è massimale: l'asserto è verificato in questo caso.

Sia, caso (2), N uno stem tale che $N' = N/A(N)$ sia un anello primo i cui quozienti propri siano zero-anelli; in virtù del teorema 6 di [3], N'^2 risulta semplice: dunque $A(N) + N^2$, sua controimmagine nell'epimorfismo canonico $N \rightarrow N'$, non possiede ideali propri che contengono propriamente $A(N)$. Sia J un ideale proprio di N^2 , mostriamo che $J' = A(N) + J$ è un ideale di $A(N) + N^2$ che contiene propriamente $A(N)$.

Risulta infatti, per $n \in N^2$, $j \in J \subseteq N^2$, $a, a' \in A(N)$, $(a + n) + (a' + j) - (a + n) = a + n + a' - n + j - a = (a + n + a' - n + j - a - j) + j \in A(N) + J$ (abbiamo applicato il fatto che $A(N)$ è normale e che N^2 è un anello); d'altra parte, per $\bar{a}, \bar{a}' \in A(N)$ e $j', j'' \in J$, risulta $\bar{a} + j' - (\bar{a}' + j'') = \bar{a} + j' - j'' - \bar{a}' = (\bar{a} + j' - j'' - \bar{a}' - (j' - j'')) + j' - j'' \in A(N) + J$ e dunque $A(N) + J$ è un sottogruppo normale di $A(N) + N^2$. Inoltre $(A(N) + J) \cdot (A(N) + N^2) = J \cdot N^2 \subseteq J \subseteq A(N) + J$; analogamente risulta $(A(N) + N^2) \cdot (A(N) + J) = N^2 J \subseteq J \subseteq A(N) + J$ (perchè J è un ideale di N^2). Si conclude che J' è un ideale di $A(N) + N^2$ che contiene $A(N)$, il che è assurdo per quanto prima osservato. Si ha l'asserto.

Osservazione 2. Sia N uno stem distributivo con N^2 semplice ed $A(N) \cap N^2 = 0$; posto $N' = N/A(N)$ si ha $Z(N^2) \subseteq Z(N)$ e $Z(N') = Z(N)/A(N)$.

Sia $x \in Z(N^2)$; per $z \in N$ risulta $x(xz) = (xz)x$ e dunque si ha $x(xz - zx) = 0$; poichè $x \in Z(N^2)$, risulta $xz - zx \in A(x)$ ed ora $A(x)$ è un ideale di N^2 : dunque $A(x) = N^2$ ovvero $A(x) = 0$: nel primo caso $N^2 x = 0$ e pertanto $Nx \subseteq A(N) \cap N^2 = 0$ ed anche $Nx = 0$. Ne segue $x \in A(N) \cap N^2 = 0$ ed $x = 0$; perciò $Z(N^2) = 0$ e l'asserto vale banalmente.

Sia invece $A(x) = 0$; allora $xz = zx$, per $x \in Z(N^2)$ e $z \in N$, ed x appartiene a $Z(N)$: ancora si ha l'asserto.

Mostriamo che $Z(N') = Z(N)/A(N)$. Se $x \in Z(N)$ allora ovviamente $[x] \in Z(N')$ e dunque $Z(N)/A(N) \subseteq Z(N')$. Sia, viceversa, $[x] \in Z(N')$, allora, per $y \in N$, risulta $[x][y] = [y][x]$ e dunque $xy - yx \in A(N) \cap N^2 = 0$ ne segue $xy = yx$ e l'asserto.

2 - Particolari ideali di Lie di N^2

Per il seguito sarà anche utile avere qualche risultato sugli ideali di Lie in N ed in N^2 .

Teorema 2. *Se N è uno stem con involuzione, $\langle \hat{S} \rangle \cap N^2$ risulta un ideale di Lie ed un sottoanello di N^2 ; inoltre \hat{S}^2 e \hat{K}^2 risultano ideali di Lie di N^2 .*

Ovviamente $\langle \hat{S} \rangle \cap N^2$ è un sottoanello di N^2 . Inoltre, per $x \in \langle \hat{S} \rangle$ ed $n \in N$, $xn - nx \in \langle \hat{S} \rangle$ (lemma 1 di [4]) e dunque, per $\bar{n} \in N^2$ ed $\bar{x} \in \langle \hat{S} \rangle \cap N^2$, si ha $\bar{x}\bar{n} - \bar{n}\bar{x} \in \langle \hat{S} \rangle \cap N^2$; perciò $\langle \hat{S} \rangle \cap N^2$ è un ideale di Lie di N^2 .

Mostriamo che \hat{S}^2 è un ideale di Lie di N^2 . Per $x, y \in \hat{S}$ e per $n \in N$, sia xy il generico elemento di $\hat{S}^{(2)}$: risulta $xyn - nxy = x(yn + j(n)y) - (xj(n) + nx)y$, ove ovviamente $yn + j(n)y \in \hat{S}$ e $xj(n) + nx \in \hat{S}$; dunque $xyn - nxy \in \hat{S}^2$ e questo basta per avere l'asserto.

Per mostrare che \hat{K}^2 è un ideale di Lie di N^2 si ragiona in modo analogo.

Osservazione 3. *Sia N uno stem con involuzione e sia $N' = N/A(N)$; risulta $\langle S(N') \rangle = N'$ ($\langle K(N') \rangle = N'$) se e solo se $\langle \hat{S} \rangle = N$ ($\langle \hat{K} \rangle = N$).*

Sia $\langle S(N') \rangle = N'$ e sia $[x] \in N'$; esistono elementi $[x^{a_1}]$, $[x^{a_2}]$, ..., $[x^{a_s}]$ in $S(N')$ tali che

$$[x] = \sum_1^{h_1} a_{a_1}^1 [x^{a_1}] + \sum_1^{h_2} a_{a_2}^2 [x_1^{a_2}] [x_2^{a_2}] + \dots + \sum_1^{h_s} a_{a_s}^s [x_1^{a_s}] [x_2^{a_s}] \dots [x_s^{a_s}]$$

(ove $a_{a_i}^i$ sono interi relativi e gli x^{a_1} , $x_1^{a_2}$, ..., $x_s^{a_s}$ sono elementi di \hat{S}). Allora

$$x - \sum_1^{h_1} a_{a_1}^1 x^{a_1} - \sum_1^{h_2} a_{a_2}^2 x_1^{a_2} x_2^{a_2} - \dots - \sum_1^{h_s} a_{a_s}^s x_1^{a_s} x_2^{a_s} \dots x_s^{a_s} \in A(N) \subset \hat{S}$$

e dunque $x \in \langle \hat{S} \rangle$. Il resto è analogo.

Osservazione 4. *Sia N uno stem con involuzione j tale che $A(N) \cap N^2 = 0$; posto $N' = N/A(N)$ risulta*

$$(1) \hat{S} \cap N^2 = S(N^2) = S(N) \cap N^2 \text{ e } \hat{K} \cap N^2 = K(N^2) = K(N) \cap N^2;$$

(2) $S(N') \subseteq Z(N')$ se e solo se $\tilde{S} \subseteq Z(N)$.

(1) Sia $x \in \tilde{S} \cap N^2$; risulta $-x + j(x) \in A(N) \cap N^2 = 0$ onde $j(x) = x$ ed $x \in S(N^2)$. D'altra parte ovviamente $S(N^2) \subseteq \tilde{S} \cap N^2$ ed inoltre $S(N^2) = S(N) \cap N^2$ per definizione. L'altra è analoga.

(2) Sia $S(N') \subseteq Z(N')$ e sia $[x] \in S(N')$: allora $x \in \tilde{S}$ ed inoltre, per $n \in N$, $xn - nx \in A(N) \cap N^2 = 0$; ne segue $xn = nx$ onde $x \in Z(N)$. Visto che $x \in \tilde{S}$ se e solo se $[x] \in S(N')$, si conclude che $\tilde{S} \subseteq Z(N)$.

L'inverso è analogo.

3 - Involuzioni su stems decomponibili in somme semidirette

Iniziamo qui lo studio delle involuzioni su stems che si possono decomporre in somme semidirette, in vista di possibili classificazioni delle involuzioni stesse.

Teorema 3. *Sia $N = A +_r B$ con $A = A(N)$ e $B = N^2$; se N possiede una involuzione j , essa fissa A e B ed inoltre $j|_A, j|_B$ sono involuzioni tali che $j|_A \circ f|_B = f|_{j(B)} \circ j|_A, \forall b \in B$.*

Viceversa se A, B possiedono involuzioni j', j'' tali che $j' \circ f_b = f_{j''(b)} \circ j' (\forall b \in B)$, allora la $j = j' \times j''$ è una involuzione su N .

Sia $N = A +_r B$ uno stem con involuzione j ; allora N è distributivo ed ovviamente f è l'omomorfismo da B^+ ad $\text{Aut } A^+$ definito da $f_b(a) = b + a - b$. Osserviamo che $j(A) = A$ perchè A è l'annullatore di N e $j(B) = B$ perchè $j(N^2) = B^2 \subseteq B$. Posto $j' = j|_A$ e $j'' = j|_B$, si ha che j' è una involuzione su A e j'' è una involuzione su B ; inoltre $j = j' \times j''$ perchè, per $x \in N$, possiamo porre $x = a + b$ ($a \in A$ e $b \in B$) e si ha $j(x) = j(a) + j(b) = j'(a) + j''(b)$. Infine

$$j'(f_b(a)) = j(b + a - b) = j(b) + j(a) - j(b) = j''(b) + j'(a) - j''(b) = f_{j''(b)}(j'(a)).$$

Sia viceversa $N = A +_r B$ e siano j', j'' involuzioni su A e B rispettivamente; consideriamo la biiezione $j = j' \times j''$: risulta $j(j(\langle a, b \rangle)) = j(\langle j'(a), j''(b) \rangle) = \langle j'^2(a), j''^2(b) \rangle = \langle a, b \rangle$ e dunque $j^2 = i$. Inoltre $j(\langle a, b \rangle + \langle a', b' \rangle) = j(\langle a + f_b(a'), b + b' \rangle) = \langle j'(a + f_b(a')), j''(b + b') \rangle = \langle j'(a) + j'(f_b(a')), j''(b) + j''(b') \rangle = \langle j'(a) + f_{j''(b)}(j'(a')), j''(b) + j''(b') \rangle = \langle j'(a), j''(b) \rangle + \langle j'(a'), j''(b') \rangle = j(\langle a, b \rangle) + j(\langle a', b' \rangle)$. Infine si prova immediatamente che $j(\langle a, b \rangle \cdot \langle a', b' \rangle) = j(\langle a', b' \rangle) \cdot j(\langle a, b \rangle)$, il che completa la dimostrazione.

Teorema 4. *Uno stem N ha involuzione j ed $N' = N/A(N)$ ha unità se e solo se $N = A +_r B$, ove A è uno zero-stem con una involuzione j' e $A = A(N)$ e B è un anello con unità e con una involuzione j'' ed inoltre $j' \circ f_b = f_{j''(b)} \circ j' (b \in B)$.*

Sia N uno stem con involuzione j e sia $N' = N/A(N)$ un anello con unità $[u]$; allora $[u] \cdot [x] = [x] \cdot [u] = [x]$ e dunque $-x + ux \in A(N)$; ne segue $xu = uxu = ux$.

D'altra parte è $Nu \cap A(N) = 0$: infatti se $xu \in A(N)$ allora, per $y \in N$, risulta $0 = xuy = xy$, onde $x \in A(N)$ ed $xu = 0$. Risulta anche $Nu = N^2$: infatti $Nu \subset N^2$ ed inoltre $N^2 \subseteq Nu$ perchè $xy = xyu$. Dunque $A(N) \cap N^2 = 0$. Inoltre $N = A(N) + N^2$ perchè $-x + xu \in A(N)$. Per la Osservazione 1 possiamo scrivere $N = A(N) +_r N^2$. Ora N^2 è un anello con unità: infatti $xyu^2 = xy(u + a) = xyu = xy$. Per il Teorema 3 esiste dunque una involuzione j' su $A(N)$ e una involuzione j'' su N^2 tale che $j = j' \times j''$ e $j' \circ f_b = f_{j''(b)} \circ j''$. L'inverso segue dal Teorema 3 e dal fatto che se B è un anello con unità allora l'annullatore di B è nullo.

Osservazione 5. *Sia $N = A(N) +_r N^2$ uno stem con involuzione j ; risulta $K(N) \subseteq A(N)$ se e solo se $j|_{N^2} = i$ ed N^2 è privo di torsione due. Risulta $\hat{S} \subseteq A(N)$ se e solo se $j|_{N^2} = -i$ ed N^2 è privo di torsione due. Nel primo caso N risulta commutativo e nel secondo anticommutativo.*

Sia $K(N) \subseteq A(N)$; per $x \in N^2$ è $-x + j(x) \in K(N) \cap N^2 \subseteq A(N) \cap N^2 = 0$ e dunque $j(x) = x$: ne segue che $j|_{N^2} = i$. Sia ora $y \in N^2$ tale che $2y = 0$; è $j(y) = y = -y$ e pertanto $y \in K(N) \cap N^2 = 0$; dunque $y = 0$. Si conclude che N^2 è privo di torsione due.

Sia viceversa $N = A(N) +_r N^2$ tale che $j|_{N^2} = i$ ed N^2 sia privo di torsione due; allora $N^2 \subseteq S(N)$. Sia $y \in N$ con $y \in K(N)$; posto $y = \langle a, b \rangle$ ($a \in A(N)$, $b \in N^2$), per il Teorema 3 risulta $j(y) = \langle j'(a), j''(b) \rangle$ ove ora $j'' = i$. Dunque $j(y) = \langle j'(a), b \rangle = -\langle a, b \rangle = \langle f_{-b}(-a), -b \rangle$ e perciò $2b = 0$; visto che ora N^2 è privo di torsione due, riesce $b = 0$ e $K(N) \subseteq A(N)$.

Se $K(N) \subseteq A(N)$, possiamo anche applicare il corollario 1 di [4] ed osservare che se $\varphi: N \rightarrow K(N)$ è la funzione definita dalla $\varphi(x) = -x + j(x)$, risulta $\varphi(xy) = 0$ (perchè $j|_{N^2} = i$) e dunque è anche $-xy + yx = 0$, per $x, y \in N$; ne segue N commutativo. Il resto è analogo.

4 - Caso in cui N^2 è semplice non nilpotente

Il Teorema 1 segnala che vale la pena di studiare gli stems con involuzione in cui N^2 è semplice non nilpotente, elaborando separatamente i due casi ivi prospettati.

Allo studio del primo caso è necessario premettere la

Osservazione 6. Sia N uno stem con involuzione j e sia M un sotto-stem di N tale che $j(M) = M$. Se $M \cap \hat{S} = 0$, allora $M \subseteq K(N)$ ed $M^3 = 0$.

Sia infatti $x \in M$; per la osservazione 1 di [4] risulta $x + j(x) \in M \cap \hat{S} = 0$, dunque $j(x) = -x$ ed $M \subseteq K(N)$. Poichè poi $xj(x) \in M \cap \hat{S} = 0$ (sempre per $x \in M$) e visto che ora $j(x) = -x$, risulta $x^2 = 0$, $\forall x \in M$. Poichè M è distributivo, possiamo provare che M è anticommutativo; per la (6) di [5] è anche $2xyz = 0$ ($\forall x, y, z \in M$) e pertanto risulta $j(xyz) = xyz$. Ne segue $M^3 \subseteq M \cap \hat{S} = 0$ e dunque $M^3 = 0$.

Lemma 1. Sia $N = A(N) +, N^2$ uno stem con involuzione j ; risulta $\hat{S} = A(N) + S(N^2)$ e $\hat{K} = A(N) + K(N^2)$.

Proviamo che $A(N) + S(N^2) \subseteq \hat{S}$: sia $y \in A(N) + S(N^2)$, allora $y = \bar{a} + \bar{b}$ con $j(\bar{b}) = \bar{b}$; risulta $-(\bar{a} + \bar{b}) + j(\bar{a} + \bar{b}) = -\bar{b} - \bar{a} + j(\bar{a}) + j(\bar{b}) = -\bar{b} - \bar{a} + j(\bar{a}) + \bar{b} \in A(N)$ e dunque $y \in \hat{S}$.

Sia ora $x \in \hat{S}$; esiste un $a \in A(N)$ ed un $b \in N^2$ tale che $x = a + b$: dalla $x \in \hat{S}$ segue $-(a + b) + j(a + b) \in A(N)$ e dunque $-b - a + j(a) + j(b) = -b - a + j(a) + b - b + j(b) \in A(N)$. Dunque $-b + j(b) \in A(N) \cap N^2 = 0$ e $j(b) = b$ cioè $b \in S(N^2)$ ed $\hat{S} \subseteq A(N) + S(N^2)$. Il resto è analogo.

Teorema 5. Sia $N = A(N) +, N^2$ uno stem con involuzione j con $A(N)$ massimale; lo stem N soddisfa ad almeno una delle seguenti condizioni:

- (1) $\langle \hat{S} \rangle = N$ oppure $\langle \hat{K} \rangle = N$;
- (2) N^2 è un corpo;
- (3) N^2 è un anello di matrici su un campo e j è l'involuzione simplettica.

Incominciamo con l'osservare che $S(N^2) \neq 0$, perchè altrimenti, visto che $S(N^2) = \hat{S} \cap N^2$ (Oss. 4), si avrebbe, per la Oss. 6, $(N^2)^3 = 0$ ed N sarebbe nilpotente contro il supposto.

Inoltre N^2 è semplice non nilpotente, quindi semiprimo; per il teorema 2.1.5 di [6], risulta $S(N^2) \subseteq Z(N^2)$ oppure $\langle S(N^2) \rangle = N^2$. Nel secondo caso, per il Lemma 1, risulta $\langle \hat{S} \rangle = N$ e cioè vale la prima condizione del caso (1). Altrimenti $S(N^2) \subseteq Z(N^2)$ e dunque, sempre per il Lemma 1 e per la Oss. 2 risulta $\hat{S} \subseteq Z(N)$. Ricordato che per $x \in N$, $x + j(x) \in \hat{S}$, si ha $y(x + j(x)) = (x + j(x))y$, $\forall x, y \in N$. Si perviene così alla

$$(1) \quad xy - yx = yj(x) - j(x)y;$$

scambiando in (1) la x con la y si ottiene la

$$(2) \quad yx - xy = xj(y) - j(y)x.$$

Applicando j ad ambo i membri della (1), e tenendo presente la (2), si ottiene $j(xy - yx) = xj(y) - j(y)x = yx - xy = -(xy - yx)$.

Si conclude che $[N, N] \subseteq K(N^2)$; perciò $\langle K(N^2) \rangle$ è un sottoanello di N^2 (per definizione) ed anche un ideale di Lie di N^2 , che ora è semplice non nilpotente: possiamo applicare il teorema 2.1.2 di [6] e se $K(N^2)$ è non commutativo, allora $\langle K(N^2) \rangle = N^2$ e pertanto $\langle \hat{K} \rangle = N$: si ha la seconda condizione del caso (1).

Altrimenti $K(N^2)$ è commutativo; visto che N^2 è un anello semplice, risulta $2N^2 = N^2$ oppure $2N^2 = 0$. Sia dunque $2N^2 = N^2$, allora $N^2 = S(N^2) + K(N^2)$ ed N^2 risulta commutativo perchè ora è anche $S(N^2) \subseteq Z(N^2)$; essendo semplice, è un campo. Altrimenti $2N^2 = 0$; allora $K(N^2) = S(N^2) \subseteq Z(N^2)$ e $Z(N^2)$, centro di un anello semplice, è un campo; per la osservazione 1 di [4] le tracce $x + j(x)$ non nulle di elementi di N^2 sono contenute in $S(N^2)$ e risultano dunque invertibili in N^2 : possiamo applicare ad N^2 il teorema 2.1.8 di [6], ricordando naturalmente che ora $2N^2 = 0$ e che N^2 è semplice; questo completa la dimostrazione.

Passiamo ora ad esaminare gli stems con involuzione soddisfacente al secondo caso del Teorema 1.

Teorema 6. *Sia N uno stem con involuzione j soddisfacente alla (2) del Teorema 1; allora \hat{S} e \hat{K} sono ideali di N ed inoltre $\hat{S} \neq A(N)$ e $\hat{K} \neq A(N)$.*

Poichè $N' = N/A(N)$ risulta primo, possiamo applicare il teorema 2.1.5 di [6]: dunque $S(N') \subseteq Z(N')$ oppure $\langle S(N') \rangle$ contiene un ideale non nullo di N' ; per il teorema 5 di [3], $Z(N') = 0$ mentre ora $S(N') \neq 0$ perchè altrimenti, Oss. 6, N' sarebbe nilpotente contro il fatto che è primo. Si conclude che $S(N')$ deve contenere un ideale non nullo di N' e risulta così un ideale di N' perchè allora contiene N'^2 : ne segue che $\langle \hat{S} \rangle$ è un ideale di N perchè controimmagine di $\langle S(N') \rangle$ in un epimorfismo.

Essendo ora N'^2 semplice (teorema 6 di [3]) si ha $2N'^2 = 0$ oppure $2N'^2 = N'^2$ (ed N'^2 è privo di torsione due); sia $2N'^2 = 0$, allora è $S(N'^2) = K(N'^2)$ e possiamo pertanto applicare il teorema 2.1.5 di [6] ad N'^2 : risulta $S(N'^2) \subseteq Z(N'^2)$ oppure $\langle S(N'^2) \rangle = N'^2$.

Nel primo caso, visto che ora $Z(N') = 0$ e dunque (Oss. 2) $Z(N'^2) = 0$, si ha $S(N'^2) = 0$ e questo è assurdo per la Oss. 6: si conclude che deve essere $\langle S(N'^2) \rangle = \langle K(N'^2) \rangle = N'^2 \subseteq \langle K(N') \rangle$ e dunque $\langle K(N') \rangle$ è un ideale di N' ; anche $\langle \hat{K} \rangle$ risulta allora un ideale di N . Nel secondo ($2N'^2 = N'^2$), consideriamo $K(N'^2)$, ideale di Lie di N'^2 (Teorema 2): dunque $K(N'^2)$ è un sottoanello di N'^2 ed un suo ideale di Lie: per il teorema 2.1.2 di [6] risulta $\langle K(N'^2) \rangle = N'^2$, oppure $K(N'^2) \subseteq Z(N'^2)$. Il primo caso implica ancora che $\langle \hat{K} \rangle$ è un ideale di N .

Mostriamo che non è possibile che si verifichi il secondo dei casi appena prospettati. Se $K(N')^2 \subseteq Z(N'^2)$ è (Lemma 2 e teorema 5 di [3]) $K(N')^2 = 0$ e dunque $\widehat{K}^2 = 0$ (tenendo conto anche che $A(N) \cap N^2 = 0$); visto che $A(\widehat{K})$ è un ideale di N contenente $A(N)$ (teorema 1 di [4]) allora $A(\widehat{K}) = A(N)$ oppure $N^2 \subseteq A(\widehat{K})$ (per il Teorema 1). Nel primo caso risulta $\widehat{K} \subseteq A(\widehat{K}) = A(N)$ e dunque $\widehat{K}N = N\widehat{K} = 0$; si conclude che $N \subseteq A(N)$, il che è assurdo. Nel secondo caso si ha $N^2 \subseteq A(\widehat{K})$ e dunque $N\widehat{K} \subseteq A(N) \cap N^2 = 0$ e perciò $\widehat{K} = A(N)$; questo è ancora assurdo: infatti allora risulta $K(N) \subseteq A(N)$ e dunque, poichè ora N'^2 è privo di torsione due, $j_{|N^2} = i$. Per il cor. 1 di [4] si ha che N^2 riesce commutativo, cioè un campo: come tale ha unità e, per il Teorema 4, risulta $N = A(N) +_r N^2$ con $N' = N/A(N)$ semplice; questo va contro il supposto. Si conclude anche che deve essere $\widehat{K} \neq A(N)$, se $2N'^2 = N'^2$; d'altra parte abbiamo già provato che quando $2N'^2 = 0$ è certamente $\widehat{K} \neq A(N)$ perchè in tal caso $\langle \widehat{K} \rangle$ è un ideale di N che contiene $A(N) + N^2$. Infine è $\widehat{S} \neq A(N)$ perchè altrimenti si avrebbe $\widehat{S} \cap N^2 = 0$ e (Oss. 6) N risulterebbe nilpotente, contro il supposto.

5 - Caso in cui $N^3 = 0$ ed N^2 è semplice

Nel numero precedente abbiamo considerato il caso in cui N^2 è semplice non nilpotente, per completezza passiamo al caso in cui N^2 è semplice e contenuto in $A(N)$; si osservi che allora N^{2+} è un gruppo di ordine primo p .

Osservazione 7. Sia N uno stem con involuzione j , sia N^{2+} di ordine primo $p \neq 2$ ed $N^2 \subseteq A(N)$; risulta $N^3 = 0$ ed inoltre

- (1) \widehat{S} e \widehat{K} sono ideali di N con $\widehat{S} \cap \widehat{K} = A(N)$,
- (2) $j_{|N^2} = i$ oppure $j_{|N^2} = -i$,
- (3) $N' = N/A(N)$ è uno zero-anello privo di torsione due.

La dimostrazione è una semplice applicazione di fatti ben noti.

Nel seguito \widetilde{N} indicherà sempre uno stem soddisfacente alle condizioni della Oss. 7, che utilizzeremo spesso senza esplicito richiamo.

È anche ovvia la

Osservazione 8. In uno stem \widetilde{N} , \widehat{S} e \widehat{K} sono commutativi o anticommutativi ed inoltre, per $x \in \widehat{S}$ ed $y \in \widehat{K}$, è $xy = yx$ oppure $xy = -yx$.

Osservazione 9. Sia \tilde{N} commutativo (anticommutativo); allora $j|_{\tilde{N}^2} = i$ ($j|_{\tilde{N}^2} = -i$) se e solo se $\hat{S}^2 \neq 0$ o $\hat{K}^2 \neq 0$.

Infatti se \tilde{N} è commutativo ed $\hat{S}^2 \neq 0$, allora, per $x, y \in \hat{S}$, risulta $j(xy) = j(y)j(x) = yx = xy$ (si ricordi che per $x, y \in \hat{S}$ è $j(x) = x + a$ e $j(y) = y + \bar{a}$, a, \bar{a} opportuni in $A(N)$): dunque j è l'identità su \hat{S}^2 . Poichè ora $\hat{S}^2 = \tilde{N}^2$ (perchè \tilde{N}^2 è semplice) si ha $j|_{\tilde{N}^2} = i$. Nel caso $\hat{K}^2 \neq 0$ si procede allo stesso modo.

Sia $j|_{\tilde{N}^2} = i$ ed \tilde{N} commutativo. Supponiamo per assurdo che sia $\hat{S}^2 = \hat{K}^2 = 0$: mostriamo che allora risulta $\hat{S} \cdot \hat{K} \neq 0$; infatti se $\hat{S} \cdot \hat{K} = 0$ dalla $2\tilde{N} \subseteq \hat{S} + \hat{K}$ segue, per $x, y \in \tilde{N}$, $2x \cdot 2y = 0$ e dunque $xy = 0$, il che è assurdo. D'altra parte anche $\hat{S} \cdot \hat{K} \neq 0$ è ora assurdo perchè gli elementi di $\hat{S} \cdot \hat{K}$ vengono ad avere torsione due, e questo è escluso. Si conclude che $\hat{S}^2 \neq 0$ o $\hat{K}^2 \neq 0$. Il resto è analogo.

Osservazione 10. In uno stem \tilde{N} valgono i seguenti fatti:

(1) se \hat{S} è commutativo (anticommutativo) ed $\hat{S}^2 \neq 0$, allora $j|_{\tilde{N}^2} = i$ ($j|_{\tilde{N}^2} = -i$);

(2) se \hat{K} è commutativo (anticommutativo) e $\hat{K}^2 \neq 0$, allora $j|_{\tilde{N}^2} = i$ ($j|_{\tilde{N}^2} = -i$);

(3) se $\hat{S} \cdot \hat{K} \neq 0$ e se, per $x \in \hat{S}$ ed $y \in \hat{K}$, risulta $xy = yx$ ($xy = -yx$), allora $j|_{\tilde{N}^2} = -i$ ($j|_{\tilde{N}^2} = i$).

Nelle situazioni in cui ci siamo posti possiamo trovare teoremi di commutatività o anticommutatività.

Teorema 7. In uno stem \tilde{N} risulta $\hat{S}^2 = \hat{K}^2 = 0$ se e solo se sussiste almeno una delle seguenti condizioni:

(1) \tilde{N} è commutativo e $j|_{\tilde{N}^2} = -i$;

(2) \tilde{N} è anticommutativo e $j|_{\tilde{N}^2} = i$.

Sia $\hat{S}^2 = \hat{K}^2 = 0$; allora $\hat{S} \cdot \hat{K} \neq 0$ ed inoltre, per $x \in \hat{S}$ ed $y \in \hat{K}$, $xy = yx$ oppure $xy = -yx$ (Oss. 8).

Sia $xy = yx$; poichè $2\tilde{N} \subseteq \hat{S} + \hat{K}$, possiamo scrivere, per $z, t \in \tilde{N}$, $2z \cdot 2t = 4zt = z_1t_2 + z_2t_1 = t_2z_1 + t_1z_2 = 4tz$ (per $z_1, t_1 \in \hat{S}$ e $z_2, t_2 \in \hat{K}$) e dunque \tilde{N} è commutativo. Per la Oss. 10, punto (3), risulta $j|_{\tilde{N}^2} = -i$: siamo nel caso (1).

Se supponiamo sia $xy = -yx$, si perviene, ragionando come sopra, al caso (2). L'inverso è analogo.

Teorema 8. *Se in uno stem \tilde{N} è $\hat{S} \cdot \hat{K} = 0$, allora \tilde{N} è commutativo o anticommutativo.*

Osserviamo intanto che è $\hat{S}^2 \neq 0$ oppure $\hat{K}^2 \neq 0$ perchè altrimenti \tilde{N} sarebbe uno zero-stem contro il supposto.

Sia $\hat{S}^2 = \hat{K}^2 = \tilde{N}^2$; visto che, Oss. 8, \hat{S} e \hat{K} sono commutativi o anticommutativi, dal fatto che $2\tilde{N} \subseteq \hat{S} + \hat{K}$ segue che \tilde{N} è commutativo se \hat{S} e \hat{K} lo sono, anticommutativo se \hat{S} e \hat{K} lo sono. Sia infine \hat{S} commutativo e \hat{K} anticommutativo: per la Oss. 10, risulta $j|_{\tilde{N}^2} = i$ e $j|_{\tilde{N}^2} = -i$, dunque, per $x, y \in \tilde{N}$, $xy = -xy$ onde $2\tilde{N}^2 = 0$, il che ora è escluso. L'altro caso è analogo.

Se poi $\hat{S}^2 = 0$ e $\hat{K}^2 \neq 0$, allora \tilde{N} è commutativo o anticommutativo, a seconda che tale sia \hat{K} . Il resto è ovvio.

Teorema 9. *Se in uno stem \tilde{N} è $\hat{S} = A(\tilde{N})$ o $\hat{K} = A(\tilde{N})$, allora \tilde{N} è commutativo o anticommutativo. Lo stesso si ha anche per $p = 2$.*

Sia infatti $\hat{K} = A(\tilde{N})$; possiamo allora applicare il corollario 1 di [4] ed esiste dunque una funzione $\varphi: \tilde{N} \rightarrow {}_0K(\tilde{N})$ tale che $\varphi(x) = -x + j(x)$, per $x \in \tilde{N}$. Sia $j|_{\tilde{N}^2} = i$; allora $\varphi(xy) = 0$; per la (3) del corollario 1 di [4], risulta $xy = yx$, $x, y \in \tilde{N}$ ed \tilde{N} risulta commutativo. Sia $j|_{\tilde{N}^2} = -i$; sempre applicando il cor. 1 di [4], si ha che \tilde{N} è anticommutativo.

Nel caso $\hat{S} = A(\tilde{N})$ si ragiona come sopra applicando però il corollario 2 di [4].

Se infine $p = 2$, dai corollari 1 e 2 di [4], segue subito che \tilde{N} è commutativo e anticommutativo.

Nel caso che lo stem sia un anello si ha il

Teorema 10. *Un anello N con N^2 semplice possiede una involuzione j tale che $j|_{N^2} = i$ se e solo se esiste un omomorfismo additivo φ da N ad $A \subseteq N$ tale che*

- (1) $\varphi(x) = -2x$ se e solo se $x \in A$,
- (2) $\varphi(xy) = 0$, $\forall x, y \in N$,
- (3) $xy - yx = y\varphi(x) + \varphi(y)x + \varphi(y)\varphi(x)$.

Allora una involuzione su N è data dalla $j(x) = x + \varphi(x)$, $\forall x \in N$, inoltre $A = K(N)$ ed N^2 è un campo oppure N è un anello a cubo nullo.

Sia j una involuzione su N tale che $j|_{N^2} = i$: la prima parte del teorema è conseguenza del teorema 2 di [4]. Sia poi $x \in N^2$, allora $\varphi(x) = 0$: dunque N^2 è commutativo, per la (3); essendo semplice è un campo o uno zero-anello. Nel secondo caso risulta $N^4 = 0$ e dunque $N^3 \subseteq A(N) \cap N^2$; d'altra parte N^2 è un anello semplice e pertanto risulta $N^3 = 0$ oppure $N^3 = N^2$: si ha $N^3 = 0$.

Teorema 11. *Un anello N con N^2 semplice possiede una involuzione j tale che $j|_{N^2} = -i$ se e solo se esiste un omomorfismo additivo $\bar{\varphi}$ da N a $B \subseteq N$ tale che*

$$(1) \bar{\varphi}(x) = 2x \text{ se e solo se } x \in B,$$

$$(2) \bar{\varphi}(xy) = 0, \forall x, y \in N,$$

$$(3) xy + yx = y\bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}(y)x - \bar{\varphi}(y)\bar{\varphi}(x), \forall x, y \in N.$$

Allora una involuzione su N è data dalla $j(x) = -x + \bar{\varphi}(x)$; inoltre $B = S(N)$ ed N^2 è un campo di caratteristica due oppure N è un anello a cubo nullo.

La prima parte del teorema è conseguenza del teorema 3 di [4]. Inoltre poichè, per $x \in N^2$, $\bar{\varphi}(x) = 0$, allora la (3) implica che N^2 è anticommutativo; essendo semplice risulta (teorema 6 di [5]) un campo di caratteristica due oppure $N^4 = 0$. Nel secondo caso risulta addirittura $N^3 = 0$.

6 - Estensioni di involuzioni

Le considerazioni relative al secondo caso del Teorema 1 fanno sentire l'esigenza di trovare tecniche per estendere ad uno stem involuzioni definite su un suo quoziente.

Incominciamo ad illustrare l'idea con un caso particolare. Il caso più semplice si presenta per le somme dirette $N = I \oplus J$; le involuzioni su N sono in questo caso tutte e sole quelle costruite come nel Teorema 3. Possiamo tuttavia procedere in altro modo: siano j' una involuzione su $N' = N/I$ e j^* una involuzione su I ; visto che ora $I \cap J = 0$, se $[x] \in N'$, $[x] \cap J$ è un singleton (teorema 4 di [2]₄); la corrispondenza $f: N' \rightarrow N$ definita dalla $f([x]) = [x] \cap J$ è tale che $f(I) = 0$, $f([x]) \in [x]$ ed inoltre $f([x][y]) = f([x])f([y])$. Se $y \in N$, allora esiste $[z] \in N'$ tale che $y \in [z]$ e dunque possiamo porre $y = f([z]) + i$ (i opportuno in I): consideriamo la funzione $j: N \rightarrow N$ definita dalla $j(y) = f(j'([z])) + j^*(i)$. Con un calcolo diretto si vede che j risulta una involuzione su N che induce la j' su N' e la j^* su I .

Teorema 12. *Sia N uno stem con $A(N) \cap N^2 = 0$, N^2 privo di torsione due e $2N' = 2(N/A(N)) = N'$; esiste una involuzione j su N tale che $\langle \hat{S} \rangle = N$ e $2K_j(A(N)) = K_j(A(N))$ se e solo se N' è un anello con involuzione j' tale che $\langle S(N') \rangle = N'$ ed esistono una funzione $f: N' \rightarrow N$ tale che $f([x]) \in [x]$, $f(A(N)) = 0$, $f([xy]) = f([x])f([y])$ ed una involuzione j^* su $A(N)$ con $2K_{j^*}(A(N)) = K_{j^*}(A(N))$*

è, per $[x], [y] \in N'$ e $a \in A(N)$, tale che

$$j^*(-f([x+y]) + f([x]) + f([y])) = -f(j'([x+y])) + f(j'([x])) + f(j'([y]));$$

$$j^*(-f([x]) + a + f([x])) = -f(j'([x])) + j^*(a) + f(j'([x])).$$

Per dimostrare la parte diretta del teorema, osserviamo che dalla $2N' = N'$ segue $N' = S(N') + K(N')$; inoltre ovviamente essendo N^2 privo di torsione due tale risulta anche N' e pertanto $S(N') \cap K(N') = 0$; ogni elemento di N' si scrive dunque in uno ed in un solo modo come somma di un elemento di $S(N')$ e di un elemento di $K(N')$. Per $[x] \in N'$, scriveremo

$$(3) \quad [x] = [y] + [z], \quad \text{con } [y] \in S(N'), \quad [z] \in K(N').$$

Mostriamo che $K(N') \subseteq N'^2$: infatti dalla $\langle \tilde{S} \rangle = N$ segue (Oss. 3) che $\langle S(N') \rangle = N'$ e dunque, per $[z] \in K(N')$, possiamo scrivere $[z] = [z_1] + [z_2]$ ove $[z_1] \in S(N')$ e $[z_2] \in N'^2$; allora $j'([z]) = j'([z_1]) + j'([z_2]) = [z_1] + j([z_2]) = -[z] = -[z_1] - [z_2]$. Ne segue che $2[z_1] \in N'^2$; visto che $2N'^2 = N'^2$ (perchè $2N' = N'$) allora $2[z_1] = 2[\bar{z}]$ (con $[\bar{z}] \in N'^2$) e dunque $2([z_1 - \bar{z}]) = 0$, onde $[z_1] \in N'^2$: è la tesi.

Poichè poi è $A(N) \cap N^2 = 0$, allora, per il teorema 4 di [2]₄, $[t] \cap N^2$ è un singoletto, se $[t] \in N'^2$.

Mostriamo che se $[y] \in S(N')$, allora $[y] \cap S(N) \neq \emptyset$. Sia $y' \in [y]$, allora $j(y') = y' + a$ ($a \in A(N)$) perchè $y' \in \tilde{S}$; inoltre (teorema 2 di [4]) esiste una funzione $\varphi: N \rightarrow K(N)$ tale che, per $x \in N$, $j(x) = \varphi(x) + x$ e che, se $\bar{x} \in K(N)$, $\varphi(\bar{x}) = -2\bar{x}$: visto che $2K_j(A(N)) = K_j(A(N))$ allora $\varphi|_{A(N)}$ è una suriezione. Consideriamo l'elemento $y'' = y' + a'$, ove $a' \in \varphi^{-1}(-a)$; risulta $y'' \in [y]$ ed inoltre $j(y'') = j(y') + j(a') = y' + a + \varphi(a') + a' = y' + a' = y''$ e dunque $y'' \in [y] \cap S(N)$; di qui la tesi.

Inoltre se $[y] \in S(N') \cap N'^2$, allora $[y] \cap N^2 \in S(N)$: infatti se è $\tilde{y} = [y] \cap N^2$ risulta $j(\tilde{y}) = \tilde{y} + a$ e $-\tilde{y} + j(\tilde{y}) \in N^2 \cap A(N) = 0$.

Consideriamo una funzione $\tilde{f}: S(N') \rightarrow \circ S(N)$ tale che se $[y] \in S(N')$

$$\tilde{f}([y]) = \begin{cases} 0 & \text{se } [y] = A(N) \\ [y] \cap N^2 & \text{se } [y] \in N'^2 \end{cases}$$

$$\tilde{f}([y]) \in [y] \cap S(N) \text{ altrimenti.}$$

Utilizzando la (3) e la \tilde{f} possiamo considerare la seguente funzione $f: N' \rightarrow N$:
 $f([x]) = \tilde{f}([y]) + [z] \cap N^2$.

Mostriamo che risulta $f(j'([x])) = j(f([x]))$: infatti

$$\begin{aligned} f(j'([x])) &= f(j'([y] + [z])) = f([y] + [j(z)]) = \bar{f}([y]) + [j(z)] \cap N^2 \\ &= j(\bar{f}([y])) + j([z] \cap N^2) = j(f([x])). \end{aligned}$$

Se, d'altra parte, $[x] \in N'^2$, risulta $f([x]) = [x] \cap N^2$: infatti $[x] = [y] + [z]$ ove ora $[y] \in S(N'^2)$ e $[z] \in K(N')$; dunque $[x] \cap N^2 = ([y] + [z]) \cap N^2 = [y + z] \cap N^2 = ([y] \cap N^2) + ([z] \cap N^2)$ e $f([x]) = \bar{f}([y]) + [z] \cap N^2 = ([y] \cap N^2) + ([z] \cap N^2)$ di qui l'asserto. È poi ovvio che $f(A(N)) = 0$ e che $f([x]) \in [x]$; inoltre $f([x][x']) = f([xx']) = [xx'] \cap N^2$; d'altra parte $f([x]) \cdot f([x']) \in [xx'] \cap N^2 = f([xx'])$ da cui segue la $f([xx']) = f([x])f([x'])$. Basta ora porre $j^* = j|_{A(N)}$: il resto è ovvio.

Sia viceversa N' un anello con involuzione j' tale che $K(N') \subseteq N'^2$ ed esistono una funzione $f: N' \rightarrow N$ ed una involuzione j^* su $A(N)$ soddisfacenti alle condizioni del teorema. Allora N è distributivo (perchè N' è un anello, teorema 4 di [2]₄) ed inoltre per $x \in N$ esiste un laterale $[t] \in N'$ tale che $x \in [t]$, allora $x = f([t]) + a$ ($a \in A(N)$).

Consideriamo la funzione $j: N \rightarrow N$ definita dalla $j(x) = f(j'([t])) + j^*(a)$: risulta $j(j(x)) = j(f(j'([t])) + j^*(a)) = f(j'^2([t])) + j^{*2}(a) = f([t]) + a = x$ e dunque $j^2 = i$. Siano $x \in [t]$ e $x' \in [t']$; possiamo scrivere, per a, a' opportuni in $A(N)$, $x = f([t]) + a$ ed $x' = f([t']) + a'$; risulta $x + x' \in [t + t']$ e pertanto $x + x' = f([t + t']) + (-f([t + t']) + f([t]) + a + f([t']) + a')$. Pertanto

$$\begin{aligned} j(x + x') &= f(j'([t + t'])) + j^*(-f([t + t']) + f([t]) + f([t'])) \\ &\quad + (-f([t']) + a + f([t']) + a'); \end{aligned}$$

sfruttando le proprietà della j^* si ha subito $j(x + x') = j(x) + j(x')$. Inoltre $x \cdot x' = f([t])f([t']) = f([tt'])$ e questo basta per concludere che $j(xx') = j(x')j(x)$. È del resto immediato provare che $j^* = j|_{A(N)}$ e che, essendo $2K_{j^*}(A(N)) = K_{j^*}(A(N))$, risulta $2K_j(A(N)) = K_j(A(N))$.

Infine dalla $\langle S(N') \rangle = N'$ segue, per la Oss. 3, la $\langle \bar{S} \rangle = N$ e questo completa la dimostrazione.

Bibliografia

- [1] M. P. DRAZIN, *Natural structures on semigroups with involution*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978).
- [2] C. FERRERO COTTI: [\bullet]₁ *Sugli stems in cui la corrispondenza $xy \rightarrow yx$ è una funzione*, Rend. Accad. Sci. Nat. Napoli **44** (1977), 265-277; [\bullet]₂ *Sugli stems il cui semigruppone moltiplicativo possiede un ideale con proprietà commutative deboli*, Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino **36** (1977-78), 261-269; [\bullet]₃ *Quozienti di stems rispetto a particolari annullatori*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 349-357; [\bullet]₄ *Sugli stems il cui quadrato possiede una involuzione*, Rend. Accad. Sci. Mat. Napoli (1979).
- [3] C. FERRERO COTTI e S. MANARA PELLEGRINI, *Sugli anelli i cui quozienti propri sono nilpotenti*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15-B** (1978), 754-760.
- [4] C. FERRERO COTTI e A. MODENA SUPPA, *Sugli stems con involuzione*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **7** (1981).
- [5] C. FERRERO COTTI e G. B. RIZZA, *Anelli anticommutativi*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **104** (1972-73).
- [6] I. N. HERSTEIN, *Rings with involution*, Chicago Lectures in Math. Univ. of Chicago Press, Chicago 1976.
- [7] G. PILZ, *Near-rings*, North-Holland, N. Y. 1977.
- [8] K. K. SHRIVASTAVA, *Near-rings whose generator is a Lie ideal*, Studia Sci. Math. Hung. **10** (1975), 273-276.
- [9] H. WEINERT: [\bullet]₁ *Ringhe mit nichtkommutativer addition I*, Jber. Deutsch. Math.-Verein **77**, H1 (1975), 10-27; [\bullet]₂ *Ringhe mit nichtkommutativer addition II*, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae **26** (3-4) (1975), 295-310.

S u m m a r y

We study some questions on existence and action of involution on a near-ring N , particularly in cases with $A(N) \cap N^2 = 0$ and in cases in which N^2 is simple.

For this study we introduce a « semidirect sum » for near-rings and a classification of the distributive near-ring with $A(N) \cap N^2 = 0$ whose square is simple.

The results related to these questions can be of independent interest.

If the studied near-rings are rings, our results seems be new too.

* * *