Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 225-232

GIUSEPPE ROSOLINI (*)

Estensioni mediante cornici in un topos (**)

Si definisce il concetto di estensione mediante cornice in un topos in un modo leggermente diverso da quello con cui Foster introduce le estensioni booleane in [1], ma ad esso equivalente nel caso del topos degli insiemi, usando ovviamente cornici che siano algebre di Boole. Viene poi dato un teorema di rappresentazione delle estensioni come oggetti del topos « costituiti » da morfismi di cornici.

1 - Definizioni e prime proprietà

Sia $\underline{E}$ un fissato topos elementare: si indicheranno gli oggetti con lettere maiuscole, riservando F e G per cornici. Per definizioni e risultati sulle cornici si veda $[\mathbf{4}]_1$, C indicherà la categoria delle cornici in $\underline{E}$; si userà la più semplice scrittura $x \cdot y$ per il termine $\underline{i}(x, y)$ e l'elemento massimo 1 comparirà non sottolineato (diversamente da $[\mathbf{4}]_1$). Si farà uso dei metodi e delle convenzioni di [**3**].

Notiamo subito alcune eguaglianze elementari della teoria delle cornici. Siano $g\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ un morfismo di cornici ed $y \in F$, siano $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\pi(a)$ ed $\eta(a, z)$ formule del linguaggio $L(\mathrm{Set})$. Allora

(1) $\quad \models S\{z\varepsilon F \mid \varphi(z)\} \leqslant y \Leftrightarrow \forall z \varepsilon F(\varphi(z) \Rightarrow z \leqslant y)$,

(2) $\quad \models S\{z\varepsilon F \mid \exists u, v\varepsilon F(\varphi(u) \wedge \psi(v) \wedge z = u \cdot v)\} = S\{z\varepsilon F \mid \varphi(z)\} \cdot S\{z\varepsilon F \mid \psi(z)\}$,

(3) $\quad \models S\{z\varepsilon F \mid \exists u\varepsilon F(\varphi(u) \wedge z = y \cdot u)\} = y \cdot S\{z\varepsilon F \mid \varphi(z)\}$,

(4) $\quad \models S\{z\varepsilon F \mid \exists a\varepsilon A(\pi(a) \wedge z = S\{u\varepsilon F \mid \eta(a, u)\})\} = S\{z\varepsilon F \mid \exists a\varepsilon A(\pi(a) \wedge \eta(a, z))\}$,

(5) $\quad \models S\{z\varepsilon G \mid \exists u\varepsilon F(\varphi(u) \wedge z = g(u))\} = gS\{z\varepsilon F \mid \varphi(z)\}$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via Università 12, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 16-XI-1979.

La (1) si ottiene dalla definizione di estremo superiore con la 4.15(2) di [**3**]; la (2) dal fatto che S è distributivo. La (3) segue dalla (2) ponendo $y=z$ in luogo di $\varphi(z)$, sfruttando la 3.22(2) di [**3**]. La (4) si dimostra usando la (1), ripetendo formalmente la prova intuitiva. La (5) deriva dall'ipotesi su g, atteso che $\models\{z\varepsilon G\,|\,\exists u\varepsilon F(z=g(u)\wedge\varphi(u))\}=\exists g\{z\varepsilon F\,|\,\varphi(z)\}$ per la 4.9(2) di [**3**].

Siano $f\colon A\to B$ e $g\colon \boldsymbol{F}\to\boldsymbol{G}$. Si pone ${}^{f}\boldsymbol{F}\colon F^A\to F^B$ il morfismo definito da ${}^{f}\boldsymbol{F}(\alpha)b=S\{z\varepsilon F\,|\,\exists a\varepsilon A(f(a)=b\wedge z=\alpha a)\}$ e ${}^{A}g\colon F^A\to G^A$ il morfismo definito da ${}^{A}g(\alpha)a=g(\alpha a)$.

Proposizione 1. Per ogni $\boldsymbol{F}$ in C ed A in $\underline{E}$, ${}^{(-)}\boldsymbol{F}\colon\underline{E}\to\underline{E}$ ed ${}^{A}(-)\colon C\to\underline{E}$ sono funtori. Inoltre per $f\colon A\to B$ e $g\colon\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{G}$ si ha che ${}^{B}g{}^{f}\boldsymbol{F}={}^{f}\boldsymbol{G}{}^{A}g$. Dunque l'assegnazione ${}^{f}g={}^{B}g{}^{f}\boldsymbol{F}$ definisce un bifuntore $N\colon\underline{E}\times C\to\underline{E}$.

Dim. ${}^{A}(-)$ è un funtore essendo composizione del funtore dimenticante da C ad E con $(-)^A$. La prova che ${}^{(-)}\boldsymbol{F}$ è un funtore e vale la uguaglianza ${}^{B}g{}^{f}\boldsymbol{F}={}^{f}\boldsymbol{G}{}^{A}g$ ricalca la prova insiemistica.

Se $\boldsymbol{F}$ è una cornice, $\omega_{\boldsymbol{F}}$ denota l'unico morfismo in C da $\boldsymbol{\Omega}$ in $\boldsymbol{F}$ ([1]). Per $\alpha\varepsilon F^A$ sia $im(\alpha)=\{z\varepsilon F\,|\,\exists a\varepsilon A(z=\alpha a)\}$ e si ponga $\varrho(\alpha)$ per $S(im(\alpha))=1^0$, $\sigma(\alpha)$ per $\forall a,\,a'\varepsilon A(\alpha a\cdot\alpha a'=\alpha a\cdot\omega_{\boldsymbol{F}}\delta_A(a,a'))$, con $\delta_A\colon A\times A\to\Omega$ mappa caratteristica della diagonale, e sia $\tau(\alpha)$ la congiunzione $\varrho(\alpha)\wedge\sigma(\alpha)$.

Definizione. Si dice *estensione di A mediante la cornice $\boldsymbol{F}$* il sottoggetto di F^A che ha come mappa caratteristica $\{\alpha\varepsilon F^A\,|\,\tau(\alpha)\}\colon F^A\to\Omega$. Con $e(A,F)\colon A[\boldsymbol{F}]\rightarrowtail F^A$ si indicherà un fissato, ma arbitrario, rappresentante di tale sottoggetto.

Nel caso $\underline{E}=\mathrm{Set}$ l'insieme $N(A,\boldsymbol{F})$ è l'estensione reticolare di A con $\boldsymbol{F}$ data in [**2**] ed $A[\boldsymbol{F}]$ è chiamato estensione distributiva, a generalizzare la nozione di estensione booleana introdotta in [**1**] (cfr. [**4**]$_2$).

Proposizione 2. Siano $a,\,a'\varepsilon A$, $b,\,b'\varepsilon B$, $z,\,w\varepsilon\Omega$ ed $\alpha\varepsilon F^A$ e sia $\varphi\colon A\times B\to\Omega$.

(i) $\models\{\cdot\}_A(a)a'=\delta(a,a')$;

(ii) $\models\delta(a,a')=true^0\Leftrightarrow a=a'$;

(iii) $\models\delta(a,a)=true^0$;

(iv) $\models z=w\Leftrightarrow(z=true^0\Leftrightarrow w=true^0)$;

(v) $\models\bigcup\{z\varepsilon\Omega\,|\,\exists a'\varepsilon A(\varphi(a',b)=true^0\wedge z=\delta(a,a'))\}=\varphi(a,b)$;

(vi) $\models\sigma(\alpha)\Rightarrow\alpha a\cdot S\{y\varepsilon F\,|\,\exists a'\varepsilon A(\varphi(a',b)=true^0\wedge y=\alpha a')\}=\alpha a\cdot\omega\varphi(a,b)$;

(vii) $\models\tau(\alpha)\Rightarrow S\{y\varepsilon F\,|\,\exists a\varepsilon A(\varphi(a,b)=true^0\wedge z=\alpha a)\}$
$=S\{z\varepsilon F\,|\,\exists a\varepsilon A(z=\alpha a\cdot\omega\varphi(a,b))\}$.

([1]) Per l'esistenza di ω (cfr. P. T. Johnstone, Zbl. 401.03029, 1979) si consideri $\omega(z)=S\{w\varepsilon F|w=1^0\wedge z=true^0\}$; l'unicità segue dal Teorema 20 di [**4**]$_1$.

Dim. (i) Dalla 2.9 di [**3**], atteso che $\{\cdot\}_A$ è morfismo aggiunto di δ. (ii) Dalla 2.30 di [**3**], poichè δ è la mappa caratteristica della diagonale. (iii) Da (ii) con la 3.14 di [**3**]. (iv) cfr. [**5**]. (v) Dalla definizione di $\cup$, si ha che
$\models \cup \{z\varepsilon\Omega \,|\, \exists a'\varepsilon A(\varphi(a', b) = \mathrm{true}^0 \wedge z = \delta(a, a'))\} = \mathrm{true}^0 \Leftrightarrow \varphi(a, b) = \mathrm{true}^0$, attesa la (ii). L'asserto deriva ora dalla (iv). (vi) Usando la (3) due volte con $\exists a'\varepsilon A(\varphi(a', b) = \mathrm{true}^0 \wedge z = \alpha a')$ ed $\exists a'\varepsilon A(\varphi(a', b) = \mathrm{true}^0 \wedge z = \omega\delta(a, a'))$ in luogo di $\varphi(z)$, sfruttando le 3.21(16) e 3.22(2) di [**3**] si trova che

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&\models \alpha a \cdot S\{y\varepsilon F \,|\, \exists a'\varepsilon A(\varphi(a', b) = \mathrm{true}^0 \wedge y = \alpha a')\} \\
&\quad = S\{y\varepsilon F \,|\, \exists a'\varepsilon A(\varphi(a', b) = \mathrm{true}^0 \wedge y = \alpha a \cdot \alpha a')\}\,, \\
&\models \alpha a \cdot S\{y\varepsilon F \,|\, \exists a'\varepsilon A(\varphi(a', b) = \mathrm{true}^0 \wedge y = \omega\delta(a, a'))\} \\
&\quad = S\{y\varepsilon F \,|\, \exists a'\varepsilon A(\varphi(a', b) = \mathrm{true}^0 \wedge y = \alpha a \cdot \omega\delta(a, a'))\}\,.
\end{aligned}
$$

Inoltre, ponendo $g = \omega$ nella (5) ed $\exists a'\varepsilon A(\varphi(a', b) = \mathit{true}^0 \wedge z = \delta(a, a'))$ per $\varphi(z)$, si ha

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&\models S\{y\varepsilon F \,|\, \exists a'\varepsilon A(\varphi(a', b) = \mathit{true}^0 \wedge y = \omega\delta(a, a'))\} \\
&\quad = \omega \cup \{y\varepsilon\Omega \,|\, \exists a'\varepsilon A(\varphi(a', b) = \mathit{true}^0 \wedge y = \delta(a, a'))\}\,.
\end{aligned}
$$

Dalle (6) e (7) segue l'asserto usando (v), attesa la definizione di $\sigma(\alpha)$. (viii) Per definizione di ϱ si ha che

$$
\begin{aligned}
\models \varrho(\alpha) \Rightarrow\ & S\{z\varepsilon F \,|\, \exists a\varepsilon A(\varphi(a, b) = \mathit{true}^0 \wedge z = \alpha a)\} \\
&= S\{z\varepsilon F \,|\, \exists a\varepsilon A(\varphi(a, b) = \mathit{true}^0 \wedge z = \alpha a)\} \cdot S\{z\varepsilon F \,|\, \exists a\varepsilon A(z = \alpha a)\}\,.
\end{aligned}
$$

Usando la (3) con $S\{z \in F \,|\, \exists a\varepsilon A(\varphi(a, b) = \mathit{true}^0 \wedge z = \alpha a)\}$ per y ed $\exists a\varepsilon A(z = \alpha a)$ per $\varphi(z)$, si ha che

$$
\begin{aligned}
\models \varrho(\alpha) \Rightarrow\ & S\{z\varepsilon F \,|\, \exists a\varepsilon A(\varphi(a, b) = \mathit{true}^0 \wedge z = \alpha a)\} \\
&= S\{z\varepsilon F \,|\, \exists a\varepsilon A(z = \alpha a \cdot S\{y\varepsilon F \,|\, \exists a'\varepsilon A(\varphi(a', b) = \mathit{true}^0 \wedge z = \alpha a')\})\}\,;
\end{aligned}
$$

da qui la tesi per (vi).

Lemma 3. *Siano* $f\colon A \to B$ *e* $g\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$, *sia* $\alpha\varepsilon F^A$. *Allora*

$$
\begin{array}{ll}
\text{(i)} & \models \varrho(\alpha) \Leftrightarrow \varrho({}^f\boldsymbol{F}(\alpha))\,; \\
\text{(ii)} & \models \sigma(\alpha) \Rightarrow \sigma({}^f\boldsymbol{F}(\alpha))\,; \\
\text{(iii)} & \models \varrho(\alpha) \Rightarrow \varrho({}^A g(\alpha))\,; \\
\text{(iv)} & \models \sigma(\alpha) \Rightarrow \sigma({}^A g(\alpha))\,; \\
\text{(v)} & \models \tau(\alpha) \Rightarrow \tau({}^f g(\alpha))\,.
\end{array}
$$

Dim. (i) Ponendo nella (4) $b = b$ per π ed $\exists a\varepsilon A(f(a) = b\wedge z = \alpha a)$ per η, si trova che $\models S(im({}^f\boldsymbol{F}(\alpha))) = S(im(\alpha))$, dato che $\models \exists b\varepsilon B(f(a) = b)$. (ii) Si usi la (3) con ${}^f\boldsymbol{F}(\alpha)b$ per y ed $\exists a\varepsilon A(f(a) = b'\wedge z = \alpha a)$ per $\varphi(z)$, e la Proposizione 2 (vi) con $\varphi = \delta(f\times B)$ per ottenere

$$\models \sigma(\alpha) \Rightarrow {}^f\boldsymbol{F}(\alpha)b \cdot {}^f\boldsymbol{F}(\alpha)b' = S\{z\varepsilon F \mid \exists a\varepsilon A(f(a) = b'\wedge z = \alpha a\cdot\omega\delta(f(a), b))\}\,.$$

Dato che $\models f(a) = b' \Rightarrow \delta(f(a), b) = \delta(b, b')$ si ha che

$$\models \sigma(\alpha) \Rightarrow {}^f\boldsymbol{F}(\alpha)b \cdot {}^f\boldsymbol{F}(\alpha)b' = S\{z\varepsilon F \mid \exists a\varepsilon A(f(a) = b'\wedge z = \alpha a\cdot\omega\delta(b, b'))\}\,.$$

Sfruttando la (3) con $\omega\delta(b, b')$ per y ed $\exists a\varepsilon A(f(a) = b'\wedge z = \alpha a)$ per $\varphi(z)$, segue la tesi grazie alla 3.10 di [**3**]. (iii) e (iv) si provano sfruttando il fatto che g è un morfismo di cornici, la (5) ed il corollario 21 di [**4**]$_1$. (v) Immediata dalle precedenti per la Proposizione 1.

Teorema 4. *Per ogni* $f\colon A \to B$ *e* $g\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ *esiste un unico morfismo* $f[g]\colon A[\boldsymbol{F}] \to B[\boldsymbol{G}]$ *tale che* $e(B, \boldsymbol{G})f[g] = fge(A, \boldsymbol{F})$. *Dunque l'assegnazione* $T(f, g) = f[g]$ *definisce un bifuntore* $T\colon \underline{E}\times C \to \underline{E}$ *con* $e\colon T \dot{\rightarrowtail} N$.

Dim. Dal Lemma 3 (v) con la 4.9(1) di [**3**], atteso che $e(B, \boldsymbol{G})$ è mono.

Il Teorema 4 è il primo esplicito risultato riguardante le estensioni. Come nel caso classico il vocabolo *estensione* è giustificato dal fatto che un oggetto si immerge in qualunque sua estensione mediante un'$\boldsymbol{\Omega}$-cornice: si proverà questo nel successivo Teorema 7.

Lemma 5. (i) *Se* $f\colon A \to B$, *allora* $\models {}^f\boldsymbol{\Omega}(\{\cdot\}_A(a))b = \{\cdot\}_B(f(a))b$. (ii) *Sia* $\alpha\varepsilon\Omega^A$. *Allora* $\models \varrho(\alpha) \Leftrightarrow \exists a\varepsilon A(a\in\alpha)$ *e* $\models \sigma(\alpha) \Leftrightarrow \forall a,\ a'\varepsilon A(a\in\alpha\wedge a'\in\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow a = a')$; *dunque* $\models \tau(\alpha) \Leftrightarrow \exists a\varepsilon A(\alpha = \{a\})$. (iii) *Sia* I *un oggetto di* $\underline{E}$ *ed* $\alpha\varepsilon(\Omega^I)^A$. *Allora* $\models \varrho(\alpha) \Leftrightarrow \forall i\varepsilon I\exists a\varepsilon A(i\in\alpha a)$ *e* $\models \sigma(\alpha) \Leftrightarrow \forall i\varepsilon I\forall a,$ $a'\varepsilon A(i\in\alpha a\wedge i\in\alpha a' \Rightarrow a = a')$; *dunque* $\models \tau(\alpha) \Leftrightarrow \forall i\varepsilon I\exists!\ a\varepsilon A(i\in\alpha a)$.

Dim. (i) Immediata, usando la Proposizione 2 (i) e (vii) se si nota che $\models \delta(f(a'), b) = true^0 \Leftrightarrow f(a') = b$ per la Proposizione 2 (ii). (ii) Si ottiene la prima equivalenza usando la definizione di $\cup$. Per la seconda si noti che $\models \alpha a\wedge\alpha a' = \alpha a\wedge\delta(a, a') \Leftrightarrow (\alpha a = true^0\wedge\alpha a' = true^0 \Leftrightarrow \alpha a = true^0\wedge a = a')$ per la 2.8 di [**3**]; dunque la tesi, atteso che $\omega = \Omega$. La terza equivalenza è ora banale. (iii) Notato che $\boldsymbol{\Omega}^I$ è una cornice ed $\omega(z) = \{i\varepsilon I \mid z = true^0\}$ per $z\varepsilon\Omega$ (cfr. [**4**]$_1$), si prova l'enunciato come al punto precedente, usando la 4.15(2) di [**3**], per la Proposizione 2 (iv).

Corollario 6. (i) *${}^{A}(-)$ ed $A[-]$ portano morfismi iniettivi in monomorfismi.* (ii) *$\{\cdot\}\colon Id_{\underline{E}} \dot{\rightarrowtail} {}^{(-)}\mathbf{\Omega}$ e, posto $j(A, \boldsymbol{F}) = {}^{A}\omega_{\boldsymbol{F}}\{\cdot\}_A$ e $P\colon \underline{E}\times C \to \underline{E}$ il funtore prima proiezione, si ha che $j\colon P \to N$. Se $\boldsymbol{F}$ è un'$\mathbf{\Omega}$-cornice, allora $j(A, \boldsymbol{F})$ è un monomorfismo.*

Dim. (i) Banale, dato che un morfismo $g\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ si dice iniettivo se $g\colon F \to G$ è mono. (ii) Dal Lemma 5 (i) e dalla Proposizione 1, usando (i) per l'affermazione finale.

Teorema 7. *$\{\cdot\}$ ed $e(-, \mathbf{\Omega})$ individuano lo stesso sottofuntore di $N(-, \mathbf{\Omega})$. Si può dunque scegliere $\{\cdot\}_A$ come $e(A, \mathbf{\Omega})$. Inoltre esiste $n\colon P \to T$ tale che $j = en$ ed $n(-, \mathbf{\Omega}) = id_{(-)}$. Se $\boldsymbol{F}$ è un'$\mathbf{\Omega}$-cornice, allora $n(A, \boldsymbol{F})$ è mono per ogni A in $\underline{E}$.*

Dim. Dal Lemma 5 (ii) usando il Teorema 4 ed il Corollario 6.

Osservazione 1. La mappa caratteristica di $A^I \rightarrowtail (\Omega^I)^A$ è

$$\{\alpha\varepsilon(\Omega^I)^A \,|\, \forall i\varepsilon I \exists\,!\, a\varepsilon A (i \in \alpha a)\}\ ;$$

dunque il Lemma 5 (iii) afferma che $A[\mathbf{\Omega}^I] = A^I$ come sottoggetti di $(\Omega^I)^A$, l'isomorfismo inverso essendo definito da $\{a \mapsto \{i \in I \,|\, fi = a\}\}$ per $f \in A^I$ (cfr. [**1**], [**3**], [**6**]).

2 - Un teorema di rappresentazione

Per $f\varepsilon B^A$ ed $X\varepsilon\Omega^A$ sia $\exists f(X) = \{b\varepsilon B \,|\, \exists a\varepsilon A(a \in X \wedge b = fa)\}$. Per $\xi\varepsilon G^F$ siano $\lambda(\xi)$, $\mu(\xi)$ e $\nu(\xi)$ rispettivamente le formule $\forall y,z\varepsilon F(\xi(y\cdot z) = \xi y\cdot\xi z)$, $\forall X\varepsilon\Omega^F(S\exists\xi(X) = \xi S(X))$ e $\xi 1^0 = 1^0$; sia $\vartheta(\xi)$ la congiunzione $\lambda(\xi)\wedge\mu(\xi)\wedge\nu(\xi)$. Si indichi con $V\colon C^{op}\times C \to \underline{E}$ la composizione del funtore dimenticante col funtore esponenziale, cioè $V(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}) = G^F$. Infine si consideri il morfismo composizione interna $c\colon B^A\times C^B \to C^A$, aggiunto del morfismo $ev_{B,C}(ev_{A,B}\times C^B)\colon A\times B^A\times C^B \to C$; dati due termini $t\varepsilon B^A$ ed $s\varepsilon C^B$ si indichi con $s{\circ}t$ il termine $c(\langle t, s\rangle)\varepsilon C^A$.

Definizione. Si dice *oggetto dei morfismi* (*di cornici*) *da* $\boldsymbol{F}$ *a* $\boldsymbol{G}$ il sottoggetto di $V(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$ che ha come mappa caratteristica $\{\xi\varepsilon V(F, G) \,|\, \vartheta(\xi)\}\colon V(F, G) \to \Omega$. Con $h(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})\colon H(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}) \rightarrowtail V(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$ si indicherà un fissato, ma arbitrario, rappresentante di tale sottoggetto.

Teorema 8. (i) *Se* $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ *ed* $\boldsymbol{H}$ *sono cornici e* $\xi\varepsilon V(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$ *e* $\zeta\varepsilon V(\boldsymbol{G},\boldsymbol{H})$, *allora* $\models\vartheta(\xi)\wedge\vartheta(\zeta)\Rightarrow\vartheta(\zeta\circ\xi)$. *Inoltre* $g\colon F\to G$ *è un morfismo di cornici se e solo se* $\models\vartheta(g^0)$. (ii) $H\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to\underline{E}$ *è un funtore ed* $h\colon H\dot{\rightarrowtail} V$.

Dim. (i) Si verifica facilmente. (ii) Segue da (i).

Osservazione 2. Vale una versione interna del teorema 20 di $[\mathbf{4}]_1$. Usando la Proposizione 2 (iv), si prova che per ξ, $\zeta\varepsilon F^{\Omega}$ e $z\varepsilon\Omega$ si ha che $\models\nu(\xi)\wedge\nu(\xi)\Rightarrow z=\cup\{w\varepsilon\Omega\,|\,\xi w=\zeta w\wedge z=w\})$; inoltre è facile dimostrare che

$$\models\mu(\xi)\wedge\mu(\zeta)\Rightarrow\xi\cup\{w\varepsilon\Omega\,|\,\xi w=\zeta w\wedge z=w\}=\zeta\cup\{w\varepsilon\Omega\,|\,\xi w=\zeta w\wedge z=w\}\,.$$

Da cui si deduce allora che $\models\vartheta(\xi)\wedge\vartheta(\zeta)\Rightarrow\xi z=\zeta z$, da cui si conclude con le 3.10 e 4.15(1) di [**3**] che $\models\vartheta(\xi)\wedge\vartheta(\zeta)\Rightarrow\xi=\zeta$. Ne segue che per $\xi\varepsilon V(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$ è $\models\vartheta(\xi)\Rightarrow\vartheta\circ\omega_F{}^0=\omega_G{}^0$.

Notato che $\boldsymbol{\Omega}^{(-)}\colon\underline{E}^{\mathrm{op}}\to C$ e posto $K(A,\boldsymbol{F})=V(\boldsymbol{\Omega}^A,\boldsymbol{F})$, è $K\colon\underline{E}\times C\to\underline{E}$. Sia $d(A,\boldsymbol{F})\colon N(A,\boldsymbol{F})\to K(A,\boldsymbol{F})$ definito da $d(A,\boldsymbol{F})(\alpha)X=S\exists\alpha(X)$ per $\alpha\varepsilon N(A,\boldsymbol{F})$ ed $X\varepsilon\Omega^A$. Talora si scriverà α^* in luogo di $d(A,\boldsymbol{F})(\alpha)$. Sia $H'\colon\underline{E}\times C\to\underline{E}$ definito da $H'(A,\boldsymbol{F})=H(\boldsymbol{\Omega}^A,\boldsymbol{F})$; si ponga $h'(A,\boldsymbol{F})=h(\boldsymbol{\Omega}^A,\boldsymbol{F})$ cosicchè $h'\colon H'\dot{\rightarrowtail}K$.

Lemma 9. *Siano* $f\colon A\to B$ *e* $g\colon\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{G}$, *siano* α, $\beta\varepsilon H(A,\boldsymbol{F})$, $X\varepsilon\Omega^A$ *ed* $Y\varepsilon\Omega^B$, $\xi\varepsilon K(A,\boldsymbol{F})$. *Allora*

(i) $\models\alpha^*\{a\}=\alpha a$, *dunque* $\models\alpha^*=\beta^*\Rightarrow\alpha=\beta$;
(ii) $\models d(A,\boldsymbol{G})(H(A,g)(\alpha))X=K(A,g)(d(A,\boldsymbol{F})(\alpha))X$;
(iii) $\models d(B,\boldsymbol{F})(H(f,\boldsymbol{F})(\alpha))Y=K(f,F)(d(A,\boldsymbol{F})(\alpha))Y$;
(iv) $\models\mu(\alpha^*)$;
(v) $\models\varrho(\alpha)\Leftrightarrow\nu(\alpha^*)$;
(vi) $\models\tau(\alpha)\Rightarrow\alpha^*X=S\{z\varepsilon F\,|\,\exists a\varepsilon A(z=\alpha a\cdot\omega(Xa))\}$;
(vii) $\models\tau(\alpha)\Rightarrow\lambda(\alpha^*)$;
(viii) $\models\tau(\alpha)\Rightarrow\vartheta(\alpha^*)$;
(ix) $\models\vartheta(\xi)\Rightarrow\sigma(\xi\circ\{\cdot\}^0)$;
(x) $\models\mu(\xi)\Rightarrow\xi=(\xi\circ\{\cdot\}^0)$;
(xi) $\models\vartheta(\xi)\Leftrightarrow\exists\,\alpha\varepsilon H(A,\boldsymbol{F})(\tau(\alpha)\wedge\xi=\alpha^*)$.

Dim. (i) Dal Teorema 12 (a) di $[\mathbf{4}]_1$ con la 4.17 di [**3**]. (ii) È un semplice calcolo: si applichi la (5) con $\exists a\varepsilon A(a\in X\wedge z=\alpha a)$ per $\varphi(z)$. (iii) Sostituendo $\pi(b)$ ed $\eta(b,z)$ nella (4) con $b\in Y$ ed $\exists a\varepsilon A(f(a)=b\wedge z=\alpha a)$ si ha che

$$\models d(B,\boldsymbol{F})(H(f,\boldsymbol{F})(\alpha))Y=S\{z\varepsilon F\,|\,\exists b\,\varepsilon B(b\in Y\wedge f(a)=b\wedge z=\alpha a)\}\,.$$

Da cui deriva l'asserto con le 3.21(1) e (16), 3.22(2) e 4.21(1) di [**3**]. (iv) Si usi la (4) e l'esempio 17 di $[\mathbf{4}]_1$. (v) Immediato, atteso che $\models\exists\alpha(A^0)=im(\alpha)$.

(vi) Dalla Proposizione 2 (vii) per le 2.8 e 2.9 di [**3**]. (vii) Siano $Y, Z\varepsilon\Omega^A$, da (iii), per la (3) con α^*Z per y ed $\exists a\varepsilon A(z = \alpha a\cdot\omega(Ya))$ per $\varphi(z)$, si deduce che $\models\tau(\alpha) \Rightarrow \alpha^*Y\cdot\alpha^*Z = S\{z\varepsilon F\,|\,\exists a\varepsilon A(z = \alpha a\cdot\omega(Ya)\cdot\alpha^*Z)$. Ora, usando la Proposizione 2 (vi), si ha che

$$\models\tau(\alpha) \Rightarrow \alpha^*Y\cdot\alpha^*Z = S\{z\varepsilon F\,|\,\exists a\varepsilon A(z = \alpha a\cdot\omega(Y\alpha\cdot Z\alpha))\}$$

dato che ω è un morfismo di cornici. Segue la tesi, dato che $\models(Y\cap Z)a = Ya\wedge Za$. (viii) Dai punti (iv), (v) e (vii) precedenti. (ix) Per le 4.17 e 4.16 di [**3**] e la Proposizione 2 (ii) si ha che

$$\models a''\in\{a\}\wedge a''\in\{a'\} \Leftrightarrow a''\in\{a\}\wedge a''\in\{x\,\varepsilon A\,|\,\delta(a, a') = true^0\}\ ,$$

dunque $\models\{a\}\cap\{a'\} = \{a\}\cap\omega\delta(a, a')$ per definizione di $\omega\colon \mathbf{\Omega}\to\mathbf{\Omega}^I$. Applicando ξ ad ambo i membri, segue l'asserto per l'osservazione 2 e la 2.28 di [**3**]. (x) Si applichi ξ ad ambo i membri dell'uguaglianza

$$\models Y = \cup\{Z\varepsilon\Omega^A\,|\,\exists a\varepsilon A(a\in Y\wedge Z = \{a\})\}$$

e si usi la (5). (xi) Dai punti (v) e (viii)-(x) precedenti, atteso che $d(A, \boldsymbol{F})$ è mono.

Teorema 10. (i) $d\colon H \dot{\rightarrowtail} K$. (ii) $A[\boldsymbol{F}]$ *è naturalmente isomorfo ad* $H(\mathbf{\Omega}^A, \boldsymbol{F})$, *precisamente, esiste un unico isomorfismo naturale* $d'\colon T \dot{\to} H'$ *tale che* $h'd' = de$.

Dim. (i) Dal Lemma 9 (ii) e (iv), grazie alle 3.20(1), 4.15(1) e 4.16(1) di [**3**] si trova che, per $f\colon A\to B$ e $g\colon \boldsymbol{F}\to\boldsymbol{G}$, valgono $d(A, \boldsymbol{G})H(A, g) = K(A, g)d(A, \boldsymbol{F})$ e $d(B, \boldsymbol{F})H(f, \boldsymbol{F}) = K(f, \boldsymbol{F})d(A, \boldsymbol{F})$, dunque $d\colon H \dot{\to} K$. Dal Lemma 9 (i) con la 4.10 di [**3**], si deduce che $d(A, \boldsymbol{F})$ è mono per ogni A ed $\boldsymbol{F}$. (ii) Segue dal Lemma 9 (xi). L'unicità deriva dal Teorema 8 (ii).

È interessante notare il seguente

Corollario. *La corrispondenza, che manda* $f\varepsilon B^A$ *nella controimmagine lungo* f, *è un isomorfismo naturale* $B^A \simeq H(\mathbf{\Omega}^B, \mathbf{\Omega}^A)$. *Così il funtore* $\mathbf{\Omega}^{(-)}\colon E^{\mathrm{op}}\to C$ *è pieno e fedele.*

Dim. $B^A \simeq B[\mathbf{\Omega}^A]$ tramite il morfismo che porta $f\varepsilon B^A$ in $\alpha\varepsilon B[\mathbf{\Omega}^A]$ definito da $\alpha b = \{a\varepsilon A\,|\,fa = b\}$. Poi $B[\mathbf{\Omega}^A] \simeq H(\mathbf{\Omega}^B, \mathbf{\Omega}^A)$ via $\alpha\mapsto\alpha^*$ ed

$$\alpha^*X = U\{Y\varepsilon\Omega^A\,|\,\exists b\varepsilon B(b\in X\wedge Y = \{a\varepsilon A\,|\,fa = b\})\} = \{a\varepsilon A\,|\,fa\in X\}$$

per $X\varepsilon\Omega^B$. L'ultima parte è un semplice argomento categoriale.

Bibliografia

[**1**] A. L. Foster, *Generalized « Boolean » theory of universal algebra* (Part I). *Subdirect sums and normal representation theorem*, Math. Z. **58** (1953), 306-336.

[**2**] T. K. Hu, *Distributive extensions and quasi-framal algebras*, Canad. J. Math. **18** (1966), 265-281.

[**3**] G. Osius, *Logical and set-theoretical tools in elementary topoi*, in « Model theory and topoi », Lecture Notes in Mathematics vol. 445, Springer-Verlag, Berlin 1975.

[**4**] G. Rosolini: $[\bullet]_1$ *Semireticoli e cornici in un topos*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 369-384; $[\bullet]_2$ *On lattice extensions*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **17**-A (1980), 274-279.

[**5**] D. I. Schlomiuk, *Logique des topos*, Les Presses de l'Université de Montréal 1976.

[**6**] G. C. Wraith, *Lectures on elementary topoi*, in « Model theory and topoi », Lecture Notes in Mathematics vol. 445, Springer-Verlag, Berlin 1975.

Summary

A characterization of frame extensions as particular objects of frame morphisms is given in an arbitrary elementary topos.

Added in proof: Many of the results can be deduced more easily, using the new theory of locales.

* * *