Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 151-162

F. AMATO (*)

Variétés lorentziennes de dimension paire structurées par une connexion invariante involutive (**)

Soit (M, g) une variété lorentzienne paracompacte de dimension paire $2n+2$ et soit $T_p(M)$ l'espace tangent en chaque point $p \in M$.

On peut décomposer $T_p(M)$ suivant $T_p(M) = \mathscr{H}_p \oplus S_p$ où $\mathscr{H}_p$ et S_p sont respectivement un 2-plan hyperbolique et un $2n$-plan spatial. Une connexion ∇ déterminée par g est dite *invariante involutive* (et notée par ∇_i) si tous les vecteurs de la base vectorielle $\{\xi_A; A = 1, 2, \ldots, 2n+2\}$ d'un repère *quasi orthonormée* $Q \in Q(M)$ $\big(Q(M)$: fibré des repères quasi-orthonormée de $M\big)$ sont quasi-concourants (dans le sens de R. Rosca $[7]_1$) par rapport à un certain champ vectoriel $X \in T_p(M)$.

Le premier groupe d'équations de structure met alors en évidence une 1-forme $\alpha \in T_p^*(M)$ qui est nécessairement *fermée*. Le champ X et la forme α sont appelés respectivement le *champ principal* et le *Pfaffien principal* associés à la connexion ∇_i.

Une pareille connexion constitue une généralisation étendue aux variétés lorentziennes de la *connexion conforme plate* de R. Rosca $[7]_2$ (on retrouve la propriété mise en évidence dans $[7]_2$ que ∇_i induit sur M une structure *conforme symplectique* $CS_p(n+1, R) = (\Omega, \alpha)$ ayant α pour *convecteur de Lee*). Si μ est l'isomorphisme de fibrés défini par Ω le champ vectoriel $Y = \mu^{-1}(\alpha)$ est *un automorphisme infinitesimal de* Ω et en outre toutes les formes de connexion sur $Q(M)$ sont des *relations intégrales d'invariances* pour X.

On convient de noter la variété M en jeu par $M(X, \alpha, \Omega, g)$ et il est prouvé

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 98100 Messina, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 7-IX-1979.

entre autres que si X est *parallèle*, alors

(a) la *forme de soudure* dp de M est invariante par X;

(b) X est une *section invariante* pour le fibré du second ordre $Q_2(M)$ et est une *homothétie infinitesimale* pour Ω;

(c) la *courbure scalaire* R de M est la constante positive $2n(2n+1)\|X\|^2$.

Toute distribution D de $T_p(M)$ étant *involutive* on étudie ensuite au n. **4** les sous-variétés de $M(X, \alpha, \Omega, g)$. On a les 3 types d'immersions suivantes:

(a) L'immersion propre $x\colon M_h \to M$ où M_h est une surface hyperbolique tangente à $\mathscr{H}_p$; celle-ci est *totalement ombilicale.*

(b) L'immersion propre $x\colon M_s \to M$ où M_s est une variété spatiale (de dimension $2n$) tangent à S_p; celle-ci est totalement ombilicale et le vecteur de courbure moyenne associé à x est la restriction à M_s de la composante normale de X.

(c) Les immersions impropres suivant lesquelles en chaque point il existe un couple d'hypersurfaces co-isotropes ombilicales.

Enfin on peut déterminer sur le fibré tangent TM de $M(X, \alpha, \Omega, g)$ un *système mécanique* $\mathscr{M}$ [**2**] dont la *forme fondamentale* est *finslerienne* et dont le *système dynamique* associé à $\mathscr{M}$ est un *spray* sur M.

1 – Soit (M, g) une variété lorentzienne de dimension paire $2n+2$ et soit $T_p(M)$ l'espace tangent à M en $p \in M$. On peut décomposer l'espace $T_p(M)$ de la façon suivante [**3**]

$$T_p(M) = \mathscr{H}_p \oplus S_p\,. \tag{1.1}$$

Dans (1.1) $\mathscr{H}_p$ et S_p sont respectivement un 2-plan hyperbolique et un 2n-plan spatial.

$\mathscr{H}_p$ est déterminé par deux vecteurs isotropes réels ξ_1, et ξ_{2n+2} qui avec les $2n$ vecteurs spatiaux ξ_a $(2 \leqslant a \leqslant 2n+1)$ forment une base vectorielle *quasi-orthonormée.*

Cette base est normée et l'on a [**7**]$_2$

$$\langle \xi_1, \xi_{2n+2}\rangle = 1\,, \qquad \langle \xi_a, \xi_A\rangle = -\,\delta^a_A\,. \tag{1.2}$$

Si $Q(M)$ est le fibré des repères quasi-orthonormées de M, alors la forme de soudure sur $Q(M)$, les équations de la connexion ∇ et les équations de structure (E. Cartan) s'écrivent sous forme symbolique

$$\mathrm{d}p = \alpha \otimes \xi ; \tag{1.3}$$

$$\nabla \xi = \theta \otimes \xi \qquad (\theta \equiv \theta^A_B\text{: formes de connexions sur } Q(M)); \tag{1.4}$$

$$\mathrm{d}\wedge \alpha = -\,\theta \wedge \alpha \qquad (\mathrm{d}\wedge\text{: différentiation extérieure}); \tag{1.5}$$

$$\mathrm{d}\wedge \theta = -\,\theta\wedge\theta + \Theta \qquad (\Theta \equiv \Theta^A_B\text{: 2-formes de courbure}) . \tag{1.6}$$

A l'aide de (1.2) on déduit de (1.4)

$$\begin{aligned} &\theta^1_1 + \theta^{2n+2}_{2n+2} = 0\,, \qquad \theta^b_a + \theta^a_b = 0 \;\; (a, b = 2, \ldots, 2n+1), \\ &\theta^{2n+2}_a = \theta^a_1\,, \qquad \theta^a_{2n+2} = \theta^1_a\,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

2 – Dans [**8**] on a étudié une connexion, telle que toute distribution D de $T_p(M)$ était *involutive*. Dans le présent ouvrage nous arrivons à un nouveau type de connexion involutive de la manière suivante. Soit $X \in T_p(M)$ un champ vectoriel tangent à M. Supposons que tous les vecteurs de la base Q soient *quasi-concourants* (dans le sens de R. Rosca [**7**]$_1$) par rapport à X. Compte tenu de (1.2) et (1.4) cette propriété s'exprime par

$$\nabla\xi_1 = t_1\,\mathrm{d}p + \alpha^{2n+2}\otimes X\,, \quad \nabla\xi_{2n+2} = t_{2n+2}\,\mathrm{d}p + \alpha^1 \otimes X\,, \quad \nabla\xi_a = t_a\,\mathrm{d}p - \alpha^a \otimes X. \tag{2.1}$$

On déduit à l'aide (1.4)

$$\begin{aligned} &\theta^a_1 = t_a\alpha^{2n+2} + t_1\alpha^a, \qquad \theta^1_a = t_a\alpha^1 + t_{2n+2}\alpha^a, \\ &\theta^a_b = t_b\,\alpha^a - t_a\alpha^b, \qquad \theta^1_1 = t_1\alpha^1 - t_{2n+2}\alpha^{2n+2}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$X = \sum t_a\,\xi_a - t_{2n+2}\,\xi_1 - t_1\,\xi_{2n+2}\,. \tag{2.3}$$

Eu égard à (2.2) les équations deviennent

$$\mathrm{d}\wedge\alpha^A = \alpha\wedge\alpha^A \tag{2.4}$$

où

$$\alpha = \sum t_A\,\alpha^A \in \Lambda^1(M), \tag{2.5}$$

et les équations (2.4) montrent aussitôt que toute distribution D de $T_p(M)$ est *involutive*. Nous conviendrons d'appeler suivant R. Rosca [**7**]$_2$ le champ vectoriel X et la 1-forme α respectivement le *champ principal* et le *Pfaffien* *principal* associés à la connexion involutive définie par (2.2). La différentiation extérieure des équations (2.4) prouve par des considérations élémentaires que l'on doit avoir

$$d\wedge\alpha = 0\,. \tag{2.6}$$

Conformément à (1.2) et (2.3) on a

$$\|X\|^2 = 2t_1 t_{2n+2} - \sum (t_a)^2 = t^2, \tag{2.7}$$ $$\alpha(X) = i_X\alpha = -\,t^2. \tag{2.8}$$

Introduisons la 2-forme *presque symplectique*

$$\Omega = \alpha^1\wedge\alpha^2 + \ldots + \alpha^{2n+1}\wedge\alpha^{2n+2} \in \Lambda^2(M)\,. \tag{2.9}$$

A l'aide de (2.4) on déduit immédiatement par differentiation extérieure

$$d\wedge\Omega = 2\alpha\wedge\Omega\,. \tag{2.10}$$

Ainsi la connexion (2.2) induit sur M une *structure conforme symplectique* $CS_p(n+1, R)$ ayant 2α pour *covecteur de Lee.*

Nous conviendrons de noter une variété lorentzienne structurée par une connexion (2.2), par $M(X, \alpha, \Omega, g)$ où X, α, Ω sont les tenseurs de structure et g la métrique de M.

Soit μ: $TM \to T^*M$; $Z \to i_Z\Omega$, l'isomorphisme de fibrés défini par Ω.

En posant

$$Y = \mu^{-1}(\alpha) = t_3\xi_2 - t_2\xi_3 + \ldots + t_{2n+1}\xi_{2n} - t_{2n}\xi_{2n+1} + t_{2n+2}\xi_1 - t_1\xi_{2n+2}\,, \tag{2.11}$$

et eu égard à (2.6) et (2.10) et en remarquant que $\alpha(Y) = 0$, il vient $L_Y\Omega = 0$. Ainsi le champ $\mu^{-1}(\alpha)$ est un *automorphisme infinitesimal* de Ω (L_Z: dérivée de Lie dans la direction Z).

Remarquons aussi que l'on a

$$\theta^A_B(X) = 0\,. \tag{2.12}$$

On peut donc dire que toutes les formes de connexion du fibré $Q(M)$ sont des *relations intégrales d'invariance* pour le champ principal X.

En convenant d'appeler la connexion définie par (2.2) une *connexion invariante involutive* (abr. *c. i. involutive* et notée par ∇_i) nous avons la

P r o p o s i t i o n. Soit $M(X, \alpha, \Omega, g)$ une variété lorentzienne de dimension paire structurée par une c.i. involutive ∇_i et soient X et α le champ principal et le Pfaffien principal associés à ∇_i.

Alors on a les propriétés suivantes:

(a) Toute distribution de l'espace tangent $T_p(M)$ est involutive.

(b) X est une relation intégrale d'invariance pour toutes les formes de connexion du fibré $Q(M)$.

(c) ∇_i induit sur M une structure conforme symplectique $CS_p(n+1, R) = (\Omega, \alpha)$ ayant 2α pour covecteur de Lee.

(d) Le champ $Y = \mu^{-1}(\alpha)$ dual de α par rapport à Ω est un automorphisme infinitesimal de Ω.

3 – Exprimons que le champ X est une *section locale invariante* sur M (dans le sens de Lichnerowicz [**6**]).

On devra écrire

$$L_X \alpha^A = 0, \tag{3.1}$$

et compte tenu de (2.4) et (2.8) on déduit

$$dt_a = t^2 \alpha^a + t_a \alpha, \quad dt_1 = -t^2 \alpha^{2n+2} + t_1 \alpha, \quad dt_{2n+2} = -t^2 \alpha^1 + t_{2n+2} \alpha. \tag{3.2}$$

La différentiation extérieure des équations (3.2) montre que la condition nécessaire et suffisante que le système (3.2) soit *fermé* est

$$t^2 = \text{const.} \Leftrightarrow \|X\|^2 = \text{const.} \tag{3.3}$$

D'autre part eu égard à (2.1) on a en général

$$\nabla X = -t^2 dp + \alpha \otimes X + \textstyle\sum_a dt_a \xi_a - dt_1 \xi_{2n+2} - dt_{2n+2} \xi_1, \tag{3.4}$$

et à l'aide de (3.2), on trouve

$$\nabla X = 0. \tag{3.5}$$

Ainsi si X est une section locale invariante sur M alors il est nécessairement *parallèle*. Il est facile de voir que la réciproque est également vrai.

Une c.i. involutive pour laquelle le champ X est parallèle sera dénommée une c.i. *involutive parallèle* (noteé par $\nabla_{i,p}$).

Dans ces conditions on trouve après calcul

$$
(3.6)\qquad
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\wedge\theta_1^1 = 2\alpha\wedge\theta_1^1 + 2t^2\alpha^1\wedge\alpha^{2n+2}, &\qquad& \mathrm{d}\wedge\theta_a^1 = 2\alpha\wedge\theta_a^1 - 2t^2\alpha^1\wedge\alpha^a,\\
&\mathrm{d}\wedge\theta_1^a = 2\alpha\wedge\theta_1^a - 2t^2\alpha^{2n+2}\wedge\alpha^a, && \mathrm{d}\wedge\theta_b^a = 2\alpha\wedge\theta_b^a + 2t^2\alpha^b\wedge\alpha^a,
\end{aligned}
$$

et compte tenu de (2.11) il vient

$$
(3.7)\qquad L_X\theta_B^A = 0\,.
$$

Par conséquent toutes les formes de connexion θ_B^A sont des invariants intégraux absolus de X. Mais la 1-forme canonique θ sur le fibré des repères quasi-orthonormés du second ordre $Q_2(M)$ étant $\theta = \alpha^A\otimes\xi_A + \sum_{A,B}\theta_B^A\otimes E_{AB}$ on peut dire encore que X est une *section locale invariante* sur $Q_2(M)$.

D'autre part de (2.1) et (3.5) on déduit

$$
(3.8)\qquad L_X\xi_A = 0\,.
$$

Par conséquent, en vertu de (3.1), on a

$$
L_X\,\mathrm{d}p = L_X\alpha^A\otimes\xi_A + \alpha^A\otimes L_X\xi_A = 0\,,
$$

et la forme de soudure dp est *invariante* par X.

De plus on trouve

$$
(3.9)\qquad i_X\Omega = -\,\theta_2^1 + \theta_1^{2n+1} + \theta_3^4 + \ldots + \theta_{2n-1}^{2n} = \beta\,,
$$

et, eu égard à (3.7), (2.10) et (2.8), on obtient après calcul

$$
(3.10)\qquad L_X\Omega = 2t^2\Omega\,.
$$

Mais t^2 étant une constante, l'équation (3.10) montre que X définie une *homothétie infinitésimale* sur M.

En faisant usage de (1.6) et à l'aide de (3.6) on déduit que les 2-formes de courbure Θ_B^A sont exprimées par

$$
(3.11)\qquad
\begin{aligned}
&\Theta_1^1 = \alpha\wedge\theta_1^1 + t^2\alpha^1\wedge\alpha^{2n+2} = -\,\Theta_{2n+2}^{2n+2}\,, &\qquad& \Theta_a^1 = \alpha\wedge\theta_a^1 - t^2\alpha^1\wedge\alpha^a,\\
&\Theta_1^a = \alpha\wedge\theta_1^a - t^2\alpha^{2n+2}\wedge\alpha^a, && \Theta_b^a = \alpha\wedge\theta_b^a + t^2\alpha^b\wedge\alpha^a.
\end{aligned}
$$

Un calcul rapide donne

$$\mathrm{d}\wedge\Theta^A_B = 0\,, \tag{3.12}$$

et puisque dim. Ker $\Theta^A_B \neq 0$, on peut dire que toutes les formes Θ^A_B sont *pré-symplectiques*.

On vérifie aussi sur (3.11) que les premières $\left(\sum \alpha^A\wedge\Theta^B_A = 0\right)$ et secondes $\left(\mathrm{d}\wedge\Theta^A_B + \sum \Theta^C_B\wedge\theta^A_C - \sum \theta^C_B\wedge\Theta^A_C = 0\right)$ *identités de Bianchi* sont satisfaites.

De (3.11) on trouve que les composantes R_{AA} du tenseur de Ricci R_{AB} sont exprimées par

$$R_{11} = R_{2n+2,2n+2} = 2n(t^2 - t_1 t_{2n+2})\,, \qquad R_{aa} = 2n(t^2 + t_a^2)\,. \tag{3.13}$$

On déduit de là que la courbure scalaire $R = \sum R_{AA}$ est donnée par

$$R = 2n(2n+1)\,t^2 = 2n(2n+1)\|X\|^2. \tag{3.14}$$

On peut donc énoncer la

Proposition. Si le vecteur principal X d'une variété lorentzienne $M(X, \alpha, \Omega, g)$ structurée par une connexion ∇_t est parallèle, alors on a les propriétés suivantes:

(a) La forme de soudure $\mathrm{d}p$ de M est invariante par X.

(b) X est une section invariante pour le fibré du second ordre $Q_2(M)$.

(c) $\|X\|$ est constant, et X est une homothétie infinitesimale pour Ω.

(d) La courbure scalaire R de M est la constante positive $2n(2n+1)\|X\|^2$.

(e) Les 2-formes de courbures sur le fibré $Q(M)$ sont toutes pre-symplectiques.

4 – Toute distribution D de $T_p(M)$ étant involutive, considérons en premier lieu l'immersion $x\colon M_h \to M$ où M_h est une surface tangente à $\mathscr{H}_p$. Une pareille surface est définie par

$$\alpha^a = 0 \tag{4.1}$$

(pour des raisons de simplicité nous conviendrons de noter les éléments induits par toute immersion avec les mêmes lettres).

En nous rapportant à (2.1), on voit que toutes les dérivées covariantes des sections normales ξ_a sont conformes à $\mathrm{d}p$. Les secondes formes fondamentales l_a associées à l'immersion étant comme on sait $l_a = -\langle \mathrm{d}p, \nabla\xi_a\rangle$ on a $l_a = -t_a\langle \mathrm{d}p, \mathrm{d}p\rangle$. Ainsi l'immersion $x\colon M_h \to M$ est *totalement ombilicale.* A l'aide de (3.10) on trouve que la courbure gaussienne K de M_h est $K = -\sum (t_a)^2$. Mais l'immersion $x\colon M_h \to M$ implique la décomposition

$$X/M_h = X_h/M_h \oplus X_s/M_h\,, \tag{4.2}$$

où X/M_h, X_h/M_h et X_s/M_h sont respectivement la restriction à M_h de X, la composante tangentielle et la composante normale de X/M_h.

On voit facilement que $K = \|X_s/M_h\|^2$; mais X_s/M_h étant un vecteur genre espace, il suit que K est *négative.* D'autre part la 1-*forme de courbure moyenne* Φ [**1**] associée à $x\colon M_h \to M$ est la forme vectorielle

$$\Phi = \alpha^{2n+2}\otimes \xi_{2n+2} - \alpha^1\otimes\xi_1 \tag{4.3}$$

(elle s'obtient à partir de la forme de soudure de M_h, au moyen du *star isomorphisme*). On a

$$\mathrm{d}\wedge\Phi = 2(\alpha^1\wedge\alpha^{2n+2})\otimes H\,, \tag{4.4}$$

où H est le *vecteur de courbure moyenne* (ou de vecteur de Bompiani) associé à x.

A l'aide de (2.1) on trove $H = X_s/M_h$.

Soit en second lieu $x\colon M_s \to M$, l'immersion de la variété spatiale M_s tangente à S_p. Par des considérations analogues aux précédentes on trouve que M_s est aussi totalement ombilicale. Si X/M_s est la restriction à M_s du *champ* principal X on a la décomposition

$$X/M_s = X_s/M_s \oplus X_h/M_s\,, \tag{4.5}$$

où X_s/M_s et X_h/M_s sont respectivement la composante tangentielle et la composante normale de X/M_s. Ici la $(2n-1)$-forme de courbure moyenne est la forme vectorielle

$$\Phi = \sum(-1)^{a-2}\alpha^2\wedge\ldots\wedge\hat{\alpha}^a\wedge\ldots\wedge\alpha^{2n}\otimes\xi_a \tag{4.6}$$

($\hat{}$: signifie mission).

La différentiation extérieure de Φ montre que le vecteur de courbure moyenne associé à x est X_h/M_s.

Enfin les covecteurs isotropes α^1 et α^{2n+2} étant conformément à (2.4) eux aussi complètement intégrables, il suit que comme dans [**8**], M est feuilletée par un couple *d'hypersurfaces co-isotropes presque ombilicales* (dans le sens de R. Rosca [7]$_3$). Considérons p.ex l'hypersurfaces co-isotrope M définie par $\alpha^{2n+2} = 0$.

Alors le vecteur isotrope ξ_1 (qui est situé dans le plan tangent à M_i) est le vecteur normal associé à l'immersion impropre $x\colon M_i \to M$.

De (2.1) on déduit

$$\nabla \xi_1 = t_1 \, dp \,, \tag{4.7}$$

et cette équation montre que le vecteur ξ_1, est *concourant*. D'autre part ξ_1, étant aussi tangent à M_i, on a: $L_{\xi_1} \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^{2n+1} = (\operatorname{div} \xi_1)(\alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^{2n+1})$ et à l'aide de (2.4), on trouve $\operatorname{div} \xi_1 = 2nt_1$. Mais le $2n$-forme de courbure moyenne est ici

$$\Phi = (\alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^{2n+1}) \otimes \xi_1 \,, \tag{4.8}$$

et par différentiation extérieure il vient $H = t_1 = \operatorname{div} \xi_1 / 2n$.

La différentiation de l'hypersurface co-isotrope définie par $\alpha^1 = 0$ donne des résultats analogues. On a donc la

Proposition. Soit $M(X, \alpha, \Omega, g)$ une variété lorentzienne structurée par une c.i. involutive et soit $T_p(M) = \mathscr{H}_p \oplus S_p$ l'espace tangent en chaque point $p \in M$. Toute distribution de $T_p(M)$ étant involutive on est amené à considérer 3 types d'immersions:

(a) L'immersion propre $x\colon M_h \to M$ où M_h est une surface hyperbolique tangent à $\mathscr{H}_p$; celle-ci est totalement ombilicale et le vecteur de courbure moyenne associé à x est la composante normale X_s / M_h de la valeur induite du champ principal; en outre la courbure gaussienne de M_h est négative et est égale au carré de la norme du vecteur de courbure moyenne.

(b) L'immersion propre $x\colon M_s \to M$ où M_s est une variété spatiale (de dimension $2n$) tangente à S_p; celle-ci est totalement ombilicale et le vecteur de courbure moyenne associé à x est la restriction à M_s de la composante normale X_h du champ principal X.

(c) Les immersions impropres suivant lesquelles, en chaque point il existe un couple d'hypersurfaces co-isotropes presque ombilicales; la courbure moyenne scalaire de chacune de ces hypersurfaces est égale (à une constante près) à la divergence du champ isotrope tangent.

5 – Soit $M(X, \alpha, \Omega, g)$ une variété lorentzienne structurée par une c.i. involutive et à champ principal X parallèle et soit TM la variété fibré tangent. Notons par

$$C = \sum v^A \frac{\partial}{\partial v^A} \in \mathscr{T}(TM), \tag{5.1}$$

($\mathscr{T}(TM)$: ensemble des champs de vecteurs sur TM) le *champ canonique* (ou de Liouville) sur TM et soit la fonction $T \in C^\infty(TM)$ définie par

$$T = \tfrac{1}{2} \sum (v^a)^2 - 2v^1 v^{2n+2}. \tag{5.2}$$

Si d_v est l'opérateur de *différentiation verticale* (d_v est une antidérivation de degré 1 de l'algèbre $\Lambda(TM)$ [**2**]) on déduit de (5.2)

$$d_v T = \lambda = \textstyle\sum_a v^a \alpha^a - v^{2n+2} \alpha^1 - v^1 \alpha^{2n+2}. \tag{5.3}$$

Si nous posons $\Pi = d \wedge \lambda$, on trouve à l'aide de (2.4)

$$\Pi = \textstyle\sum_a dv^a \wedge \alpha^a - dv^{2n+2} \wedge \alpha^1 - dv^1 \wedge \alpha^{2n+2} + \alpha \wedge \lambda\,. \tag{5.4}$$

La 2-forme Π est visiblement de rang $4n + 4$; c'est donc une forme symplectique *exacte*; plus précisement c'est la forme de Cartan relative à T [**4**].

Si i_v est l'opérateur de *dérivation verticale* (i_v est une dérivation de degré zéro de l'algèbre $\Lambda(TM)$ [**2**]), on trouve après calcul

$$L_C \Pi = \Pi\,, \qquad i_v \Pi = 0\,. \tag{5.5}$$

Ainsi les équations (5.5) montrent que la forme Π est *finslerienne*. Si $(\ )^v$ est l'opérateur de *relèvement vertical* [**5**] dans $\mathscr{T}(TM)$ ($(\ )^v$ est un endomorphisme différentiel vertical), on a

$$X^v = -t_{2n+2} \frac{\partial}{\partial v^1} - t_1 \frac{\partial}{\partial v^{2n+2}} + \textstyle\sum_a t_a \frac{\partial}{\partial v^a}\,. \tag{5.6}$$

Eu égard à (5.4), il vient

$$i_{X^v} \Pi = \alpha \Rightarrow L_{X^v} \Pi = 0\,, \tag{5.7}$$

et par conséquent X^v est un *automorphisme infinitesimal* de Π. De même soit Y^v le relèvement vertical du champ Y défini par (2.11). On trouve en nous rapportant à (3.9)

$$i_{Y^v}\Pi = -\beta = -\mu(X) . \tag{5.8}$$

Introduisons la 1-forme semi-basique $\pi = T\alpha$. On a en vertu de (2.6)

$$L_C T = 2T , \qquad L_C \pi = 2\pi , \tag{5.9}$$

et les équations ci-dessus prouvent que T et π sont *homogènes* de degré 2. Considérons sur M le *système mécanique* $\mathcal{M}$ [2], ayant Π pour *forme fondamentale* et T et π respectivement pour *énérgie cinètique* et *champ de forces*.

Le système est régulier puisque Π est symplectique. Le champ vectoriel $Z \in \mathcal{T}(TM)$ défini par

$$i_Z \Pi = \mathrm{d}(T - L_C T) + \pi \tag{5.10}$$

s'appelle le *système dynamique* associé à $\mathcal{M}$. Puisque T est homogène de degré 2, le champ Z est caractérisé par la propriété que $\Pi - (\mathrm{d}T - \pi)\wedge \mathrm{d}t \in \Lambda^2(TM + R)$ est une relation intégrale d'invariance pour $Z + \partial/\partial t$ [2]. En outre T et π étant homogènes et de même degré il résulte que Z ($i_Z\Pi = -\mathrm{d}T + \pi$) est un *spray* sur M.

On peut donc formuler la

Proposition. Soit TM la variété fibré tangent à une variété lorentzienne $M(X, \alpha, \Omega, g)$ structurée par une c.i. involutive. On peut déterminer sur TM un système mécanique $\mathcal{M}(M, T, \pi)$ où le champ de forces est $\pi = T\alpha$ et où la forme fondamentale Π est finslerienne. En outre le relèvement vertical X^v du champ principal X est un automorphisme infinitesimal de Π et le système dynamique associé à $\mathcal{M}$ est un spray sur M.

Bibliographie

[1] B. Y. Chen, *G-total curvature of immersed manifolds*, J. Differential Geometry **7** (1972), 371-391.

[2] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris 1969.

[3] J. Klein, *Espaces variationnels et mécanique*, Ann. Inst. Fourier **12** (1962), 1-124.

[4] J. Klein and A. Voutier, *Formes extérieures généralisées de sprays*, Ann. Inst. Fourier **18** (1965), 241-260.

[5] K. Yano and Ishihara, *Tangent and cotagent bundles*, M. Dekker, New York 1973.

[6] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformation*, Dunod, Paris 1958.

[7] R. Rosca: $[\cdot]_1$ *Variétés riemanniennes portant un champ vectorial quasi concourant*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A **283** (1976), 851-854; $[\cdot]_2$ *Connexions conformes plates parallèles*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A **281** (1978), 692-701; $[\cdot]_3$ *Sur les hypersurfaces isotropes. Le défaut 1 inclusé dans une espace hyperbolique*, Ann. Inst. H. Poincaré **20** (1974), 237-243.

[8] R. Rosca et J. M. Morvan, *Variétés lorentziennes structurées par une connexion conforme plate*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A **286** (1978), 519-522.

* * *