Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 117-126

C. FERRERO COTTI e A. MODENA SUPPA (*)

Sugli stems con involuzione (**)

Introduzione

Tenendo presente che il quadrato di uno stem distributivo è un anello, nei lavori $[\mathbf{1}]_{1,2}$ sono state studiate classi di stems contenenti un anello con involuzione: precisamente gli stems il cui quadrato possiede una involuzione. Anche in vista delle notevoli applicazioni in vari campi, dalla analisi funzionale alla geometria differenziale, che gli stems con involuzione sembrano avere (cfr. [**3**], [**4**] e le relative bibliografie), passiamo qui a tale tipo di studio; vale la pena di segnalare che i risultati più notevoli sugli anelli con involuzione sembrano essere ottenuti quando l'anello è primo, semi-primo, semplice o almeno ha unità. Uno stem con involuzione tuttavia risulta distributivo ed è dunque un anello tutte le volte che il suo annullatore è nullo, di modo che le tecniche quasi-anellistiche analoghe a quelle utilizzate per gli anelli con involuzione non portano a nulla di nuovo.

Pertanto lo studio degli stems con involuzione deve procedere in altra direzione; i risultati da noi ottenuti sembrano perciò essere nuovi anche nei casi particolari in cui gli stems via via trattati siano anelli.

Se N è uno stem con involuzione j, allora $N' = N/A(N)$ è un anello con una involuzione j' (ove $j'([x]) = [j(x)]$, per $[x] \in N'$).

Sia $S(N')$ l'insieme degli elementi simmetrici di N' (tali cioè che $j'([x]) = [x]$) e $K(N')$ quello degli elementi emisimmetrici di N' (tali cioè che $j'([x]) = -[x]$) e sia π l'epimorfismo canonico da N su N': possiamo considerare gli insiemi $\hat{S} = \pi^{-1}(S(N'))$ e $\hat{K} = \pi^{-1}(K(N'))$ degli elementi quasi-simmetrici e quasi-emisimmetrici di N. Qui mostriamo, fra l'altro, che gli annullatori $A(\hat{S})$ e $A(\hat{K})$ sono ideali tenuti fermi da j.

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 12-VII-1979.

Le involuzioni che è possibile definire su uno stem sono costruite con i Teoremi 2 e 3 del presente lavoro.

Nei Corollari 2 e 3 si collega l'esistenza di involuzioni su un anello N con l'esistenza di omomorfismi di Jordan o di Lie (cfr. [**4**] e [**5**] rispettivamente): in particolare si ha che se N è un anello e se $K(N) \subseteq A(N)$ allora le involuzioni su N sono tutte e sole le funzioni j tali che $j(x) = x + \varphi(x)$, ove φ è un omomorfismo di Jordan di N in $K(N)$ tale che $\varphi(x) = -2x$ per $x \in K(N)$.

Quando è $\hat{S} \subseteq A(N)$ si hanno invece omomorfismi di Lie $\bar{\varphi}$; quando valgono entrambe le ipotesi aggiuntive è $\bar{\varphi}(x) = 2x + \varphi(x)$, $\forall x \in N$.

Rimane aperta la possibilità di estendere o adattare questi risultati al caso degli stems che non sono anelli: si tratterà di generalizzare l'idea di omomorfismo di Lie o di Jordan sostituendo con la (1) dei Teoremi 2, 3 la condizione di conservazione della somma.

Il lavoro si conclude (n. **4**) con lo studio di casi in cui $A(\hat{S})$ ed $A(\hat{K})$ sono ideali massimali: allora lo stem risulta uno J^*-stem (cioè la corrispondenza $xy \to yx$ è una involuzione di N^2): come tali possono essere costruiti a norma dei Teoremi 9 e 10 di [**1**]$_1$.

Forniamo inoltre decomposizioni notevoli di questi stems.

1 - Generalità

Sia N uno stem sinistro: chiamiamo *involuzione* su N ogni automorfismo j di ordine due di N^+ tale che $j(xy) = j(y)j(x)$, $\forall x, y \in N$.

Se $M \subseteq N$, indichiamo con $\langle M \rangle$ il sottostem di N generato da M e con M^n il sottogruppo di N^+ generato da $M^{(n)} = \{x_1 x_2 \dots x_n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in M\}$; indichiamo invece con N^k il sottostem generato da $N^{(k)} = \{x_1 x_2 \dots x_k \mid x_1, x_2, \dots, x_k \in N\}$. Poniamo $A(M) = \{x \in N \mid xy = yx = 0,\ \forall y \in M\}$.

Uno stem con involuzione è ovviamente *distributivo*; inoltre $j(N^2) = N^2$ e $j(A(N)) = A(N)$; ne seguono i seguenti fatti

(1) $A(N)$ è un ideale di N;

(2) se $A(N) = 0$, allora N è un anello;

(3) N^2 è un anello una cui involuzione è la restrizione ad esso della j;

(4) $N' = N/A(N)$ è un anello con una involuzione j' definita dalla $j'([x]) = [j(x)]$, per $[x] \in N'$.

Questi verranno spesso utilizzati senza esplicito richiamo; indicheremo sempre con $[x]$ il laterale $x + A(N)$ e con $j|_{N^2}$ la restrizione di j ad N^2.

Come per gli anelli, se N è uno stem con involuzione j, indicheremo, secondo [**3**], con $S(N) = \{x \in N \mid j(x) = x\}$ l'insieme degli elementi *simmetrici* di N e con $K(N) = \{x \in N \mid j(x) = -x\}$ l'insieme degli elementi *emisimmetrici* di N; poniamo inoltre $\hat{S} = \pi^{-1}(S(N'))$ e $\hat{K} = \pi^{-1}(K(N'))$, ove π è l'epimorfismo canonico $N \to N' = N/A(N)$: si tratta dell'insieme degli elementi che diremo *quasi-simmetrici* (infatti se $A(N) = 0$ allora $\hat{S} = S(N)$) e dell'insieme degli elementi che diremo *quasi-emisimmetrici* (infatti se $A(N) = 0$ allora $\hat{K} = K(N)$). Utilizzeremo spesso anche l'insieme $T = \{x + j(x) \mid x \in N\}$ delle tracce di j e l'insieme $T_0 = \{-x + j(x) \mid x \in N\}$.

2 - Proprietà degli insiemi $\hat{S}$ e $\hat{K}$

Sono particolarmente importanti per il seguito le proprietà raccolte nella osservazione seguente: verranno spesso applicate senza esplicito richiamo.

Osservazione 1. *Sia N uno stem con involuzione j e sia $N' = N/A(N)$; valgono i seguenti fatti*:

(1) $x \in \hat{S}$ $(x \in \hat{K})$ *se e solo se* $-x + j(x) \in A(N)$ $(x + j(x) \in A(N))$;
(2) $S(N) \subseteq \hat{S}$ *e* $K(N) \subseteq \hat{K}$;
(3) $T \subseteq \hat{S}$ *e* $T_0 \subseteq \hat{K}$;
(4) $j(\hat{S}) = \hat{S}$ *e* $j(\hat{K}) = \hat{K}$;
(5) $\hat{S}$ *e* $\hat{K}$ *sono sottogruppi normali di* N^+ *che contengono* $A(N)$.

La dimostrazione può essere lasciata al lettore; a titolo esemplificativo, per il punto (3), si osservi che se $z \in T$, allora esiste un $x \in N$ tale che $z = x + j(x)$; si ha $-z + j(z) = -j(x) - x + j(x + j(x)) = -j(x) - x + j(x) + x$. Ne segue che $-z + j(z)$ appartiene al derivato di N^+ che è, ovviamente, contenuto in $A(N)$: dunque $z \in \hat{S}$.

Per dimostrare che $A(\hat{S})$ e $A(\hat{K})$ sono ideali di N è necessario il

Lemma 1. *Se N è uno stem con involuzione j, allora*

(1) *per* $x \in \langle\hat{S}\rangle$ *ed* $n \in N$ *risulta* $xn - nx \in \langle\hat{S}\rangle$,
(2) *per* $x \in \hat{K}$ *ed* $n \in N$ *risulta* $xn + nx \in \langle\hat{K}\rangle$.

(1) Cominciamo infatti ad osservare che, per $x \in \hat{S}$ ed $n \in N$, risulta $xn - nx = (xn + j(n)x) - (n + j(n))x$, ove $xn + j(n)x$ ed $n + j(n)$ appartengono ad $\hat{S}$, come subito si verifica. Dunque $xn - nx \in \langle\hat{S}\rangle$.

Osserviamo ora che $x \in \langle\hat{S}\rangle$ solo se, posto $\hat{S}^1 = \hat{S}$, risulta $x = \sum_1^n {}_i\, \alpha_i y^i$, ove $y^i \in \hat{S}^i$ (si ricordi anche che $\hat{S}$ è un sottogruppo normale di N^+) ed α_i è intero relativo; pertanto per verificare l'asserto basterà mostrare che se $x \in \hat{S}^j$ (per qualche $j \in \mathbf{N}$), allora $xn - nx \in \langle\hat{S}\rangle$.

Possiamo all'uopo *ragionare per induzione sull'intero* j: l'asserto vale per

$j = 1$ per quanto sopra visto. Sia z il generico generatore di $\hat{S}^j$ e y il generico elemento di $\hat{S}$: allora zy è il generico generatore di $\hat{S}^{j+1}$: si supponga che, per $n \in N$, $zn - nz \in \langle \hat{S} \rangle$ $(z \in \hat{S}^j)$; risulta inoltre $yn - ny \in \langle \hat{S} \rangle$. Si hanno dunque subito le relazioni $zny - nzy \in \langle \hat{S} \rangle$ e $zyn - zny \in \langle \hat{S} \rangle$, da cui, sommando, si trae $zyn - nzy \in \langle \hat{S} \rangle$. Per quanto sopra osservato su zy, risulta $xn - nx \in \langle \hat{S} \rangle$, $\forall x \in \hat{S}^{j+1}$ e dunque l'asserto vale, per induzione, per ogni j.

(2) Se $x \in \hat{K}$ allora $xn + nx = (xn + j(n)x) + (n - j(n))x$ ove $xn + j(n)x$ ed $n - j(n)$ appartengono a $\hat{K}$, come subito si verifica: ne segue l'asserto.

Teorema 1. *Sia N uno stem con involuzione j; allora $A(\hat{S})$ e $A(\hat{K})$ sono ideali di N tenuti fermi da j.*

Intanto è ovvio che $A(\hat{S})$ e $A(\hat{K})$ sono sottogruppi normali di N^+. Inoltre per $x \in A(\hat{S})$, $n \in N$ ed $y \in \hat{S}$ riesce $(nx)y = 0$ onde $NA(\hat{S}) \subseteq A(\hat{S})$; infine, Lemma 1, punto (1), è $ny - yn \in \langle \hat{S} \rangle$ e dunque $xny - xyn = 0$; ne segue $xny = 0$ (perchè $xyn = 0$) e perciò $A(\hat{S})N \subseteq A(\hat{S})$. Per $A(\hat{K})$ si ragiona in modo analogo ricordando il Lemma 1, punto (2).

Infine per $x \in A(\hat{S})$ ed $y \in \hat{S}$ è $j(y)j(x) = j(x)j(y) = 0$ e cioè (si ricordi che $j(y) = y + a$, a opportuno in $A(N)$) $yj(x) = j(x)y = 0$; ne segue che $j(A(\hat{S})) \subseteq A(\hat{S})$. Poichè j ha ordine due, vale l'inclusione opposta. Per $A(\hat{K})$ si procede allo stesso modo.

Si osservi infine che se N è uno stem con involuzione j e se $x \in N$, allora $2x = (x + j(x)) + (-j(x) + x)$ ove $x + j(x) \in \hat{S}$ e $-j(x) + x \in K(N)$: dunque, se $2N = \{2x \mid x \in N\}$, risulta $2N \subseteq \hat{S} + K(N)$.

Se pertanto $2N = N$ risulta $N = \hat{S} + K(N)$: in particolare se N è un anello con involuzione allora $N = S(N) + K(N)$. Anche questi fatti verranno spesso utilizzati senza esplicito richiamo.

3 - Involuzioni ed omomorfismi di Jordan e di Lie

Incominciamo ad individuare le involuzioni che può avere uno stem. Ovviamente possiamo limitarci al caso distributivo.

Teorema 2. *Uno stem distributivo N possiede una involuzione j con $A = K(N)$ se e solo se esiste una funzione φ da N ad A tale che*

(1) $\varphi(x + y) = -y + \varphi(x) + y + \varphi(y)$,

(2) $\varphi(x) = -2x$ *se e solo se* $x \in A$,

(3) $\varphi(xy) = -xy + yx + y\varphi(x) + \varphi(y)x + \varphi(y)\varphi(x)$.

Le involuzioni su N sono tutte e sole le funzioni j definite dalla $j(x) = x + \varphi(x)$, per φ soddisfacente le (1), (2), (3).

Se j è una involuzione su N allora, per $x \in N$, $-x + j(x) \in K(N)$; possiamo pertanto considerare la funzione φ da N a $K(N)$ definita dalla $\varphi(x) = -x + j(x)$. È ovvio che se $x \in K(N)$ allora $\varphi(x) = -2x$; d'altra parte se $\varphi(x) = -2x$ allora $j(x) = -x$ ed $x \in K(N)$: è la (2).

La (1) e la (3) si provano con un calcolo diretto.

Siano viceversa N uno stem distributivo e φ una funzione da N ad un sottoinsieme A di N soddisfacente le (1), (2), (3).

Per mostrare che la funzione j da N ad N definita dalla $j(x) = x + \varphi(x)$ è una involuzione su N basta osservare che $j(j(x)) = j(x + \varphi(x)) = x + \varphi(x) + \varphi(x + \varphi(x)) = x + \varphi(x) - \varphi(x) + \varphi(x) + \varphi(x) + \varphi(\varphi(x)) = x + 2\varphi(x) - 2\varphi(x) = x$; $j(x+y) = x + y + \varphi(x+y) = x + \varphi(x) + y + \varphi(y) = j(x) + j(y)$; $j(xy) = xy + \varphi(xy) = j(y)j(x)$.

È poi ovvio che allora $A = K(N)$.

Teorema 3. *Uno stem distributivo N possiede una involuzione j con $B = \hat{S}$ se e solo se esiste una funzione $\bar{\varphi}$ da N a B tale che*

(1) $\bar{\varphi}(x + y) = x + y - x + \bar{\varphi}(x) - y + \bar{\varphi}(y)$,

(2) $-2x + \bar{\varphi}(x) \in A(N)$ *se e solo se* $x \in B$,

(3) $\bar{\varphi}(xy) = xy + yx - y\bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(y)x + \bar{\varphi}(y)\bar{\varphi}(x)$.

Le involuzioni su N sono tutte e sole le funzioni j definite dalla $j(x) = -x + \bar{\varphi}(x)$ per $\bar{\varphi}$ soddisfacente le (1), (2), (3).

La dimostrazione è analoga a quella del precedente Teorema 2.

Ricordiamo che in [**1**]$_1$ abbiamo chiamato *J^*-stem* uno stem N in cui la corrispondenza $xy \to yx$ è una involuzione di N^2.

In [**4**]$_1$ Jacobson e Rickart chiamano *omomorfismo di Jordan* di un anello R in un anello R' una funzione $f: R \to R'$ tale che $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(x^2) = (f(x))^2$ ed $f(xyx) = f(x)f(y)f(x)$, $\forall x, y \in R$.

Tali omomorfismi sono legati alle nostre involuzioni dal

Corollario 1. *Uno stem distributivo N possiede una involuzione j tale che gli elementi emisimmetrici rispetto ad essa sono annullatori se e solo se esiste una funzione φ da N ad $\bar{A} \subseteq A(N)$ che soddisfi, oltre alle* (1) *e* (2) *del Teorema* 2, *alla* (3) $\varphi(xy) = -xy + yx$. *Inoltre N è uno J^*-stem; se N è un anello φ è un omomorfismo di Jordan la cui immagine è uno zero-anello.*

La prima parte del Corollario è una conseguenza immediata del Teorema 2. Lo stem N risulta uno J^*-stem perchè, per $x, y \in N$, $j(xy) = xy + \varphi(xy) = xy - yx + yx = yx$ e dunque la $xy \to yx$ coincide con la $j|_{N^2}$.

Sia N un anello: allora la (1) del Teorema 2 dice che φ è un omomorfismo additivo, inoltre $\varphi(x^2) = -x^2 + x^2 = 0 = (\varphi(x))^2$ (perchè $\varphi(x) \in A(N)$).

Inoltre ora N è uno J^*-anello e perciò (th. 1 di [**1**]$_1$), $N^2 \subseteq Z(N)$; dunque $\varphi(xyx) = -xyx + x^2y = -x^2y + x^2y = 0 = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)$: si conclude che φ è un omomorfismo di Jordan.

Ora $\varphi(N) = \bar{A}$ risulta uno zero-anello perchè $\bar{A}^2 = 0$ ed inoltre $\bar{A}$ risulta un sottoanello di N.

In [**5**] si chiama *omomorfismo di Lie* di un anello R in un anello R' una funzione $f: R \to R'$ tale che $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ed $f(xy - yx) = f(x)f(y) - f(y)f(x)$.

Un risultato analogo al precedente è fornito dal

Corollario 2. *Uno stem distributivo N possiede una involuzione j tale che gli elementi quasi simmetrici rispetto ad essa sono annullatori se e solo se esiste una funzione $\bar{\varphi}$ da N a $\bar{B} \subseteq A(N)$ che soddisfi, oltre alle* (1) *e* (2) *del Teorema* 3, *alla* (3) $\bar{\varphi}(xy) = xy + yx$.

Inoltre N è uno J^*-stem; se N è un anello allora $\bar{\varphi}$ è un omomorfismo di Lie la cui immagine è uno zero-anello.

La prima parte del Corollario è conseguenza immediata del Teorema 3. Inoltre, per $x, y \in N$, $j(xy) = -xy + xy + yx = yx$ e perciò N è uno J^*-stem.

Sia N un anello: allora φ è un omomorfismo additivo per la (1) del Teorema 3. Inoltre $\bar{\varphi}(xy - yx) = \bar{\varphi}(xy) - \bar{\varphi}(yx) = xy + yx - (yx + xy) = 0 = \bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}(y) - \bar{\varphi}(y)\bar{\varphi}(x)$: dunque $\bar{\varphi}$ è un omomorfismo di Lie.

4 - Caso in cui $A(\hat{S})$ e $A(\hat{K})$ sono massimali

Per ora supporremo che gli ideali $A(\hat{S})$ e $A(\hat{K})$ non coincidano con $A(N)$: il caso $A(N)$ massimale dà luogo a situazioni che verranno affrontate altrove. Considereremo il caso $A(\hat{S})$ massimale; se è $A(\hat{K})$ massimale le cose vanno in modo sostanzialmente analogo.

In quanto segue, per evitare ripetizioni, appesantiamo spesso le ipotesi per escludere casi che vengono trattati poco oltre.

Lemma 2. *Sia N uno stem con involuzione j; se N^2 è privo di torsione due, allora $\hat{S} \cap \hat{K} = A(N) = A(\hat{S}) \cap A(\hat{K})$.*

Infatti $A(N) \subseteq \hat{S} \cap \hat{K}$ (Oss. 1) ed inoltre se $x \in \hat{S} \cap \hat{K}$ allora $-x + j(x) \in A(N)$ ed $x + j(x) \in A(N)$. Ne segue $-x + j(x) - j(x) - x = -2x \in A(N)$ e si ha, per $y \in N$, $2xy = 0 = 2yx$. Dunque $xy = yx = 0$ (perchè N^2 è privo di torsione due) ed $x \in A(N)$.

Risulta anche ovviamente $A(N) \subseteq A(\hat{S}) \cap A(\hat{K})$; sia $x \in A(\hat{S}) \cap A(\hat{K})$; per la Oss. 1 risulta $x(y + j(y)) = 0$ e $x(y - j(y)) = 0$, $\forall y \in N$; dunque $2xy = 0$. Analogamente si mostra che è $2yx = 0$. Di qui $xy = yx = 0$ ed $x \in A(N)$.

Teorema 4. *Sia N uno stem con involuzione j, e sia $A(\hat{S}) \neq A(N)$ e $A(\hat{K}) \neq A(N)$ con N^2 privo di torsione due. Sia $\bar{N} = N/A(\hat{S})$ semplice non nilpotente: allora N risulta uno J^*-stem, $N = \hat{S} + \hat{K}$ e $\hat{S}$, $\hat{K}$ sono ideali tali che $\hat{S} \cdot \hat{K} = \hat{K} \cdot \hat{S} = 0$.*

Osserviamo subito che $A(\hat{K}) \not\subseteq A(\hat{S})$ perchè altrimenti risulterebbe $A(\hat{S}) = A(N)$ (Lemma 2), il che è escluso per ipotesi: dalla massimalità di $A(\hat{S})$ segue perciò $N = A(\hat{S}) + A(\hat{K})$. Per $n \in N$ esistono $a \in A(\hat{S})$ e $b \in A(\hat{K})$ tali che $n = a + b$ e per $y \in \hat{K}$ risulta $ny = ay \in A(\hat{S})$ (perchè $A(\hat{S})$ è un ideale) e pertanto $N \cdot \hat{K} \subseteq A(\hat{S})$. Sia $[x] \in \bar{N} = N/A(\hat{S})$ ed $y \in \hat{K}$; per quanto precede risulta $[x] \cdot [y] = A(\hat{S})$ e pertanto $[y] \in A(\bar{N})$ visto che è anche $[y] \cdot [x] = A(\hat{S})$ perchè $\hat{K} \cdot N \subseteq A(\hat{S})$. Ma $\bar{N}$ è semplice non nilpotente e dunque $A(\bar{N}) = A(\hat{S})$ ed $[y] \in A(\hat{S})$, per ogni $y \in \hat{K}$: ne segue che $\hat{K} \subseteq A(\hat{S})$ e che dunque $\hat{S} \cdot \hat{K} = \hat{K} \cdot \hat{S} = 0$; inoltre $\hat{S} \subseteq A(\hat{K})$.

Consideriamo l'anello $\bar{N} = N/A(\hat{S}) = (A(\hat{S}) + A(\hat{K}))/A(\hat{S})$; visto che (Lemma 2) $A(\hat{S}) \cap A(\hat{K}) = A(N)$, si ha che $\bar{N}$ è isomorfo ad $\bar{N}' = A(\hat{K})/A(N)$, e perciò non è nilpotente. D'altra parte $\bar{N}'$ è privo di torsione due: sia infatti per $z \in A(\hat{K})$, $2 \cdot [z] \in A(N)$, allora riesce $2z \in A(N)$; di qui $2zt = 0 = 2tz$ $(\forall t \in N)$: dunque $z \in A(N)$ perchè N^2 è privo di torsione due.

L'anello $\bar{N}'$ ha involuzione $\bar{j}'$, indotta da j, definita dalla $\bar{j}'([x]) = [j(x)]$; visto che $2\bar{N}' = \bar{N}'$ risulta $\bar{N}' = S(\bar{N}') + K(\bar{N}')$: sia $[w] \in \bar{N}'$ tale che $\bar{j}'([w]) = -[w]$: allora $w + j(w) \in A(N)$ e dunque $w \in \hat{K} \subseteq A(\hat{S})$. D'altra parte se $[w] \in \bar{N}'$ allora $w \in A(\hat{K})$ e dunque $w \in A(\hat{S}) \cap A(\hat{K}) = A(N)$: ne segue che $K(\bar{N}') = A(N)$ e perciò riesce $\bar{N}' = S(\bar{N}')$. Per $x \in A(\hat{K})$ è $[j(x)] = [x]$ e perciò $-x + j(x) \in A(N)$: dunque $x \in \hat{S}$ e $A(\hat{K}) \subseteq \hat{S}$: risulta $A(\hat{K}) = \hat{S}$.

Mostriamo che $A(\hat{S}) = \hat{K}$: infatti l'anello $\bar{N}'' = A(\hat{S})/A(N)$ è ovviamente privo di torsione due e l'involuzione $\bar{j}''$ indotta su $\bar{N}''$ da j è definita dalla $\bar{j}''([x]) = [j(x)]$ (per $[x] \in \bar{N}''$): in questo caso risulta $2\bar{N}'' \subseteq S(\bar{N}'') + K(\bar{N}'')$ ed inoltre risulta $S(\bar{N}'') = A(N)$ perchè se $v \in A(\hat{S})$ è tale che $\bar{j}''([v]) = [v]$, allora $-v + j(v) \in A(N)$ e dunque $v \in \hat{S} \subseteq A(\hat{K})$: si ha $v \in A(\hat{S}) \cap A(\hat{K}) = A(N)$ e $2\bar{N}'' \subseteq K(\bar{N}'')$. Sia $u \in A(\hat{S})$, per quanto precede si ha che $\bar{j}''(2[u]) = -2[u]$ e cioè $2[j(u)] + 2[u] = A(N)$. Essendo $\bar{N}''$ un anello si ha $2(j[(u)] + [u]) = A(N)$ ed essendo $\bar{N}''$ privo di torsione due, risulta $[j(u)] + [u] = A(N)$ e perciò $j(u) + u \in A(N)$: ne segue che $u \in \hat{K}$ e dunque $A(\hat{S}) \subseteq \hat{K}$. Risulta $A(\hat{S}) = \hat{K}$ perchè è già stato visto che $\hat{K} \subseteq A(\hat{S})$. Si conclude che $N = \hat{S} + \hat{K}$ ove $\hat{S}$ e $\hat{K}$ sono ideali di N (perchè coincidono con $A(\hat{K})$ ed $A(\hat{S})$ rispettivamente) il cui prodotto è nullo.

Per mostrare infine che N è uno J^*-stem basta verificare che $j|_{N^2}$ coin-

cide con la corrispondenza $xy \to yx$. Siano $x, y \in N$; esistono $a, a' \in \hat{S}$ e $b, b' \in \hat{K}$ tali che $x = a + b$ ed $y = a' + b'$: inoltre $xy = aa' + bb'$. Risulta
$j(xy) = j(aa' + bb') = j(aa') + j(bb') = j(a')j(a) + j(b')j(b) = a'a + b'b = yx$
e questo completa la dimostrazione.

Teorema 5. *Nelle ipotesi del Teorema* 4, *risulta* $N = \hat{K} + \hat{S}^2$ *ove* $\hat{S}^2$ *è un campo,* $j|_{\hat{S}^2} = i$ e $\hat{K} \cap \hat{S}^2 = 0$.

Infatti in tali condizioni N è uno J^*-stem con $\hat{K}$ ideale massimale (Teorema 4).

Dimostriamo che $Z(N) \neq 0$ *e che* $Z(N) \not\subseteq \hat{K}$. Infatti visto che N è uno J^*-stem, allora $N^2 \subseteq Z(N)$ (cfr. th. 1 di [**1**]$_1$) e se $Z(N) = 0$ allora risulta $N^2 = 0$, il che è ora escluso. Allo stesso modo risulta $Z(N) \not\subseteq \hat{K}$ perchè altrimenti $\bar{N} = N/\hat{K}$ sarebbe nilpotente contro il supposto.

Dal fatto che $N^2 \subseteq Z(N)$ segue anche che $Z(N)$ è un ideale e, per quanto precede, possiamo asserire che $N = \hat{K} + Z(N)$: dunque $\bar{N} = N/\hat{K}$ è isomorfo a $Z(N)/(\hat{K} \cap Z(N))$ che risulta semplice e commutativo: è un campo. Visto che $\hat{S}/A(N)$ è isomorfo a $\bar{N}$, anche esso risulta un campo ed $A(N)$ è massimale in $\hat{S}$ che è uno J^*-stem. Per il teorema 9 di [**1**]$_1$ risulta $\hat{S} = A(N) + \hat{S}^2$ ove $\hat{S}^2$ è un campo ed $A(N) \cap \hat{S}^2 = 0$; d'altra parte per $x, y \in \hat{S}$ risulta $xy \in \hat{S}$ e dunque $-xy + j(xy) \in A(N) \cap \hat{S}^2 = 0$. Risulta $j|_{\hat{S}^2} = i$.

Per il Teorema 4 inoltre si ha $N = \hat{K} + \hat{S}$ ove abbiamo appena visto che $\hat{S} = A(N) + \hat{S}^2$: dunque $N = \hat{K} + (A(N) + \hat{S}^2) = (\hat{K} + A(N)) + \hat{S}^2$.

Proviamo che $(\hat{K} + A(N)) \cap \hat{S}^2 = 0$: sia $x \in (\hat{K} + A(N)) \cap \hat{S}^2$; esistono $z \in \hat{K}$ e $t \in A(N)$ tali che $x = z + t$. Se $z + t \in \hat{S}^2$ allora $z + t \in \hat{S}$ (perchè $\hat{S}^2 \subseteq \hat{S}$): ne segue $z \in \hat{S}$ (infatti $A(N) \subseteq \hat{S}$): dunque $z \in \hat{K} \cap \hat{S} = A(N)$. Deve pertanto risultare $z + t \in \hat{S}^2 \cap A(N) = 0$ (Th. 4), da cui l'asserto.

Visto che inoltre $A(N) \subseteq \hat{K}$, possiamo concludere che $N = \hat{K} + \hat{S}^2$.

È appena il caso di accennare al fatto che se è $A(\hat{K})$ massimale (sempre con $A(\hat{K})$ e $A(\hat{S})$ diversi da $A(N)$) N risulta uno J^*-stem, $N = \hat{S} + \hat{K}^2$, con $\hat{S} \cap \hat{K}^2 = 0$, $\hat{K}^2$ campo e $j|_{\hat{K}^2} = -i$.

Teorema 6. *Sia* N *uno stem con involuzione* j, *sia* N^2 *privo di torsione due e siano* $A(\hat{S})$, $A(\hat{K})$ *diversi da* $A(N)$. *Se* $\bar{N}' = N/A(\hat{S})$ *ed* $\bar{N}'' = N/A(\hat{K})$ *sono zero-anelli semplici, risulta* $N^3 = 0$, $N = \hat{S} + \hat{K}$ *con* $\hat{S}^2 = \hat{K}^2 = 0$ *e* $j(xy) = -yx$ *oppure* $\hat{S} \cdot \hat{K} = \hat{K} \cdot \hat{S} = 0$; *inoltre* N *è uno* J^*-*stem.*

Poichè $A(\hat{S})$ e $A(\hat{K})$ sono entrambi diversi da $A(N)$ non possono coincidere tra loro (perchè allora — Lemma 2 — si avrebbe $A(\hat{S}) \cap A(\hat{K}) = A(N) = A(\hat{S}) = A(\hat{K})$); essendo $\bar{N}'$ ed $\bar{N}''$ zero-anelli semplici, si ha che $A(\hat{S})$ ed $A(\hat{K})$ sono entrambi massimali ed $N^2 \subseteq A(\hat{S}) \cap A(\hat{K}) = A(N)$: dunque $N^3 = 0$ ed $N = A(\hat{S}) + A(\hat{K})$. Risulta anche subito che $\hat{S}$ e $\hat{K}$ sono ideali di N. Ne segue anche che $\bar{N}'$ è isomorfo all'anello $\bar{\bar{N}}' = A(\hat{K})/A(N)$ e dunque $\bar{\bar{N}}'$ è uno zero-anello semplice privo di torsione due (se $[2x] = A(N)$ allora $2x \in A(N)$ e risulta $2xy = 0 = 2yx$, $\forall y \in N$; poichè N^2 è privo di torsione due si ha $x \in A(N)$). Dunque $\bar{\bar{N}}' = S(\bar{\bar{N}}') + K(\bar{\bar{N}}')$: sia $x \in A(\hat{K})$ tale che $[x] \in S(\bar{\bar{N}}')$; è $-x + j(x) \in A(N)$ e perciò $x \in \hat{S}$. In definitiva si ha $x \in A(\hat{K}) \cap \hat{S}$: visto che $A(N)$ è massimale in $A(\hat{K})$ e che $A(\hat{K})$ è massimale in N sono possibili solo i seguenti casi $A(\hat{K}) = \hat{S}$ oppure $A(\hat{K}) \cap \hat{S} = A(N)$. Ma per quanto precede, se $A(\hat{K}) \cap \hat{S} = A(N)$ e se $[x] \in S(\bar{\bar{N}}')$ allora $x \in A(N)$ ed $[x] = A(N)$: ne segue che $\bar{\bar{N}}' = K(\bar{\bar{N}}')$ e cioè, per $z \in A(\hat{K})$, risulta $[j(z)] = -[z]$ e dunque $z + j(z) \in A(N)$ e cioè $z \in \hat{K}$; dunque $A(\hat{K}) \subseteq \hat{K}$ ed anzi $A(\hat{K}) = \hat{K}$, perchè $A(\hat{K})$ è massimale in N.

Si conclude che $A(\hat{K}) = \hat{S}$ *oppure* $A(\hat{K}) = \hat{K}$.

In modo analogo si prova che si ha $A(\hat{S}) = \hat{S}$ *oppure* $A(\hat{S}) = \hat{K}$; d'altra parte non possono sussistere le $A(\hat{K}) = \hat{S}$ ed $A(\hat{S}) = \hat{S}$ o $A(\hat{K}) = \hat{K}$ ed $A(\hat{S}) = \hat{K}$ perchè altrimenti si avrebbe in ogni caso $A(\hat{S}) = A(\hat{K}) = A(N)$ (Lemma 2), cosa esclusa.

Se dunque risulta $A(\hat{K}) = \hat{S}$ e $A(\hat{S}) = \hat{K}$ allora si ha $\hat{S}\hat{K} = \hat{K}\hat{S} = 0$ e risulta $N = \hat{S} + \hat{K}$: N è uno J^*-stem a cubo nullo.

Altrimenti deve risultare $A(\hat{K}) = \hat{K}$ ed $A(\hat{S}) = \hat{S}$ e dunque $N = \hat{S} + \hat{K}$ con $\hat{S}^2 = \hat{K}^2 = 0$, cioè N è uno stem a cubo nullo somma di due zero-stems.

Inoltre, per $xy \in N$, esistono elementi $x_1, y_1 \in \hat{S}$ ed $x_2, y_2 \in \hat{K}$ tali che risulta $x = x_1 + x_2$ ed $y = y_1 + y_2$; allora $xy = x_1y_2 + x_2y_1$; si ha subito $j(xy) = j(x_1y_2 + x_2y_1) = -y_2x_1 - y_1x_2 = -(y_2x_1 + y_1x_2) = -yx$: pertanto la corrispondenza $xy \to -yx$ coincide con $j|_{N^2}$.

Significativo perchè porta ad una costruzione effettiva è il

Corollario 3. *Nelle ipotesi del Teorema* 6 *risulta* $N = \hat{S} + \hat{K}$ *ed* $\hat{S}$, $\hat{K}$ *sono stems caratterizzati dal teorema* 10 *di* [**1**]$_1$.

Dal Teorema 6 segue che $N = \hat{S} + \hat{K}$ è uno J^*-stem salvo al più quando $j(xy) = -yx$. Siano $\hat{S}$ e $\hat{K}$ J^*-stems a cubo nullo; poichè siamo nel caso distributivo il derivato di N^+ è contenuto sia in $\hat{S}$ che in $\hat{K}$. Le ipotesi del teorema 10 di [**1**]$_1$ sono dunque verificate sia per $\hat{S}$ che per $\hat{K}$. In conseguenza del fatto che ora N è distributivo la (3) e la (4) del teorema 10 di [**1**]$_1$ sono poi sempre verificate.

D'altra parte se $N = \hat{S} + \hat{K}$ è tale che $\hat{S}^2 = \hat{K}^2 = 0$ e $j(xy) = -yx$, si vede facilmente che si può riottenere il teorema 10 di [**1**]$_1$ che ora serve per costruire $\hat{S}$ e $\hat{K}$.

Bibliografia

[1] C. Ferrero Cotti: [•]$_1$ *Sugli stems in cui la corrispondenza $xy \to yx$ è una funzione,* Rend. Accad. Sci. Mat. Napoli **44** (1977), 265-277; [•]$_2$ *Sugli stems il cui semigruppo moltiplicativo possiede un ideale con proprietà commutative deboli,* Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino **36** (1977/78), 261-269; [•]$_3$ *Quozienti di stems rispetto a particolari annullatori,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 349-557; [•]$_4$ *Sugli stems il cui quadrato possiede una involuzione,* Rend. Accad. Sci. Mat. Napoli (1979).

[2] C. Ferrero Cotti e G. B. Rizza, *Anelli anticommutativi,* Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **107** (1973), 639-652.

[3] I. N. Herstein, *Rings with involution,* Chicago Lectures in Math., Univ. of Chicago Press, Chicago 1976.

[4] N. Jacobson and C. E. Rickart: [•]$_1$ *Jordan homomorphisms of rings,* Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 479-502; [•]$_2$ *Homomorphisms of Jordan rings of self-adjoint elements,* Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 310-322.

[5] W. S. Martinale III, *Lie isomorphisms of prime rings,* Trans. Amer. Math. Soc. **142** (1969), 437-455.

[6] G. Pilz, *Near rings,* North Holland, New York 1977.

Summary

For the study of near-rings (and rings) N with involution is useful the use of the sets $\hat{S}(\hat{K})$ of elements whose images in the canonical epimorphism $N \to N/A(N)$ are symmetric (skew-symmetric).

The involutions on a near-ring can be studied using certain functions that in the ring case are Lie or Jordan homomorphisms. In the last section of the paper we give a decomposition of near rings with involution and with $A(\hat{S})$, $A(\hat{K})$ maximal ideals; in the studied cases N is a J^*-near-ring.

* * *