Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 133-144

RITA CAMPANINI (*)

Estensione della stabilità forte secondo Markov. Applicazioni alle equazioni differenziali con ritardo (**)

1 - Introduzione

A. Markov definisce in [**8**] il concetto di stabilità forte per una funzione vettoriale nel modo seguente: una funzione $x: \mathscr{R} \to \mathscr{R}^n$ si dice fortemente stabile (in passato e in futuro) se e solo se ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde un $\delta > 0$ tale che, se α e β sono due qualunque numeri reali con $\|x(\alpha) - x(\beta)\| < \delta$, allora si ha $\|x(t+\alpha) - x(t+\beta)\| < \varepsilon$ per ogni numero reale t (quando la condizione vale solo in una semiretta $[t_0, +\infty)$ si dice che la funzione è fortemente stabile in futuro). Markov dimostra inoltre in [**8**] che ogni funzione $x(t)$ continua, limitata e fortemente stabile è quasi periodica e che per le soluzioni limitate di sistemi autonomi lipschitziani di equazioni differenziali ordinarie, la stabilità forte è condizione necessaria e sufficiente per la quasi periodicità.

Nel presente lavoro si estende il concetto di stabilità forte secondo Markov per una funzione vettoriale $x(t)$, definita in $\mathscr{R}$, nel seguente modo: per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che se α e β sono due qualunque numeri reali con $\sup_{-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0} \|x(\vartheta+\alpha) - x(\vartheta+\beta)\| < \delta$ (dove τ è un prefissato numero positivo), allora si ha $\|x(t+\alpha) - x(t+\beta)\| < \varepsilon$ per ogni numero reale t (se la condizione vale solo su una semiretta $[t_0, +\infty)$ si parlerà di stabilità forte in futuro). Inoltre si confronta questo nuovo concetto con la T-stabilità, definita da C. Risito in [**9**]$_1$ e poi estesa alle soluzioni di sistemi di equazioni differenziali funzionali con ritardo in [**1**], fornendo anche delle condizioni equivalenti mediante l'uso di funzioni di classe K.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 6-VIII-1979.

Infine si dimostra che, per le soluzioni limitate (limitate in futuro) di sistemi autonomi di equazioni differenziali funzionali di tipo ritardato, la stabilità forte in passato e in futuro (in futuro) è condizione necessaria e sufficiente per la quasi periodicità (per la asintotica quasi periodicità).

2 – Premettiamo alcune notazioni e richiami. Considerato un numero reale $\tau > 0$ indicheremo con $\mathscr{C}$ lo spazio di Banach delle funzioni continue definite sull'intervallo $[-\tau, 0]$, a valori in $\mathscr{R}^n$, con la norma della convergenza uniforme che indicheremo con $\|\cdot\|_*$. Cioè per $\varphi \in \mathscr{C}$ si ha $\|\varphi\|_* = \sup_{-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0} \|\varphi(\vartheta)\|$ dove $\|\cdot\|$ sta ad indicare la consueta norma euclidea in $\mathscr{R}^n$. Se ϱ indica una costante positiva poniamo $\mathscr{C}_\varrho = \{\varphi \in \mathscr{C} : \|\varphi\|_* < \varrho\}$.

Considerata una funzione continua $x: \mathscr{R} \to \mathscr{R}^n$, per ogni numero reale t il simbolo x_t denoterà la funzione di $\mathscr{C}$ tale che $x_t(\vartheta) = x(t + \vartheta)$ per $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$.

I simboli $\mathscr{R}^+$, $\mathscr{Z}$ ed $\mathscr{N}$ staranno ad indicare rispettivamente l'insieme dei numeri reali non negativi, dei numeri interi relativi, degli interi maggiori od eguali a zero.

Ci riferiamo d'ora innanzi alle seguenti definizioni di T-stabilità (v. [**1**]): considerato un numero $T > 0$, una funzione $x: \mathscr{R} \to \mathscr{R}^n$ $(x: [t_0 - \tau, +\infty) \to \mathscr{R}^n)$ si dice T-stabile in passato e in futuro (in futuro) se ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde un $\delta > 0$ tale che se n ed m sono due qualunque numeri interi (interi non negativi) con $\|x_{nT} - x_{mT}\|_* < \delta$ (con $\|x_{t_0+nT} - x_{t_0+mT}\|_* < \delta$) allora si ha $\|x(t + nT) - x(t + mT)\| < \varepsilon$ per ogni $t \in \mathscr{R}$ (per ogni $t \geqslant t_0$).

3 – Estendiamo ora il concetto di stabilità forte secondo Markov introducendo le seguenti definizioni.

Def. 1. Una funzione vettoriale $x: \mathscr{R} \to \mathscr{R}^n$ si dirà *fortemente stabile in passato e in futuro* quando

$$(1) \qquad \forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{\alpha,\beta\in\mathscr{R}} \ \|x_\alpha - x_\beta\|_* < \delta \Rightarrow \forall_{t\in\mathscr{R}} \ \|x(t+\alpha) - x(t+\beta)\| < \varepsilon .$$

Def. 2. Una funzione vettoriale $x: [t_0 - \tau, +\infty) \to \mathscr{R}^n$ si dirà *fortemente stabile in futuro* quando

$$(2) \qquad \forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{\alpha,\beta\in\mathscr{R}^+} \ \|x_{t_0+\alpha} - x_{t_0+\beta}\|_* < \delta \Rightarrow \forall_{t\geqslant t_0} \ \|x(t+\alpha) - x(t+\beta)\| < \varepsilon .$$

Data l'analogia con le definizioni di Markov, parliamo ancora di stabilità forte, ma è immediato notare che ad esempio la Def. 1 esprime una condizione *più debole* della stabilità forte (in passato ed in futuro) secondo Markov come si riconosce dalla seguente

Osservazione 1. Nel caso particolare di funzioni *scalari* sussiste la seguente proprietà (v. [2]): ogni funzione scalare $x\colon \mathscr{R} \to \mathscr{R}$, continua limitata e fortemente stabile (secondo Markov) è costante. Questa proprietà non sussiste invece per le funzioni scalari fortemente stabili nel senso della Def. 1.

Consideriamo ad esempio la funzione $\operatorname{sen} t$. Comunque si scelga $\tau > 0$, indicato con $s(\tau)$ il numero positivo $\cos(\pi/2 - \tau/2)$ oppure 1 a seconda che sia rispettivamente $\tau < \pi$ oppure $\tau \geqslant \pi$, si ha, per ogni coppia di numeri reali α e β e per ogni numero reale t,

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{sen}(t+\alpha) - \operatorname{sen}((t+\beta) \leqslant (1/s(\tau)) \cdot \sup_{-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0} |\operatorname{sen}(\vartheta+\alpha) - \operatorname{sen}(\vartheta+\beta)|\,.$$

Infatti, escluso il caso ovvio in cui per qualche $k \in \mathscr{Z}$ è $\alpha - \beta = 2k\pi$, si ha, per qualunque numero reale t,

$$\frac{|\operatorname{sen}(t+\alpha) - \operatorname{sen}(t+\beta)|}{\sup\limits_{-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0} |\operatorname{sen}(\vartheta+\alpha) - \operatorname{sen}(\vartheta+\beta)|} = \frac{2\left|\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right| \cdot \left|\cos\left(t + \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|}{\sup\limits_{-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0} 2\left|\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right| \cdot \left|\cos\left(\vartheta + \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|}$$

$$= \frac{\left|\cos\left(t + \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|}{\sup\limits_{-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0} \left|\cos\left(\vartheta + \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|} \leqslant 1/s(\tau)\,,$$

da cui segue la diseguaglianza (3); da questa si deduce che $\operatorname{sen} t$ verifica la condizione (1) quando, ad esempio, si scelga in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon \cdot s(\tau)$. Dunque $\operatorname{sen} t$, continua su tutto l'asse reale e limitata, è fortemente stabile in passato ed in futuro (secondo la Def. 1) ma non è costante.

Nel seguito parlando di stabilità forte intenderemo sempre riferirci alle Def. 1 o 2 a seconda che sia in passato ed in futuro o soltanto in futuro.

Osservazione 2. Si riconosce pure facilmente che la stabilità forte espressa dalle Def. 1 e 2 è un concetto *più forte* della T-stabilità. Si possono dare facilmente esempi di funzioni T-stabili che non sono fortemente stabili: uno di questi è dato dalla funzione $t \cdot \operatorname{sen} t$, la quale verifica la condizione di T-stabilità in passato ed in futuro quando si scelga $\tau = \pi$ e $T = 2\pi$; infatti per ogni coppia di numeri $n, m \in \mathscr{Z}$ si ha $\sup\limits_{-\pi \leqslant \vartheta \leqslant 0} |(\vartheta + n2\pi)\operatorname{sen}(\vartheta + n2\pi) - (\vartheta + m2\pi)\operatorname{sen}(\vartheta + m2\pi)| = \sup\limits_{-\pi \leqslant \vartheta \leqslant 0} |\operatorname{sen}\vartheta| \cdot |(n-m)2\pi| = |n-m| \cdot 2\pi$, e per ogni numero reale t, si ha $|(t+n2\pi)\operatorname{sen}(t+n2\pi) - (t+m2\pi)\operatorname{sen}(t+m2\pi)| = |\operatorname{sen} t| \cdot |(n-m)2\pi| \leqslant |n-m| 2\pi$.

Quindi la funzione $t \operatorname{sen} t$ verifica la condizione di T-stabilità in passato ed in futuro (scegliendo $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$), mentre non è fortemente stabile in passato ed in futuro poichè, comunque si fissi un numero $\bar{\delta} > 0$ si può far valere la diseguaglianza $\sup_{-\pi \leqslant \vartheta \leqslant 0} |(\vartheta + \bar{\alpha}) \operatorname{sen}(\vartheta + \bar{\alpha}) - (\vartheta + \bar{\beta}) \operatorname{sen}(\vartheta + \bar{\beta})| < \bar{\delta}$, ad esempio per $\bar{\alpha} = 0$ e $\bar{\beta}$ positivo con $\bar{\beta} \leqslant \pi/2$ e opportunamente piccolo, mentre il valore $|(t + \bar{\alpha}) \operatorname{sen}(t + \bar{\alpha}) - (t + \bar{\beta}) \operatorname{sen}(t + \bar{\beta})|$ al variare di t in $\mathscr{R}$ non si mantiene limitato in quanto nel caso considerato si ha per $k \in \mathscr{Z}$

$$\lim_{k \to +\infty} |(k\pi + \bar{\alpha}) \operatorname{sen}(k\pi + \bar{\alpha}) - (k\pi + \bar{\beta}) \operatorname{sen}(k\pi + \bar{\beta})|$$

$$= \lim_{k \to +\infty} |k\pi + \bar{\beta}| \cdot \operatorname{sen} \bar{\beta} = +\infty .$$

Nell'esempio dato è necessario scegliere τ e T in modo molto particolare. Consideriamo invece la funzione $g(t)$ così definita

$$g(t) \begin{cases} = kT/2 & \text{per } (2k-1)\, T/2 \leqslant t < 2kT/2 \\ = t - kT/2 & \text{per } 2kT/2 \leqslant t \leqslant (2k+1)\, T/2 \end{cases}$$

per ogni $k \in \mathscr{Z}$, dove $T > 0$ è un assegnato numero reale peraltro arbitrario. La funzione $g(t)$, continua in $\mathscr{R}$, per l'assegnato T, è T-stabile in passato ed in futuro indipendentemente dal valore che si voglia attribuire a $\tau > 0$. Infatti per ogni coppia di numeri interi n, m e per ogni numero reale t si ha

$$\sup_{-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0} |g(\vartheta + nT) - g(\vartheta + mT)| = |g(t + nT) - g(t + mT)| = |n - m|\, T/2 ,$$

come risulta evidente anche dal grafico di $g(t)$, di facile costruzione. Da ciò si deduce che $g(t)$ verifica la condizione di T-stabilità (con $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$); quando però si considera $\tau < T/2$, la funzione assegnata non è fortemente stabile poichè in tali casi per infinite coppie α e β di numeri reali con $\alpha \neq \beta$ si ha

$$\sup_{-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0} |g(\vartheta + \alpha) - g(\vartheta + \beta)| = 0$$

(ad esempio per $\alpha < \beta = kT$ e $\beta - \alpha < T/2 - \tau$) mentre per infiniti numeri reali t è invece (poichè $\alpha \neq \beta$): $|g(t + \alpha) - g(t + \beta)| > 0$.

4 – Considereremo ora due modi equivalenti di esprimere la stabilità forte; per brevità ci riferiremo al caso della stabilità forte in futuro ma si possono dare condizioni e dimostrazioni del tutto analoghe per la stabilità forte in passato ed in futuro; il primo di questi fa uso di funzioni di classe K ([1]), introdotte da W. Hahn (v. [**5**] opp. [**10**]), ed è espresso dal seguente

Lemma 1. *Una funzione* $x\colon [t_0 - \tau, +\infty) \to \mathscr{R}^n$ *continua in* $[t_0 - \tau, +\infty)$ *è fortemente stabile in futuro se e solo se esiste una funzione* φ *di classe* K *tale che si abbia*

$$\forall_{t \geqslant t_0} \ \forall_{\alpha,\beta \in \mathscr{R}^+} \ \|x(t+\alpha) - x(t+\beta)\| \leqslant \varphi(\|x_{t_0+\alpha} - x_{t_0+\beta}\|_*) . \tag{4}$$

Dim. *Condizione sufficiente.* Sia φ una funzione di classe K per cui vale la proprietà (4). Assegnato $\varepsilon > 0$ consideriamo il numero $\delta = \varphi^{-1}(\varepsilon) > 0$; allora se per due numeri $\alpha, \beta \in \mathscr{R}^+$ si ha $\|x_{t_0+\alpha} - x_{t_0+\beta}\|_* < \delta$, sarà anche $\varphi(\|x_{t_0+\alpha} - x_{t_0+\beta}\|_*) < \varepsilon$ e perciò dalla condizione (4) deriva che per ogni $t \geqslant t_0$ è $\|x(t+\alpha) - x(t+\beta)\| < \varepsilon$; ciò dimostra che $x(t)$ è fortemente stabile in futuro.

Condizione necessaria. Per ipotesi $x(t)$ è fortemente stabile in futuro. Assegnato allora $\varepsilon > 0$, indichiamo con $\Delta(\varepsilon) > 0$ l'estremo superiore dell'insieme, non vuoto, dei numeri $\delta > 0$ corrispondenti ad ε nella condizione (2). La funzione $\Delta(\varepsilon)$ così costruita è definita positiva e non decrescente. Esiste allora una funzione ψ di classe K tale che per ogni $\varepsilon > 0$, si abbia $\psi(\varepsilon) < \Delta(\varepsilon)$ (v. [**10**]). Siccome ψ è di classe K ammette funzione inversa $\varphi = \psi^{-1}$, anch'essa di classe K. Siano allora $\alpha, \beta \in \mathscr{R}^+$. Se $\|x_{t_0+\alpha} - x_{t_0+\beta}\|_* = 0$, in base alla Def. 2 si ha per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $t \geqslant t_0$, $\|x(t+\alpha) - x(t+\beta)\| < \varepsilon$, cioè $\|x(t+\alpha) - x(t+\beta)\| \equiv 0$. In tale caso vale banalmente, per ogni $t \geqslant t_0$, $\|x(t+\alpha) - x(t+\beta)\| \leqslant \varphi(\|x_{t_0+\alpha} - x_{t_0+\beta}\|_*)$. Se invece $\|x_{t_0+\alpha} - x_{t_0+\beta}\|_* > 0$, consideriamo il valore $\varepsilon_0 = \varphi(\|x_{t_0+\alpha} - x_{t_0+\beta}\|_*) > 0$. In base alle costruzioni fatte è $\|x_{t_0+\alpha} - x_{t_0+\beta}\|_* = \psi(\varepsilon_0) < \Delta(\varepsilon_0)$; di conseguenza $\|x(t+\alpha) - x(t+\beta)\| < \varepsilon_0 = \varphi(\|x_{t_0+\alpha} - x_{t_0+\beta}\|_*)$, per ogni $t \geqslant t_0$. Data l'arbitrarietà di α e β il Lemma 1 è così dimostrato.

In modo del tutto analogo si può dimostrare anche il seguente Lemma 2, il quale fa uso di un concetto (condizione (5)) più forte della T-stabilità, che possiamo chiamare *T-stabilità uniforme in T.*

Lemma 2. *Sia* $x\colon [t_0 - \tau, +\infty) \to \mathscr{R}^n$ *una funzione continua. Le due seguenti condizioni* (5) *e* (6) *sono equivalenti*

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{T>0} \ \forall_{m,n\in\mathscr{N}} \ \|x_{t_0+mT} - x_{t_0+nT}\|_* < \delta \tag{5}$$
$$\Rightarrow \forall_{t \geqslant t_0} \ \|x(t+mT) - x(t+nT)\| < \varepsilon .$$

([1]) Sia $l > 0$ finito o infinito; una funzione $\varphi\colon [0, l] \to \mathscr{R}^+$ si dice di classe K quando è continua in $[0, l]$, strettamente crescente ed inoltre $\varphi(0) = 0$.

Esiste una funzione φ di classe K, tale che si abbia

$$\forall_{t \geqslant t_0} \ \forall_{m,n \in \mathscr{N}} \ \forall_{T>0} \ \|x(t+mT) - x(t+nT)\| \leqslant \varphi(\|x_{t_0+mT} - x_{t_0+nT}\|_*) \ . \tag{6}$$

Siamo ora in grado di dimostrare che per una funzione continua la stabilità forte è equivalente alla T-stabilità uniforme in T. Vale infatti il

Teorema 1. *Una funzione continua $x\colon [t_0 - \tau, +\infty) \to \mathscr{R}^n$ è fortemente stabile in futuro se e solo se soddisfa la condizione* (5) *del Lemma* 2.

Dim. Se $x(t)$ è fortemente stabile in futuro essa soddisfa anche banalmente la condizione (5) del Lemma 2; dimostriamo invece il viceversa. Dati ad arbitrio $\alpha, \beta \in \mathscr{R}^+$, escluso il caso ovvio $\alpha = \beta$ e supposto, per fissare le idee, $\alpha < \beta$, poniamo per ogni $k \in \mathscr{N}$: $T_k = (\beta - \alpha)/2^k > 0$; $n_k \in \mathscr{N}$ tale che $n_k T_k \leqslant \alpha < (n_k + 1) T_k$; $m_k = n_k + 2^k$; (allora $m_k \in \mathscr{N}$ e $m_k T_k \leqslant \beta < (m_k + 1) T_k$). Si ha ovviamente $\lim_{k \to +\infty} n_k T_k = \alpha$ e $\lim_{k \to +\infty} m_k T_k = \beta$. In base poi alla continuità uniforme della funzione $x(t)$ nell'intervallo $[t_0 - \tau, \beta]$, le due successioni di funzioni $\{x(t_0 + \vartheta + n_k T_k)\}$ e $\{x(t_0 + \vartheta + m_k T_k)\}$ convergono per $k \to +\infty$ in modo uniforme rispetto a $\vartheta \in [-\tau, 0]$ e i loro limiti uniformi sono rispettivamente le funzioni $x(t_0 + \vartheta + \alpha)$ ed $x(t_0 + \vartheta + \beta)$ $(\vartheta \in [-\tau, 0])$. In base al Lemma 2 esiste inoltre una funzione φ di classe K per cui si ha, in particolare, per ogni $k \in \mathscr{N}$ e per ogni $t \geqslant t_0$,

$$\|x(t + n_k T_k) - x(t + m_k T_k)\| \leqslant \varphi(\|x_{t_0+n_k T_k} - x_{t_0+m_k T_k}\|_*) \ ,$$

da cui passando al limite per $k \to +\infty$ si ha, sempre per ogni $t \geqslant t_0$,

$$\|x(t+\alpha) - x(t+\beta)\| \leqslant \varphi(\|x_{t_0+\alpha} - x_{t_0+\beta}\|_*) \ .$$

Data l'arbitrarietà di α e β, tenendo presente il Lemma 1, la tesi è dimostrata.

5 - Applicazioni alle soluzioni di sistemi autonomi di equazioni differenziali funzionali con ritardo

Si consideri il seguente sistema autonomo di equazioni differenziali funzionali di tipo ritardato

$$\dot{x}(t) = f(x_t) \ , \tag{7}$$

dove il funzionale $f\colon \mathscr{C}_\varrho \to \mathscr{R}^n$ soddisfa le seguenti condizioni

(i) f è continuo su $\mathscr{C}_\varrho$ e trasforma insiemi chiusi e limitati di $\mathscr{C}_\varrho$ in insiemi limitati di $\mathscr{R}^n$;

(ii) f è tale da assicurare l'unicità delle soluzioni e la dipendenza continua dalle condizioni iniziali.

I prossimi Teoremi 2 e 3 caratterizzano le condizioni di stabilità forte, espresse dalle Def. 1 e 2, per funzioni che siano soluzioni limitate di sistemi del tipo (7).

Questi Teoremi forniscono delle condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni quasi periodiche ([2]) di tali sistemi.

Teorema 2. *Sia $x\colon \mathscr{R} \to \mathscr{R}^n$ una soluzione limitata del sistema* (7). *Tale soluzione $x(t)$ è quasi periodica se e solo se $x(t)$ è fortemente stabile in passato e in futuro.*

La dimostrazione del Teorema 2 si avvale del seguente

Lemma 3. *Una soluzione $x\colon \mathscr{R} \to \mathscr{R}^n$ del sistema* (7) *è fortemente stabile in passato e in futuro se e solo se*

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{\gamma\in\mathscr{R}} \ \|x_0 - x_\gamma\|_* < \delta \Rightarrow \forall_{t\in\mathscr{R}} \ \|x(t) - x(t+\gamma)\| < \varepsilon . \tag{8}$$

Dim. È ovvio che la stabilità forte in passato e in futuro implica la condizione (8). Viceversa supponiamo che $x(t)$ verifichi la condizione (8). Assegnato allora $\varepsilon > 0$ scegliamo un numero $\delta > 0$ corrispondente ad ε in tale condizione. Siano α, β numeri reali tali che $\|x_\alpha - x_\beta\|_* < \delta$; con il cambiamento di variabili $t \to t + \alpha$ otteniamo sempre dalla condizione (8) per $\gamma = \beta - \alpha$: $\|x_\alpha - x_{\alpha+\gamma}\|_* < \delta$, la quale implica, per ogni $t \in \mathscr{R}$,

$$\|x(t+\alpha) - x(t+\alpha+\gamma)\| = \|x(t+\alpha) - x(t+\beta)\| < \varepsilon .$$

Il Lemma 3 è così dimostrato.

([2]) Bohr ha dato la seguente definizione di funzione quasi periodica: una funzione vettoriale $x\colon \mathscr{R} \to \mathscr{R}^n$ si dice *quasi periodica* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $l_\varepsilon > 0$ tale che comunque si consideri un intervallo chiuso reale $[a, a + l_\varepsilon]$, di ampiezza l_ε, esiste un numero $\tau \in [a, a + l_\varepsilon]$ tale che $\|x(t+\tau) - x(t)\| < \varepsilon$ per ogni $t \in \mathscr{R}$. In seguito Bochner ha dato quest'altra definizione equivalente: una funzione $x\colon \mathscr{R} \to \mathscr{R}^n$ si dice *quasi periodica* quando da ogni successione reale $\{\alpha_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione $\{\alpha'_n\}$ tale che la successione di funzioni $\{x(t + \alpha'_n)\}$ sia uniformemente convergente rispetto a $t \in \mathscr{R}$ (v. [**3**] cap. I).

Dimostrazione del Teorema 2. *La condizione è necessaria.* Siccome $x(t)$ è quasi periodica, dato $\varepsilon > 0$, esiste un numero $l_\varepsilon > 0$ tale che ad ogni numero reale t corrisponde un numero reale $t' \in [0, l_\varepsilon]$ per cui sia verificata la proprietà

$$(9) \qquad \forall_{\gamma \in \mathscr{R}} \|x(t+\gamma) - x(t'+\gamma)\| < \varepsilon/3 \text{ [3]} .$$

Per la dipendenza continua dalle condizioni iniziali esiste poi un numero $\delta(\varepsilon) > 0$ (dipendente solo da ε) tale che sull'intervallo $[0, l_\varepsilon]$ si abbia

$$(10) \qquad \forall_{\gamma \in \mathscr{R}} \|x_0 - x_\gamma\|_* < \delta \Rightarrow \forall_{t' \in [0, l_\varepsilon]} \|x(t') - x(t'+\gamma)\| < \varepsilon/3 .$$

Allora, comunque sia assegnato $t \in \mathscr{R}$, esiste in corrispondenza un numero reale $t' \in [0, l_\varepsilon]$ tale che sia soddisfatta la condizione (9); inoltre per ogni $\gamma \in \mathscr{R}$ per cui sia $\|x_0 - x_\gamma\|_* < \delta$ sarà, in base alla condizione (10), $\|x(t') - x(t'+\gamma)\| < \varepsilon/3$. Perciò

$$\|x(t) - x(t+\gamma)\| \leqslant \|x(t) - x(t')\| + \|x(t') - x(t'+\gamma)\| + \|x(t'+\gamma) - x(t+\gamma)\| < \varepsilon .$$

Dunque $x(t)$, verificando la condizione (8) del Lemma 3, è fortemente stabile in passato e in futuro.

La condizione è sufficiente. Poichè la soluzione $x(t)$ è limitata, esiste una costante positiva L tale che, per ogni numero reale t valga $\|x(t)\| \leqslant L < \varrho$; in base alla condizione (i) esiste anche una costante positiva M tale che, per ogni numero reale t sia $\|\dot{x}(t)\| \leqslant M$, da cui per il Teorema della media per funzioni vettoriali

$$(11) \qquad \forall_{t_1, t_2 \in \mathscr{R}} \|x(t_1) - x(t_2)\| \leqslant M \cdot |t_1 - t_2| .$$

Mostriamo allora che, data un'arbitraria successione $\{\alpha_n\}$ di numeri reali, è possibile estrarre da questa una sottosuccessione $\{\alpha_n'\}$ tale che la successione di funzioni $\{x(t + \alpha_n')\}$ sia uniformemente convergente rispetto a $t \in \mathscr{R}$. La funzione $x(t)$ sarà allora quasi periodica (secondo Bochner). Osserviamo allora che $\{x(\vartheta + \alpha_n)\}$ con $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$, è una successione di funzioni equicontinue ed

---

[3] Infatti in base alla definizione di Bohr, considerato un numero $\bar{t} \in \mathscr{R}$, se scegliamo $\tau \in [-\bar{t}, -\bar{t} + l_\varepsilon]$ tale che per ogni $t \in \mathscr{R}$ si abbia $\|x(t+\tau) - x(t)\| < \varepsilon/3$, e poniamo $t' = \bar{t} + \tau$, si ha $0 \leqslant t' \leqslant l_\varepsilon$ e per ogni $\gamma \in \mathscr{R}$, la condizione $\|x(t+\tau) - x(t)\| < \varepsilon/3$, per $t = \bar{t} + \gamma$ diventa $\|x(t'+\gamma) - x(\bar{t}+\gamma)\| < \varepsilon/3$.

equilimitate. Infatti in base alla condizione (11) si ha che, dato $\varepsilon > 0$ e posto $\delta = \varepsilon/M$ se, per $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [-\tau, 0]$ vale $|\vartheta_1 - \vartheta_2| < \delta$, allora, per ogni numero naturale n, si ha $\|x(\vartheta_1 + \alpha_n) - x(\vartheta_2 + \alpha_n)\| < M \cdot \delta = \varepsilon$. È possibile allora estrarre una sottosuccessione $\{x(\vartheta + \alpha_n')\}$ di $\{x(\vartheta + \alpha_n)\}$ che sia uniformemente convergente rispetto a $\vartheta \in [-\tau, 0]$. Poichè $x(t)$ è fortemente stabile in passato ed in futuro, dato $\varepsilon > 0$, scegliamo un numero $\delta > 0$ corrispondente ad ε nella condizione (1) per la nostra funzione. Sia poi k_0 un numero naturale tale che per ogni coppia di numeri naturali $n, m \geqslant k_0$ e per ogni $\vartheta \in [-\tau, 0]$, si abbia $\|x(\vartheta + \alpha_n') - x(\vartheta + \alpha_m')\| < \delta/2$; di conseguenza $\|x_{\alpha_n'} - x_{\alpha_m'}\|_* < \delta$ e perciò, per ogni numero reale t vale $\|x(t + \alpha_n') - x(t + \alpha_m')\| < \varepsilon$, il che dimostra che la successione $\{x(t + \alpha_n')\}$ converge uniformemente rispetto a $t \in \mathscr{R}$. Il Teorema 2 è così dimostrato.

Teorema 3. *Sia $x\colon [t_0 - \tau, +\infty) \to \mathscr{R}^n$, soluzione limitata in futuro del sistema* (7). *Tale soluzione $x(t)$ è asintoticamente quasi periodica* (4) *se e solo se $x(t)$ è fortemente stabile in futuro.*

È opportuno premettere anche alla dimostrazione del Teorema 3 il

Lemma 4. *Una soluzione $x\colon [t_0 - \tau, +\infty) \to \mathscr{R}^n$ del sistema* (7) *è fortemente stabile in futuro se e solo se*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{\gamma\in\mathscr{R}^+}\ \|x_{t_0} - x_{t_0+\gamma}\|_* < \delta \Rightarrow \forall_{t\geqslant t_0}\ \|x(t) - x(t+\gamma)\| < \varepsilon\,. \tag{12}$$

Dim. Si ragiona in modo del tutto analogo al Lemma 3, considerando il cambiamento di variabile $t \to t + \alpha$ supponendo però che sia $\alpha \leqslant \beta$.

Dimostrazione del Teorema 3. *La condizione è necessaria.* Tenendo conto che l'asintotica quasi periodicità comporta la seguente proprietà: dato $\varepsilon > 0$ esistono due numeri reali positivi $T(\varepsilon) > t_0$ ed $l(\varepsilon) > 0$ tali che ad ogni

(4) Dato $a \in \mathscr{R}$, una funzione $x\colon [a, +\infty) \to \mathscr{R}^n$ si dice *asintoticamente quasi periodica* quando per ogni $t \geqslant a$ si ha $x(t) = p(t) + q(t)$ dove $p(t)$ è una funzione quasi periodica e $q(t)$ è una funzione continua in $[a, +\infty)$ tale che $q(t) \to 0$ per $t \to +\infty$. Si possono dare altre condizione equivalenti alla precedente (una delle quali interviene nella successiva dimostrazione del Teorema 3) (v. [4] oppure [3]).

$t > T + l$ corrisponda un t' nell'intervallo $[T, T + l]$ per cui valga

$$\forall_{\gamma \in \mathscr{R}^+} \|x(t+\gamma) - x(t'+\gamma)\| < \varepsilon/3 \; (^5) \tag{13}$$

poichè inoltre per la dipendenza continua dalle condizioni iniziali, esiste un $\delta(\varepsilon)$ tale che sull'intervallo $[t_0, T + l]$ si abbia

$$\forall_{\gamma \in \mathscr{R}^+} \|x_{t_0} - x_{t_0+\gamma}\|_* < \delta \Rightarrow \forall_{t' \in [t_0, T+l]} \|x(t') - x(t'+\gamma)\| < \varepsilon/3\,, \tag{14}$$

con tale δ si ha allora che per qualunque $t > T + l$ esiste un numero $t' \in [T, T+l]$ per cui vale la condizione (13), e, per ogni $\gamma \in \mathscr{R}^+$ tale che $\|x_{t_0} - x_{t_0+\gamma}\|_* < \delta$, si ha, in base alla condizione (14), $\|x(t') - x(t'+\gamma)\| < \varepsilon/3$. Di conseguenza

$$\|x(t) - x(t+\gamma)\| \leqslant \|x(t) - x(t')\| + \|x(t') - x(t'+\gamma)\| + \|x(t'+\gamma) - x(t+\gamma)\| < \varepsilon\,.$$

Dunque, in base al Lemma 4, $x(t)$ è fortemente stabile in futuro.

La condizione è sufficiente. Utilizziamo quest'altra proprietà equivalente alla asintotica quasi periodicità (v. [4]): da ogni successione $\{\alpha_n\}$ di numeri reali con $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{\alpha_n'\}$ tale che la successione di funzioni $\{x(t+\alpha_n')\}$ sia uniformemente convergente rispetto a $t \in [t_0; +\infty)$. Sia dunque $\{\alpha_n\}$ una successione divergente di numeri reali. Procedendo in modo analogo al Teorema 2 osserviamo anzitutto che esiste una costante $M > 0$ tale che valga

$$\forall_{t_1, t_2 \geqslant t_0} \|x(t_1) - x(t_2)\| \leqslant M \cdot |t_1 - t_2|\,. \tag{15}$$

Di conseguenza si dimostra che le funzioni della successione $\{x(t_0+\vartheta+\alpha_n)\}$, con $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$, sono equicontinue ed equilimitate poichè, escludendo al più un numero finito di indici, si ha $\alpha_n \geqslant \tau$ e quindi $t_0+\vartheta+\alpha_n \geqslant t_0$ per ogni $\vartheta \in [-\tau, 0]$. È possibile perciò estrarre dalla successione di funzioni $\{x(t_0+\vartheta+\alpha_n)\}$ una sotto-

---

(5) Per definizione $x(t) = p(t) + q(t)$ per ogni $t \geqslant t_0$ con $p(t)$ funzione quasi periodica e $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = 0$. Sia allora, dato $\varepsilon > 0$, $T(\varepsilon)$ tale che $\|q(t)\| < \varepsilon/9$ per $t > T$; sia $l(\varepsilon)$ tale che ad ogni $t \geqslant t_0$ corrisponda un $t' \in [T, T+l]$ per cui valga, per ogni $\gamma \in \mathscr{R}^+$, $\|p(t+\gamma) - p(t'+\gamma)\| < \varepsilon/9$; sarà allora in particolare per $t > T + l$

$$\|x(t+\gamma) - x(t'+\gamma)\| = \|p(t+\gamma) - p(t'+\gamma) + q(t+\gamma) - q(t'+\gamma)\|$$
$$\leqslant \|p(t+\gamma) - p(t'+\gamma)\| + \|q(t+\gamma)\| + \|q(t'+\gamma)\| < \varepsilon/9 + \varepsilon/9 + \varepsilon/9 = \varepsilon/3\,.$$

successione $\{x(t_0+\vartheta+\alpha_n')\}$ che sia uniformemente convergente rispetto a $\vartheta \in [-\tau, 0]$. Dato allora $\varepsilon > 0$ consideriamo un numero $\delta > 0$ corrispondente ad ε nella condizione (2). Sia poi k_0 un numero naturale tale che per ogni coppia di numeri naturali $n, m \geqslant k_0$ e per ogni $\vartheta \in [-\tau, 0]$ si abbia $\|x(t_0 + \vartheta + \alpha_n') - x(t_0 + \vartheta + \alpha_m')\| < \delta/2$; allora $\|x_{t_0+\alpha_n'} - x_{t_0+\alpha_m'}\|_* < \delta$ e di conseguenza per ogni numero reale $t \geqslant t_0$ vale $\|x(t + \alpha_n') - x(t + \alpha_m')\| < \varepsilon$. Perciò la successione di funzioni $\{x(t + \alpha_n')\}$ è uniformemente convergente rispetto a $t \in [t_0, +\infty)$. Il Teorema 3 è così dimostrato.

Osservazione 3. In un precedente lavoro [1] si considera un sistema T-periodico

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)\,, \tag{16}$$

dove la funzione continua $f\colon \mathscr{R} \times \mathscr{C}_\varrho \to \mathscr{R}^n$, con $f(t + T, \varphi) \equiv f(t, \varphi)$ trasforma insiemi chiusi e limitati di $\mathscr{R} \times \mathscr{C}_\varrho$ in insiemi limitati di $\mathscr{R}^n$ ed è tale da assicurare l'unicità delle soluzioni e la dipendenza continua dalle condizioni iniziali; si dimostra allora che una soluzione $x\colon [t_0 - \tau, +\infty) \to \mathscr{R}^n$ del sistema (16), limitata in futuro, è asintoticamente quasi periodica se e solo se è T-stabile in futuro.

Poichè un sistema autonomo si può sempre riguardare come un particolare sistema periodico (rispetto a t) di periodo T qualsiasi, confrontando tale risultato con il Teorema 3 del presente lavoro, si deduce che una soluzione limitata in futuro del sistema autonomo (7) è fortemente stabile in futuro se e solo se è T-stabile in futuro per qualche $T > 0$; nella Osservazione 2 abbiamo già mostrato che in generale funzioni continue (e derivabili) possono essere T-stabili senza essere fortemente stabili.

Bibliografia

[1] R. Campanini and C. Risito, *Existence theorem for almost periodic solutions of periodic systems with time lag*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 443-447.

[2] A. Dall'Aglio Angelotti, *Un'osservazione sul concetto di forte stabilità*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 291-294.

[3] A. M. Fink, *Almost periodic differential equations*, Lecture Notes in Matematics 377, Springer-Verlag, Berlin 1974.

[4] M. Fréchet, *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques*, Rev. Sci. **76** (1941), 341-354.

[5] W. Hahn, *Stability of motion*, Springer Verlag, New York 1967.

[6] A. Halanay, *Differential equations: stability, oscillations, time lags*, Academic Press, New York 1966.

[7] J. K. Hale, *Theory of functional differential equations*, Applied Math. Sciences vol. 3, 2 nd. ed., Springer-Verlag, New York 1977.

[8] A. Markoff, *Stabilität im Liapounoffschen Sinne und Fastperiodizität*, Math. Z. **36** (1933), 708-738.

[9] C. Risito: $[\cdot]_1$ *On Markov stability*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 85-88; $[\cdot]_2$ *Existence theorems for almost periodic solutions of periodic systems*, « Equadiff 78 » (Firenze, 24-30 May 1978), 53-60.

[10] N. Rouche and J. Mawhin, *Equations differentielles ordinaires* (tome 2), Masson et Cie. Editeures, Paris 1973.

Summary

In this paper an extension of strong stability, introduced by Markov [**8**], *is given and compared with T-stability* [**1**], [**9**]. *Moreover autonomous systems of functional differential equations are considered and this extended stability is proved a necessary and sufficient condition for bounded (bounded in the future) solutions to be almost periodic (asymptotically almost periodic).*

* * *