Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 181-186

Pier Luigi Ferrari (*)

Certe estensioni di teorie del I ordine mediante operatori logici di selezione (**)

1 – Un problema centrale fra quelli posti dall'uso dell'ε-simbolo in Matematica è quello dei rapporti intercorrenti fra esso e l'assioma di scelta, nella teoria classica degli insiemi. Per qualche tempo e per certi aspetti, l'uso dell'operatore ε, con gli usuali schemi

(1) $$\exists x A \rightarrow A^x_{\varepsilon x A}\,,$$ (2) $$\forall z(A^x_z \leftrightarrow B^y_z) \rightarrow \varepsilon x A = \varepsilon y B$$

è sembrato introdurre un principio di scelta ancora più generale di quello indotto da AC, che opera solo sulle formule che generino insiemi. Infatti nel libro di Fraenkel e Bar-Hillel [**3**] la questione della consistenza relativa di una teoria degli insiemi in cui fossero ammesse istanze dello schema di comprensione (o di sue varianti) contenenti ε-termini veniva presentata come problema aperto. Una soluzione piuttosto semplice di tale problema compare sul libro di Leisenring [**5**] per il caso di ZF. D'altra parte il II ε-teorema garantisce che l'uso dell'ε-simbolo, con gli schemi (1) e (2) non implica l'assioma di scelta, purchè gli assiomi siano formulati nel corrispondente linguaggio del I ordine senza ε (e quindi dagli schemi di assiomi siano escluse le istanze contenenti ε-termini). Per quest'ultimo motivo Leisenring è portato a sottolineare la superiorità formale dell'ε-calcolo rispetto all'usuale calcolo dei predicati del I ordine, rispetto al quale risulterebbe più semplice, più efficace per le dimostrazioni fondamentali, senza peraltro aggiungere niente di essenziale alle teorie di partenza. Questa maggiore semplicità sarebbe, secondo sempre Leisenring, un

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova, Italy.
(**) Ricevuto: 13-X-1979.

motivo valido, insieme ad altri, per suggerire l'uso dell'ε-calcolo (o anche del più debole ε^*-calcolo, ottenuto escludendo dagli assiomi alcune formule particolarmente malfatte, le cosiddette formule improprie, che rendono macchinosa la dimostrazione degli ε-teoremi) nell'insegnamento universitario della Logica Matematica, prendendo spunto da un problema posto da Fraenkel e Bar-Hillel [**3**].

Sembra però macchinoso introdurre limitazioni sulla struttura sintattica delle formule che compaiono negli assiomi, in particolare negli schemi. Non si vede come, se adottate nella didattica, anche se universitaria, esse possano evitare di risultare quanto meno artificiose e non completamente giustificate.

D'altra parte, anche nella pratica matematica, tali limitazioni risulterebbero fastidiose: ad esempio, nella teoria ZF (senza AC) basata sull'ε-calcolo (sarà chiamata ZF_ε), le costanti e le funzioni della teoria ($\emptyset$, $U(-)$, $P(-)$, ...) verrebbero tutte definite (come in [**5**]) in termini di ε (e questo dovrebbe essere proprio uno dei motivi di semplicità) e non potrebbero quindi essere utilizzate nello schema di rimpiazzamento. Rinunciando alla possibilità di porre limitazioni sugli schemi d'assiomi propri della teoria, si può tentare di ottenere risultati analoghi a quelli di Leisenring per operatori qualunque, eventualmente più deboli di ε, che non implichino AC se utilizzati, ad esempio, nello schema di rimpiazzamento.

Viene qui presentato un calcolo analogo all'ε-calcolo, del quale è, in un qualche senso, una generalizzazione. Per questo nuovo calcolo, che verrà chiamato α-calcolo, si dimostrerà il teorema di α-eliminazione, in analogia con l'ε-calcolo considerato finora.

2 – Per la notazione si fa riferimento a [**5**] con alcune varianti che saranno via via presentate.

Per la presenza dei simboli individuali e poichè gli assiomi del calcolo sono tutte formule (cioè chiusi) non è restrittivo chiamare d'ora in poi *quasi-formule* quelle che con al più una variabile libera e analogamente per i *quasi-termini*. Indicheremo A_t^x la sequenza ottenuta sostituendo t a tutte le occorrenze libere di x in A. Sia QF la classe delle quasi-formule del linguaggio in questione e consideriamo una applicazione $\mathfrak{A}: QF \to QF$ che goda delle seguenti proprietà:

(i) A è sotto-quasi-formula di $\mathfrak{A}[A]$ (nel senso di [**2**]);

(ii) se in A non compare il simbolo α (A è α-libera), lo stesso vale per $\mathfrak{A}[A]$;

(iii) siano A, B quasi-formule, allora $\mathfrak{A}[B_z^y]$ è lo stesso che $\mathfrak{A}[B_z^y/A_z^x]$ (la formula ottenuta sostituendo B_z^y al posto di tutte le comparse di A_z^x in $\mathfrak{A}[A_z^x]$, dove z è una variabile che non compare in A, B, $\mathfrak{A}[A]$, $\mathfrak{A}[B]$).

Ad una applicazione che goda delle proprietà sopra elencate possiamo associare un calcolo con un operatore α.

Gli assiomi di tale calcolo sono i seguenti:

P1 - P11: gli usuali schemi del calcolo proposizionale (vedi [**5**]);

$$\text{Q1}\quad \forall x A \to \neg\exists x \neg A\,, \qquad \text{Q2}\quad \neg\forall x A \to \exists x \neg A\,,$$

$$\text{Q3}\quad \neg\exists x A \to \neg A(t)\,, \qquad \text{Q4}\quad \exists u \mathfrak{A}[A] \to \mathfrak{A}[A]^{\bullet}_{\alpha v A}\,;$$

$$\text{E1}\quad s = t \wedge A^x_s \to A^x_t\,, \qquad \text{E2}\quad \forall z(\mathfrak{A}[A]^x_z \leftrightarrow \mathfrak{A}[B]^x_z) \to \alpha u A = \alpha v B\,, \qquad \text{E3}\quad t = t\,.$$

Valgono le stesse convenzioni di [**2**]. Va inoltre aggiunta la regola di generalizzazione, nella sua forma usuale, non essendo più deducibile nella presente teoria.

3 – L'idea che sta alla base dell'α-calcolo è di scegliere $\mathfrak{A}$ di volta in volta in modo da avere l'operatore più comodo. È evidente che se $\mathfrak{A}[A]$ è A si riottiene l'ε-calcolo, mentre se $\mathfrak{A}[A]$ è $A \wedge (\forall y\, \forall z (A^x_y \wedge A^x_z) \to y = z)$ si ottiene lo ι-calcolo. Ponendo $\mathfrak{A}[A] \equiv \forall x (x \in y \leftrightarrow A)$ si ottiene un calcolo con l'operatore che a ciascuna quasi-formula A associa, se esiste, l'insieme $\hat{x}A$. In questo modo è possibile definire gli insiemi $\emptyset$, $U(x)$, $P(x)$, ... Si noti che in questo esempio la variabile eventualmente libera in A che viene eventualmente saturata da α, non coincide con la variabile al posto della quale viene eventualmente sostituito il nuovo α-termine in $\mathfrak{A}[A]$. Un altro esempio è il seguente: data la gerarchia $\{V_\theta \mid \theta \in On\}$ costituita in modo consueto e data una quasi relazione A, chiamiamo rango di A $(\varrho_v(A))$ il minimo ordinale θ, se esiste, per cui c'è un elemento v di V_θ per cui vale $A(v)$. Questo operatore viene ricavato ponendo $\mathfrak{A}[A] \equiv \exists v (\mathrm{Ord}(u) \wedge A(v) \wedge v \in V_u \wedge (\forall x (\mathrm{Ord}(x) \wedge \exists y (y \in V_v \wedge A(y)) \to u \in x)))$.

Un vantaggio dell'α-calcolo è quindi la possibilità di limitare la potenza dell'ε-calcolo senza porre restrizioni sugli schemi di assiomi. È possibile, per esempio, introdurre la scelta su particolari classi di oggetti senza che questo implichi la deducibilità di AC. Il caso più banale si ottiene ponendo $\mathfrak{A}[A] \equiv A \wedge \mathrm{Ord}(x)$ per cui lo schema Q4$'$ diventa $\exists x (A \wedge \mathrm{Ord}(x)) \to A^x_{\alpha x A} \wedge \mathrm{Ord}(\alpha x A))$. È vero che in questo caso e in molti analoghi l'operatore definito è ι-rappresentabile, ma può essere comodo non essendo costretti a fare una scelta a priori.

4 - Teorema di α-eliminazione

Siano X un insieme di formule α-libere, A una formula α-libera. Allora, se A è provabile da X nell'α-calcolo $(X \vdash_{\alpha} A)$ allora A è provabile da X in CP $(X \vdash_{CP} A)$.

La dimostrazione è analoga a quelle in [**5**], rettificate poi in [**2**], con qualche difficoltà supplementare causata dalla presenza di $\mathfrak{A}$.

Indicheremo con Q un quantificatore e con O un quantificatore oppure α. Sia A una quasi-formula o un quasi-termine e x una variabile. Una sequenza della forma OxA sarà detta una *parola*. Si dirà che la parola OyB *è subordinata a* OxA se è contenuta in A e se una occorrenza libera di x in A sta in una occorrenza di OyB. Una formula A è detta *propria* se il suo scheletro A^+, ottenuto ad esempio sostituendo il simbolo a_1 ad ogni sottotermine (stretto) di A, è α-libero. Un α-termine αxA è proprio se lo è QxA. Il *rango* è definito nel modo che segue: sia W una parola, $rk(W) = 1$ se non ci sono parole subordinate a W o se tutte le parole subordinate a W hanno rango uguale a 1 e cominciamo con un quantificatore; $rk(W) = 1 + \max\{rk(V)\colon V$ è subordinata a $W\}$ se c'è una parola V subordinata a W tale che V comincia per α o $rk(V) > 1$.

Questa definizione, citata in una nota di [**2**], appare più naturale delle altre usate in [**2**] e in [**5**], in quanto non aumenta il rango che quando è necessario. Se rk_L è il rango definito in [**5**], rk_F quello definito in [**2**] e rk quello qui definito, o se A è una parola, vale infatti: $rk_L(A) \leqslant rk(A) \leqslant rk_F(A)$.

Lemma 1. *Una qualsiasi quasi-formula A è propria se e solo se lo è $\mathfrak{A}[A]$.*

Basta ricordare che una quasi formula è propria se e solo se lo sono tutte le sue sotto–quasi-formule.

Lemma 2. *Sia αyB una parola impropria. Allora $rk(\alpha xA) \leqslant rk(\alpha yB)$ implica $rk(\alpha u\mathfrak{A}[A]) \leqslant rk(\alpha v\mathfrak{A}[B])$, dove x, y, u, v sono variabili eventualmente libere di A, B, $\mathfrak{A}[A]$, $\mathfrak{A}[B]$.*

La dimostrazione segue immediatamente dalla regola di formazione (iii) per $\mathfrak{A}$. Se αxB è un quasi-termine subordinato a $\exists u\mathfrak{A}[A]$, $rk(\alpha yB) < rk(\alpha xA)$. La dimostrazione è immediata se si tiene conto di (ii), (iii).

Osservazione. Una parola propria ha sempre rango 1. Una parola impropria può avere rango $\geqslant 1$. L'affermazione, fatta in [**2**], che una parola impropria ha sempre rango > 1 è *errata*. Sia infatti

$$W \equiv \exists x(x = x \wedge \exists z(\alpha y(z = y) = z)) .$$

Si ha subito che

$$rk(W) = rk_L(W) = rk_F(W) = 1 ,$$

mentre W è evidentemente impropria. A questo punto non c'è nessuna difficoltà nel provare gli equivalenti dei lemmi 1 e 2 di [**2**].

Lemma 3. *Sia $r \geqslant 1$ e sia $\forall zB$ una formula impropria di rango r. Sia S una formula, sia A un assioma dell'α-calcolo e sia $'$ l'operazione di rimpiazzare $\exists y\mathfrak{A}[B]$ con S e $''$ quella di rimpiazzare $\forall z\mathfrak{A}[C]$ con S. Allora:*

(i) *se A è propria, A' e A'' sono assiomi della stessa forma;*

(ii) *se A è un P-assioma, un* E1 *o un* E3 *assioma, A' è un assioma della stessa forma;*

(iii) *se A è un* Q1 *o* Q2 *assioma $\exists y\mathfrak{A}[B]$ o $\forall z\mathfrak{A}[C]$ non sono le formule quantificate specificate in A, allora A' e A'' sono assiomi della stessa forma;*

(iv) *se A è il* Q3 *assioma $\neg\exists uD \rightarrow \neg D(t)$, o il* Q4 *assioma $\exists u\mathfrak{A}[D] \rightarrow \mathfrak{A}[D]^u_{\alpha vD}$, dove αvD ha rango $\leqslant r$ e non è αzB, allora A' è un assioma della stessa forma; inoltre $rk(\alpha vD) = rk(\alpha vD')$;*

(v) *se A è un* E2 *assioma, allora lo è anche A'; inoltre, se t_1, t_2 sono gli α-termini specificati in A, $rk(t_i) = rk(t_i)_{i=1,2}$.*

Lemma 4. *Sia $r \geqslant 1$ e siano αzB un α-termine di rango r, s un termine, A un assioma dell'α-calcolo e $'$ denoti l'operazione di rimpiazzare ogni occorrenza di αzB con s. Allora:*

(i) *se A è un P-assioma, un* E1 *o un* E3 *o un* Q1 *o un* Q2 *assioma, allora A' è un assioma della stessa forma;*

(ii) *se A è il* Q3 *assioma $\neg\exists uD \rightarrow \neg D(t)$ dove αuD ha rango r o è proprio, allora A' è un* Q3 *assioma e $rk(\alpha uD) = rk(\alpha uD')$;*

(iii) *se A è il* Q4 *assioma $\exists u\mathfrak{A}[D] \rightarrow \mathfrak{A}[D]^u_{\alpha vD}$, dove αvD ha rango $\leqslant r$ o è proprio, e dove αzB non è αvD, allora A' è un* Q4 *assioma e $rk(\alpha vD) = rk(\alpha vD')$;*

(iv) *se A è un* Q3 *o un* Q4 *assioma proprio, αzB un termine improprio, A' è un* Q3 *un* Q4 *assioma proprio;*

(v) *se A è un* E2 *assioma, e αzB non è uno dei termini specificati (t_1 e t_2), allora A' è un* E2 *assioma e inoltre $rk(t_i) = rk(t_i)$, $i, j = 1, 2$.*

Definizioni. αyB è un *Q-termine* in una dimostrazione D se $\exists z\mathfrak{A}[B] \rightarrow \mathfrak{A}[B]^z_{\alpha yB}$ o $\neg\exists yB \rightarrow \neg B(t)$ sono usati come assiomi in D. αyB è detto invece E2-*termine* se compare un E2 assioma in cui esso è uno dei termini specificati. Una *r-deduzione* è una deduzione in cui tutti i Q-termini e gli E2-termini sono di rango $\leqslant r$.

Una r, *Tr-deduzione* è una r-deduzione in cui tutti gli E2 termini appartengono all'insieme Tr.

Teorema 1 (di eliminazione di E2). *Sia* $X \cup \{A\}$ *un insieme di formule* α*-libere. Allora da* $X \vdash_{r,Tr} A$ *segue* $X \vdash_{r,\phi} A$.

La dimostrazione è perfettamente analoga a quella in [**2**].

Teorema 2 (di riduzione del rango). *Sia* $X \cup \{A\}$ *un insieme di formule* α*-libere e sia* $r > 1$. *Allora da* $X \vdash_{r,\phi} A$ *segue* $X \vdash_{r-1} A$.

Osservazione. A questo punto, contrariamente a quanto affermato in [**2**], ci sono ancora Q-termini impropri da eliminare. Questo dipende dall'errore segnalato in precedenza. Tuttavia, applicando i metodi suggeriti in [**5**] pag. 79, sostituendo cioè ogni quasi-α-termine improprio con il simbolo a ci si riduce facilmente al caso di una dimostrazione fatta esclusivamente di formule proprie. Il passaggio a una dimostrazione in cui non compaia il simbolo α non presenta a questo punto alcune difficoltà.

Bibliografia

[**1**] R. Carnap, *On the use of Hilbert's* ε*-operator in scientific theories*, Essays on the Foundations of Mathematics, Hebrew Univ. Jerusalem 1961.

[**2**] T. B. Flannagan, *On an extension of Hilbert's second* ε*-Theorem*, J. Symbolic Logic **40** (1975).

[**3**] A. Fraenkel and Y. Bar-Hillel, *Foundations of set theory*, North Holland 1958.

[**4**] D. Hilbert und P. Bernays, *Grundlagen der Matematik*, vol. 2, Berlin 1939.

[**5**] A. C. Leisenring, *Mathematical logic and Hilbert's* ε*-symbol*, Mac Donald, Londra 1969.

[**6**] S. Maehara: $[\cdot]_1$ *The predicate calculus with* ε*-symbol*, J. Math. Soc. Japan **7** (1955); $[\cdot]_2$ *Equality axiom on Hilbert's* ε*-symbol*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **7** (1957).

[**7**] H. Rasiowa, *On the* ε*-theorems*, Fund. Math. **43** (1956).

Summary

An analogous of II ε*-theorem is proved for a large class of selection operators, to which belong also Hilbert's* ε *and Peano's symbol. It is also corrected an error in* [**2**].

* * *