Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 251-265

A. TARSI SANTOLINI (*)

Comportamento asintotico per la soluzione di una disequazione parabolica quasi lineare (**)

Introduzione

Nel presente lavoro intendiamo studiare il comportamento, per $t \to \infty$, della norma in L^∞ della soluzione debole di una disequazione variazionale quasi-lineare di tipo parabolico

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \Big\{v_t(v-u) + \sum_1^n {}_i\, a_i(x,t,u,u_x)\frac{\partial}{\partial \xi_i}(v-u) + a(x,t,u,u_x)(v-u) + f(x,t)(v-u)\Big\}\, dx\, dt$$

$$\geqslant \tfrac{1}{2}\int_\Omega \{v(x,t_2)-u(x,t_2)\}^2\, dx - \tfrac{1}{2}\int_\Omega \{v(x,t_1)-u(x,t_1)\}^2\, dx\,.$$

Precisamente, supponendo che le funzioni $a_i(x,t,u,u_x)$ e $a(x,t,u,u_x)$ abbiano un andamento al più lineare rispetto a $|u|$ e $|\nabla u|$ e che la norma in $L^2(\Omega)$ di $f(x,t)$ tenda a 0 per $t \to \infty$, dimostreremo dapprima che la norma in $L^2(\Omega)$ di $u(x,t)$ è infinitesima per $t \to \infty$ e poi che la soluzione stessa soddisfa a disuguaglianze del tipo di De Giorgi-Nash. Sfruttando allora delle formule ricorrenti, proveremo che anche la norma in L^∞ di $u(x,t)$ tende a 0, per $t \to \infty$.

Risultati del tutto analoghi al nostro sono stati già ottenuti da Min Ming Tang in [4], per la soluzione forte $u(x,t)$ di una equazione di tipo

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Politecnico, Via Bonardi 9, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 20-XII-1979.

parabolico; a tale lavoro faremo spesso riferimento per quanto riguarda i risultati e le notazioni.

Infine anche noi, come nel lavoro sopra citato, supporremo l'esistenza di una soluzione $u(x, t)$; risultati circa l'esistenza e l'unicità di una soluzione debole della disequazione considerata possono trovarsi in [**2**].

1 – Sia Ω un dominio limitato dello spazio R^n, $n \geqslant 2$ di frontiera S e siano Q_T, $Q_{(t_1,t_2)}$, $Q_{\varrho,(t_1,t_2)}$ gli insiemi così definiti

$$Q_T = \Omega \times 0 \vdash\!\dashv T, \quad Q_{(t_1,t_2)} = \Omega \times t_1 \vdash\!\dashv t_2, \quad Q_{\varrho,(t_1,t_2)} = \{(x, t) \mid |x - x_0| < \varrho,\ t_1 < t < t_2\},$$

le cui superfici laterali saranno indicate rispettivamente con S_T, $S_{(t_1,t_2)}$, $S_{\varrho,(t_1,t_2)}$.

Considereremo poi i seguenti spazi di Banach:

$$\begin{aligned}
L^q(\Omega) &= \Big\{u(x) \,\Big|\, \|u\|_{q,\Omega} = \{\int_\Omega |u(x)|^q \,\mathrm{d}x\}^{1/q} < +\infty\Big\}, \\
L^{q,r}(Q_T) &= \Big\{u(x,t) \,\Big|\, \|u\|_{q,r,Q_T} = \{\int_0^T [\int_\Omega |u(x,t)|^q \,\mathrm{d}x]^{r/q} \mathrm{d}t\}^{1/r} < +\infty\Big\}, \\
W_2^{1,1}(Q_T) &= \Big\{u(x,t) \,\Big|\, \|u\|_{W_2^{1,1}(Q_T)} = \{\int_{Q_T} [|u|^2 + |\nabla u|^2 + |u_t|^2] \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\}^{\frac12} < +\infty\Big\}, \\
\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T) &= \Big\{u(x,t) \in W_2^{1,1}(Q_T) \,\Big|\, u(x,t) = 0 \text{ in } S_T\Big\}, \\
V_2(Q_T) &= \Big\{u(x,t) \,\Big|\, |u|_{Q_T} = \operatorname*{maxess}_{0\leqslant t\leqslant T} \|u\|_{2,\Omega} + \|u_x\|_{2,Q_T} < +\infty\Big\}, \\
V_2^{1,0}(Q_T) &= \Big\{u(x,t) \,\Big|\, |u|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u\|_{2,\Omega} + \|u_x\|_{2,Q_T} < +\infty\Big\}, \\
V_2^0(Q_T) &= \Big\{u(x,t) \in V_2(Q_T) \,\Big|\, u(x,t) = 0 \text{ in } S_T\Big\}.
\end{aligned}$$

Sia infine K un convesso di $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ contenente l'origine e sia $u(x,t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$ una soluzione della disequazione

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega v_t(v-u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \sum_1^n{}_i\, a_i(x,t,u,u_x)\frac{\partial}{\partial\xi_i}(v-u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,, \\
(1.1)\qquad & \\
&+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \{a(x,t,u,u_x) + f(x,t)\}(v-u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geqslant \tfrac12 \int_\Omega (v-u)^2\,\mathrm{d}x\Big]_{t_1}^{t_2},
\end{aligned}$$

$\forall v(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, $\forall t_1, t_2$, con la condizione

$$u(x, 0) = \varphi(x) \in L^2(\Omega)\,. \tag{1.2}$$

Supporremo sempre, nel seguito, che i coefficienti soddisfino alle seguenti condizioni

$$(1.3)\qquad \sum_1^n{}_i\, a_i(x, t, u, u_x) u_{\xi_i} \geqslant \nu |\nabla u|^2,$$

$$(1.4)\qquad |a_i(x, t, u, u_x)| \leqslant a(x, t)|u| + b(x, t)|\nabla u| + \varphi_1(x, t)\,,$$

$$(1.5)\qquad a(x, t, u, u_x)\, u \geqslant 0\,.$$

Dimostreremo ora il seguente

Lemma 1. *Sia* $u(x, t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$ *una soluzione della disequazione variazionale* (1.1) *con la condizione* (1.2), *i cui coefficienti soddisfino oltre alle* (1.3), (1.4), (1.5), *anche alla condizione seguente*

$$(1.6)\qquad \lim_{t\to\infty} \|f(x, t)\|_{2,\Omega} = 0\,;$$

allora anche la norma di $u(x, t)$ *in* $L^2(\Omega)$ *é infinitesima per* $t \to \infty$

$$(1.7)\qquad \lim_{t\to\infty} \|u(x, t)\|_{2,\Omega} = 0\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo, $\forall \varepsilon > 0$, una soluzione dell'equazione

$$(1.8)\qquad \begin{aligned} &u_\varepsilon(x, t) + \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon(x, t)}{\partial t} = u(x, t)\,, \\ &u_\varepsilon(x, 0) = \varphi(x)\,; \end{aligned}$$

come è ben noto $u_\varepsilon(x, t) \in \mathring{W}_2^{1,1}(Q_T)$ e, per $\varepsilon \to 0$, converge fortemente in $V_2^{1,0}(Q_T)$ verso $u(t, x)$. Poniamo poi nella (1.1)

$$t_1 = t - h\,, \qquad t_2 = t + h\,, \qquad v(x, t) = (1 - h)\, u_\varepsilon(x, t)\,,$$

per la (1.8), si ottiene

$$\begin{aligned} -\varepsilon(1-h)\int_{t-h}^{t+h}\int_\Omega \Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + (h^2 - h)\int_{t-h}^{t+h}\int_\Omega u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \\ + \int_{t-h}^{t+h}\int_\Omega \Big\{\sum_1^n{}_i\, a_i(x, \tau, u, u_x)\frac{\partial}{\partial \xi_i}(u_\varepsilon - u - hu_\varepsilon) \\ + [a(x, \tau, u, u_x) + f(x, \tau)][(u_\varepsilon - u - hu_\varepsilon)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \\ \geqslant \tfrac{1}{2}\int_\Omega (u_\varepsilon - u - hu_\varepsilon)^2\,\mathrm{d}x\,\Big|_{t-h}^{t+h}\,. \end{aligned}$$

Scegliendo $0 < h < 1$, integrando per parti e passando al limite per $\varepsilon \to 0$, si ricava la disuguaglianza

$$0 \geqslant \frac{1}{2} \int_\Omega u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x \,\Big|_{t-h}^{t+h} + \int_{t-h}^{t+h} \int_\Omega \sum_1^n{}_i\, a_i(x,\tau,u,u_x)\,\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau$$

$$+ \int_{t-h}^{t+h} \int_\Omega \{a(x,\tau,u,u_x) + f(x,\tau)\}\, u(x,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Di qui, dalla (1.3) e dalla (1.5) si deduce

$$\frac{1}{2} \int_\Omega u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x \,\Big|_{t-h}^{t+h} + \nu \int_{t-h}^{t+h} \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \tag{1.9}$$

$$\leqslant - \int_{t-h}^{t+h} \int_\Omega f(x,\tau)\, u(x,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_{t-h}^{t+h} \int_\Omega u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \frac{\varepsilon_1}{2} \int_{t-h}^{t+h} \int_\Omega f^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Ricordando che

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{e}{(\mathrm{mes}\,\Omega)^{2/n}} \int_\Omega u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\,,$$

e scegliendo ε_1 così grande che

$$\omega = \nu \frac{2e}{(\mathrm{mes}\,\Omega)^{2/n}} - \frac{1}{\varepsilon_1} > 0\,, \tag{1.10}$$

dalla (1.9) si ricava

$$\int_\Omega u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x \,\Big|_{t-h}^{t+h} + \omega \int_{t-h}^{t+h} \int_\Omega u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \leqslant \varepsilon_1 \int_{t-h}^{t+h} \int_\Omega f^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{1.11}$$

Ponendo ora $y(t) = \int_{t-h}^{t+h} \int_\Omega u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau$, da cui segue $y'(t) = \int_\Omega u^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x \,\big|_{t-h}^{t+h}$, si ha la disequazione

$$y'(t) + \omega y(t) \leqslant \varepsilon_1 \int_{t-h}^{t+h} \int_\Omega f^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{1.12}$$

Per l'ipotesi (1.7), fissato $\varepsilon > 0$ si consideri $t > t_\varepsilon$ per cui $\int_\Omega f^2(x,t)\,dx < \varepsilon/\varepsilon_1$; dalla (1.12) si ottiene allora $y'(t) + \omega y(t) < 2h\varepsilon$, $\forall t > t_\varepsilon$, da cui segue $d/dt\,(\exp[\omega t]y(t)) < 2h\varepsilon \exp[\omega t]$, ed integrando si ottiene

$$\exp[\omega t]y(t) \leqslant \frac{2h\varepsilon}{\omega}\{\exp[\omega t] - \exp[\omega t_\varepsilon]\} + \exp[\omega t_\varepsilon]y(t_\varepsilon)\,,$$

$$y(t) \leqslant \frac{2h\varepsilon}{\omega}\{1 - \exp[-\omega(t-t_\varepsilon)]\} + \exp[-\omega(t-t_\varepsilon)]y(t_\varepsilon)\,,$$

cioè

$$\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}\int_\Omega u^2(x,\tau)\,dx\,d\tau$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\omega}\{1 - \exp[-\omega(t-t_\varepsilon)]\} + \exp[-\omega(t-t_\varepsilon)]\frac{1}{2h}\int_{t_\varepsilon-h}^{t_\varepsilon+h}\int_\Omega u^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\,.$$

Passando allora al limite per $h \to 0$ e ricordando che $u(x,t) \in V_2^{1,0}(Q_{t_\varepsilon})$, si ottiene

$$\int_\Omega u^2(x,t)\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{\omega}\{1 - \exp[-\omega(t-t_\varepsilon)]\} + u^2(x,t_\varepsilon)\exp[-\omega(t-t_\varepsilon)]\,, \tag{1.13}$$

cioè la (1.7).

2 – Data $u(x,t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$ introduciamo ora le funzioni $u^k(x,t)$ e $u^{-k}(x,t)$, entrambe appartenenti a $V_2^{1,0}(Q_T)$, definite ponendo

$$u^k(x,t) = \max_{(x,t)\in Q_T}\{u(x,t) - k, 0\}\,, \qquad u^{-k}(x,t) = \max\{-u(x,t) - k, 0\}\,,$$

ed indichiamo rispettivamente con $Q_{\varrho,\tau}$, $A_{k,\varrho}(t)$, $A_{\bar{k},\varrho}(t)$ gli insiemi così definiti

$$Q_{\varrho,\tau} = \{|x - x_0| < \varrho,\ t_0 - \tau < t < t_0\}\,,$$

$$A_{k,\varrho}(t) = \{x \,|\, |x - x_0| < \varrho,\ u(x,t) > k\}\,,$$

$$A_{\bar{k},\varrho}(t) = \{x \,|\, |x - x_0| < \varrho,\ u(x,t) < -k\}\,.$$

Dimostriamo ora il seguente

Lemma 2. *Sia $u(x,t)$ una soluzione, appartenente a $V_2^{1,0}(Q_T)$, della dise-*

quazione variazionale (1.1) *i cui coefficienti soddisfino, oltre alle* (1.3) ... (1.7), *anche alle condizioni seguenti*

$$\|a(x,t)\|_{q,r,Q_{(t_0-\tau,T)}} + \|\varphi_1(x,t)\|_{q,r,Q_{(t_0-\tau,T)}} + \|f^2(x,t)\|_{q,r,Q_{(t_0-\tau,T)}} \leqslant M\,, \tag{2.1}$$

$$\|b^2(x,t)\|_{L^\infty(Q_{(t_0-\tau,T)})} \leqslant M\,, \qquad \textit{con} \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{r}+\frac{n}{2q}=1-\chi_1\,,\quad 0<\chi_1<1\,,\quad q\in\Big[\frac{n}{2(1-\chi_1)},\infty\Big]\,,\quad r\in\Big[\frac{1}{1-\chi_1},\infty\Big]\,; \tag{2.3}$$

allora $\forall k>0$ *e per* τ *abbastanza piccolo,* $u(x,t)$ *soddisfa alle seguenti disuguaglianze*

$$|u^k|^2_{Q_{\varrho-\sigma_1\varrho,\,\tau-\sigma_2\tau}\cap Q_{t_0}} \leqslant \gamma\Big\{\frac{1}{(\sigma_1\varrho)^2}+\frac{1}{\sigma_2\tau}\Big\}\|u^k\|^2_{2,Q_{\varrho,\tau}} + \gamma(k^2+1)\,\mu^{2(1+\chi)/\hat{r}}(k,\varrho,\tau)\,, \tag{2.4}$$

$$|u^{-k}|^2_{Q_{\varrho-\sigma_1\varrho,\,\tau-\sigma_2\tau}\cap Q_{t_0}} \leqslant \gamma\Big\{\frac{1}{(\sigma_1\varrho)^2}+\frac{1}{\sigma_2\tau}\Big\}\|u^{-k}\|_{2,Q_{\varrho,\tau}} + \gamma(k^2+1)\,\mu^{2(1+\chi)/\hat{r}}(\bar{k},\varrho,\tau)\,, \tag{2.5}$$

dove

$$\mu(k,\varrho,\tau)=\int_{t_0-\tau}^{t_0}\operatorname{mes}^{\bar{r}/\bar{q}} A_{k,\varrho}(t)\,dt\,,$$

$$\mu(\bar{k},\varrho,\tau)=\int_{t_0-\tau}^{t_0}\operatorname{mes}^{\bar{r}/\bar{q}} A_{\bar{k},\varrho}(t)\,dt\,,$$

$$\bar{r}=\frac{2r}{r-1}\,,\qquad \bar{q}=\frac{2q}{q-1}\,,\qquad \chi=\frac{2\chi_1}{n}\,,\qquad \hat{q}=\bar{q}(1+\chi),\ \ \hat{r}=\bar{r}(1+\chi)\,.$$

D i m o s t r a z i o n e. Sia $\xi(x,t)$ una funzione così definita

$$\begin{aligned} &0\leqslant\xi(x,t)\leqslant 1 && \text{in } Q_{\varrho,\tau}\,,\\ &\xi(x,t)\equiv 1 && \text{in } Q_{\varrho-\sigma_1\varrho,\,\tau-\sigma_2\tau}\,,\\ &\xi(x,t)=0 && \text{per } |x-x_0|\geqslant\varrho \ \text{ o } \ t<t_0-\tau\,,\\ &|\xi_x(x,t)|\leqslant\frac{c}{\sigma_1\varrho}\,,\ |\xi_t(x,t)|\leqslant\frac{c}{\sigma_2\tau}\,, \end{aligned} \tag{2.6}$$

e prendiamo come funzione $v(x, t) \in K$

$$v(x, t) = u_\varepsilon(x, t) - \xi^2(x, t)\, u^k_\varepsilon(x, t)\,,$$

che sostituiremo nella (1.1), avendo posto $t_1 = t_0 - h$, $t_2 = T \leqslant t_0$. Otterremo allora

$$\int_{t_0-h}^{T} \int_{\Omega} \Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - 2\xi\, \xi_t\, u^k_\varepsilon - \xi^2 \frac{\partial u^k_\varepsilon}{\partial t} \Big)(u_\varepsilon - u - \xi^2 u^k_\varepsilon)\, dx\, dt$$

$$+ \int_{t_0-h}^{T} \int_{\Omega} \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i(x, t, u, u_x) \Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \xi_i} - \frac{\partial u}{\partial \xi_i} - 2\xi_{\xi_i}\xi\, u^k_\varepsilon - \xi^2 \frac{\partial u^k}{\partial \xi_i} \Big)\, dx\, dt$$

$$+ \int_{t_0-h}^{T} \int_{\Omega} \{a(x, t, u, u_x) + f(x, t)\} \cdot (u_\varepsilon - u - \xi^2 u^k_\varepsilon)\, dx\, dt$$

$$\geqslant \tfrac{1}{2} \int_{\Omega} (u_\varepsilon - u - \xi^2 u^k_\varepsilon)^2\, dx \Big]_{t_0-h}^{T}\,,$$

e passando al limite per $\varepsilon \to 0$, con ragionamenti del tutto analoghi a quelli seguiti in **1**, otterremo infine

$$0 \geqslant \tfrac{1}{2} \int_{\Omega} \xi^2(x, t) \cdot u^{k^2}(x, t)\, dx \Big]_{t_0-\tau}^{T} - \int_{t_0-\tau}^{T} \int_{\Omega} \xi \xi_t\, u^{k^2}(x, t)\, dx\, dt$$

$$+ \int_{t_0-\tau}^{T} \int_{\Omega} \xi^2 \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i(x, t, u, u_x) \frac{\partial u^k}{\partial \xi_i}\, dx\, dt + 2 \int_{t_0-\tau}^{T} \int_{\Omega} \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i(x, t, u, u_x)\, u^k \xi \frac{\partial \xi}{\partial \xi_i}\, dx\, dt$$

$$+ \int_{t_0-\tau}^{T} \int_{\Omega} \{a(x, t, u, u_x) + f(x, t)\}\, \xi^2 u^k\, dx\, dt\,.$$

Ricordando poi che $\xi(x, t_0 - \tau) = 0$ e $u^k \neq 0$, $\nabla u^k \neq 0$ solo in $A_{k,\varrho}(t)$ e che in $A_{k,\varrho}(t)$ $\nabla u^k \equiv \nabla u$, per le ipotesi (1.3), (1.4), (1.5) si ottiene

$$\tfrac{1}{2} \int_{A_{k,\varrho}(T)} \xi^2(x, T)(u^k(x, T))^2\, dx + \nu \int_{t_0-\tau}^{T} \int_{A_{k,\varrho}(t)} \xi^2(x, t)\, |\nabla u^k|^2\, dx\, dt \tag{2.7}$$

$$\leqslant 2 \int_{t_0-\tau}^{T} \int_{A_{k,\varrho}(t)} \{a(x, t)\, |u| + b(x, t)\, |\nabla u| + \varphi_1(x, t)\}\, |u^k|\, |\xi \nabla \xi|\, dx\, dt$$

$$+ \int_{t_0-\tau}^{T} \int_{A_{k,\varrho}(t)} f(x, t)\, \xi^2 |u^k|\, dx\, dt + \int_{t_0-\tau}^{T} \int_{A_{k,\varrho}(t)} \xi \xi_t (u^k)^2\, dx\, dt\,.$$

Maggiorando opportunamente i termini al secondo membro, si ottiene

$$(2.8)\qquad 2\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} a(x,t)\,|u(x,t)|\,|u^k(x,t)|\,|\xi\nabla\xi|\,dx\,dt$$

$$\leqslant \int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} a^2(x,t)\,\xi^2 u^2(x,t)\,dx\,dt + \int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} |u^k(x,t)|^2|\nabla\xi|^2\,dx\,dt$$

$$\leqslant 2\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} \xi^2 a(x,t)\{(u-k)^2+k^2\}\,dx\,dt + \int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} |u^k|^2|\nabla\xi|^2\,dx\,dt$$

$$\leqslant \int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} |u^k|^2|\nabla\xi|^2\,dx\,dt$$

$$+\,2\|a(x,t)\|_{q,r,Q(t_0-\tau,T)}\Big\{\|\xi u^k\|^2_{\bar q,\bar r,Q(t_0-\tau,T)} + \|k\|^2_{\bar q,\bar r,Q^k_\varrho(t_0-\tau,T)}\Big\}$$

avendo posto

$$\bar q = 2q/(q-1),\quad \bar r = 2r/(r-1),$$

$$Q^k_{\varrho,(t_0-\tau,T)} = \{(x,t)/u(x,t)>k,\ |x-x_0|<\varrho,\ t_0-\tau<t<T\}\,.$$

Sia ora $\hat q = \bar q(1+\chi)$, $\hat r = \bar r(1+\chi)$; ricordando che

$$\|k\|^2_{\bar q,\bar r,Q^k_\varrho(t_0-\tau,T)} = k^2\Big\{\int_{t_0-\tau}^{T}\{\operatorname{mes}A_{k,\varrho}(t)\}^{\bar r/\bar q}\,dt\Big\}^{2/\bar r}$$

$$= k^2\mu^{2(1+\chi)/\hat r}(k,\varrho,\tau)\,,$$

e che, poichè $1/\hat r + n/2\hat q = n/4$,

$$\|\xi u^k\|^2_{\bar q,\bar r,Q(t_0-\tau,T)} \leqslant \|\xi u^k\|_{\hat q,\hat r\,Q(t_0-\tau,T)}\Big\{\int_{t_0-\tau}^{T}\{\operatorname{mes}A_{k,\varrho}(t)\}^{\bar r/\bar q}\,dt\Big\}^{1/\bar r-1/\hat r}$$

$$\leqslant \|\xi u^k\|_{\hat q,\hat r\,Q(t_0-\tau,T)}\,\mu^{\chi/\hat r}(k,\varrho,\tau) \leqslant \beta\,|\xi u^k|_{Q(t_0-\tau,T)}\;\mu^{\chi/\hat r}(k,\varrho,\tau)^{\bar{\bar{2}}}$$

sostituendo nella (2.8) si ottiene infine, per la (2.1)

$$(2.9)\qquad 2\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} \xi^2 a(x,t)\,|u(x,t)|\,|u^k(x,t)|\,|\xi\nabla\xi|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant 2M\{\beta^2|u^k\xi|^2_{Q(t_0-\tau,T)}\mu^{2\chi/\hat{r}}(k,\varrho,\tau)+k^2\mu^{2(1+\chi)/\hat{r}}(k,\varrho,\tau)\}$$

$$+\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)}|u^k|^2|\nabla\xi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

Analogamente si ottiene

$$(2.10)\qquad 2\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} b(x,t)\,|\nabla u|\,|u^k|\,\xi\,|\nabla\xi|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{\varepsilon_1}\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)}|\nabla u^k|\,\xi^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$+\varepsilon_1 M\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)}|u^k|^2|\nabla\xi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

$$(2.11)\qquad 2\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)}\varphi_1(x,t)\,|u^k|\,|\xi\nabla\xi|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)}\varphi_1^2(x,t)\,\xi^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)}|u^k|^2|\nabla\xi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant M\mu^{2(1+\chi)/\hat{r}}(k,\varrho,\tau)+\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)}|u^k|^2|\nabla\xi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,$$

$$(2.12)\qquad \int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} f(x,t)\,\xi^2\,|u^k|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} f^2(x,t)\,\xi^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)}\xi^2|u^k|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant M\mu^{2(1+\chi)/\hat{r}}(k,\varrho,\tau)+\beta^2|u^k\xi|^2_{Q(t_0-\tau,T)}\mu^{2\chi/\hat{r}}(k,\varrho,\tau)\,.$$

Dalle (2.9) ... (2.12) sostituendo nella (2.7) si ottiene

$$(2.13)\qquad \tfrac{1}{2}\int_{A_{k,\varrho}(t)}\xi^2(x,T)\,|u^k(x,T)|^2\,\mathrm{d}x+\Big(\nu-\frac{1}{\varepsilon_1}\Big)\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)}\xi^2|\nabla u^k|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)}|\xi\xi_t|\,|u^k|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+(2+\varepsilon_1 M)\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)}|u^k|^2|\nabla\xi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$+\{2M+1\}\beta^2|u^k\xi|^2_{Q(t_0-\tau,T)}\mu^{2\chi/\hat{r}}(k,\varrho,\tau)+2M(k^2+1)\,\mu^{2(1+\chi)/\hat{r}}(k,\varrho,\tau)\,.$$

Prendendo poi ε_1 così grande che, posto $\mu = \nu - 1/\varepsilon_1$, risulti $\mu > 0$, dalla (2.13) otteniamo allora

$$(2.14)\qquad \frac{1}{2}\int_{A_{k,\varrho}(T)} \xi^2(x,T)\,|u^k(x,T)|^2\,\mathrm{d}x - \gamma_1 \mu^{2\chi/\hat{r}}(k,\varrho,\tau) \max_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant T} \int_{A_{k,\varrho}(t)} \xi^2 |u^k|^2\,\mathrm{d}x$$

$$+ \{\mu - 2\gamma_1\mu^{2\chi/\hat{r}}(k,\varrho,\tau)\}\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} |\nabla u^k \xi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \{\gamma_2 + \gamma_1 \mu^{2\chi/\hat{r}}(k,\varrho,\tau)\}\|u^k\nabla\xi\|^2_{2,Q_{(t_0-\tau,T)}}$$

$$+ \int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} |\xi\xi_t|\,|u^k(x,t)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \gamma_3(1+k^2)\,\mu^{2(1+\chi)/\hat{r}}(k,\varrho,\tau)\,.$$

Poichè la funzione $\mu(k,\varrho,\tau)$ è infinitesima al tendere di ϱ e τ a zero, si può sempre fare in modo che $\gamma_1\mu^{2\chi/\hat{r}}(k,\varrho,\tau) < \min(1/4, \mu/4)$; si avrà allora, ricordando le (2.6)

$$(2.15)\qquad \frac{1}{2}\int_{A_{k,\varrho}(t)} \xi^2(x,T)\,|u^k(x,T)|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\max_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} |u^k\xi|^2\,\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{\mu}{2}\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} |\nabla u^k\xi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{c}{\sigma_2\tau}\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} |u^k(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$+ \frac{2\gamma_2}{(\sigma_1\varrho)^2}\int_{t_0-\tau}^{T}\int_{A_{k,\varrho}(t)} |u^k(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \gamma_3(1+k^2)\,\mu^{2(1+\chi)/\hat{r}}(k,\varrho,\tau)\,,$$

e di qui, poichè $\xi(x,t)\equiv 1$ in $Q_{\varrho-\sigma_1\varrho,\,\tau-\sigma_2\tau}$ si ottiene infine

$$|u^k|^2_{Q_{\varrho-\sigma_1\varrho,\,\tau-\sigma_2\tau}}$$

$$\leqslant \gamma\left\{\left(\frac{1}{\sigma_2\tau} + \frac{1}{(\sigma_1\varrho)^2}\right)\|u^k\|^2_{2,Q_{\varrho,\tau}} + (k^2+1)\,\mu^{2(1+\chi)/\hat{r}}(k,\varrho,\tau)\right\}.$$

Con ragionamenti del tutto analoghi si dimostra anche la (2.5).

3 – Sia ora h un qualsiasi intero positivo ed introduciamo le seguenti grandezze

$$k_h = k + k\left(1 - \frac{1}{2^h}\right), \qquad \varrho_h = \frac{\varrho}{2}\left(1 + \frac{1}{2^h}\right), \qquad \tau_h = \frac{\tau}{2}\left(1 + \frac{1}{2^h}\right),$$

$$y_h = \int_{t_0-\tau_h}^{t_0} \int_{A_{k_h,\varrho_h}(t)} (u - k_h)^2 \, dx \, dt, \qquad \hat{y}_h = \int_{t_0-\tau_h} \int_{A_{\bar{k}_h,\varrho_h}(t)} (u + k_h)^2 \, dx \, dt,$$

$$z_h = \mu^{2/r}(k_h, \varrho_h, \tau_h), \qquad \hat{z}_h = \mu^{2/r}(\bar{k}_h, \varrho_h, \tau_h);$$

dimostreremo il seguente

Lemma 3.1. *Se $u(x,t)$ soddisfa alle limitazioni* (2.4), (2.5) *allora y_h, z_h e $\hat{y}_h$, $\hat{z}_h$ sono legate fra loro dalle relazioni ricorrenti*

$$y_{h+1} \leqslant \sigma_1 2^{4h} \cdot (1 + k^{-2})\left(1 + \frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{1}{\varrho^2} \left(y_h^{1+\delta} + z_h^{1+\varkappa} y_h^{\delta}\right), \tag{3.1}$$

$$z_{h+1} \leqslant \sigma_1 2^{4h} \cdot (1 + k^{-2})\left(1 + \frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{1}{\varrho^2} \left(y_h + z_h^{1+\varkappa}\right), \tag{3.2}$$

$$con \ \delta = \frac{2}{n+2}.$$

$$\hat{y}_{h+1} \leqslant \sigma_1 2^{4h} \cdot (1 + k^{-2})\left(1 + \frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{1}{\varrho^2} \left(\hat{y}_h^{1+\delta} + \hat{z}_h^{1+\varkappa} \hat{y}_h^{\delta}\right), \tag{3.3}$$

$$\hat{z}_{h+1} \leqslant \sigma_1 2^{4h} \cdot (1 + k^{-2})\left(1 + \frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{1}{\varrho^2} \left(\hat{y}_h + \hat{z}_h^{1+\delta}\right), \tag{3.4}$$

Dimostrazione. Sia $\lambda_h = \int_{t_0-\tau_{h+1}}^{t_0} \operatorname{mes} A_{k_{h+1},\varrho_h}(t) \, dt$, e sia $\xi_h(x)$ una funzione così definita

$$\xi_h(x) \begin{cases} \equiv 1 & \text{per } |x - x_0| < \varrho_{h+1} \\ \equiv 0 & \text{per } |x - x_0| > \frac{1}{2}(\varrho_h + \varrho_{h+1}) = \bar{\varrho}_h \\ \leqslant 1 & \text{con } |\xi_{hx}| < \dfrac{2^{h+1}}{\varrho} \text{ per } \bar{\varrho}_h < |x - x_0| < \varrho_h . \end{cases}$$

Avremo allora

$$y_{h+1}=\int_{t_0-\tau_{h+1}}^{t_0}\int_{A_{k_{h+1},\varrho_{h+1}}(t)}(u-k_{h+1})^2\xi_h^2(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \beta^2\lambda_h^{2/n+2}|u^{k_{h+1}}\xi_h|^2_{Q_{\bar\varrho_h},(t_0-\tau_{h+1},t_0)}$$

$$\leqslant 2\beta^2\lambda_h^{2/(n+2)}\{\max_{t_0-\tau_{h+1}<t<t_0}\int_{A_{k_{h+1},\bar\varrho_h}(t)}(u-k_{h+1})^2\xi_h^2\,\mathrm{d}x$$

$$+2\int_{t_0-\tau_{h+1}}^{t_0}\int_{A_{k_{h+1},\bar\varrho_h}(t)}u_x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+2\frac{4^{h+1}}{\varrho^2}\int_{t_0-\tau_{h+1}}^{t_0}\int_{A_{k_{h+1},\bar\varrho_h}(t)}(u-k_{h+1}))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\},$$

e applicando la (2.4) si ottiene

$$y_{h+1}\leqslant 4\beta^2\lambda_h^{2/n+2}\{\gamma_1[(\frac{2^{h+3}}{\tau}+\frac{4^{h+3}}{\varrho^2})\|u^{k_{h+1}}\|^2_{Q_{\varrho_h},(t_0-t_h,t_0)} \tag{3.5}$$

$$+(k_{h+1}^2+1)\mu^{2(1+\varkappa)/\hat r}(k_h,\varrho_h,\tau_h)]+\frac{4^{h+1}}{\varrho^2}\int_{t_0-\tau_h}^{t_0}\int_{A_{k_{h+1},\varrho_h}(t)}(u-k_{h+1})^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\}.$$

Si ha poi

$$\lambda_h\leqslant\frac{1}{(k_{h+1}-k_h)^2}\int_{t_0-\tau_{h+1}}^{t_0}\int_{A_{k_{h+1}\varrho_h}(t)}(u-k_h)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{4^{h+1}}{k^2}y_h,$$

e sostituendo nella (3.5) si ottiene

$$y_{h+1}\leqslant 4\beta^2(\frac{4^{h+1}}{k^2})^{2/n+2}y_h^{2/n+2}[\gamma_1\{[\frac{2^{h+3}}{\tau}+\frac{4^{h+3}}{\varrho^2}]y_h$$

$$+(4k^2+1)z_h^{1+\varkappa}\}+\frac{4^{h+1}}{\varrho^2}y_h]$$

$$\leqslant\gamma_3\frac{2^{4h}}{k^{2\delta}}(k^2+1)[(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\varrho^2})y_h^{1+\delta}+z_h^{1+\varkappa}y_h^\delta+\frac{1}{\varrho^2}y_h^{1+\delta}],$$

ed infine si ricava, per k abbastanza piccolo,

$$y_{h+1}\leqslant\sigma_1 2^{4h}\frac{k^2+1}{k^2}\frac{1}{\varrho^2}(1+\frac{1}{\tau})[y_h^{1+\delta}+z_h^{1+\varkappa}y_h^\delta],$$

cioè la (3.1).

Dimostriamo ora la (3.2). Si ha

$$(k_{h+1}-k_h)^2 z_{h+1} \leqslant \|u^{k_h}\xi_h\|^2_{\hat{q},\hat{r}\, Q_{\varrho_h}(t_0-\tau_{h+1},\, t_0)} \leqslant \beta^2 |u^{k_h}\xi_h|^2_{\overline{Q}_{\varrho_h}(t_0-\tau_{h+1},\, t_0)}$$

$$\leqslant 4\beta^2 \Big\{|u^{k_h}|^2_{\overline{Q}_{\varrho_h},(t_0-\tau_{h+1},\, t_0)} + \frac{4^{h+1}}{\varrho^2}\int_{t_0-\tau_{h+1}}^{t_0}\int_{A_{k_h,\,\varrho_h}(t)} (u-k_h)^2\, dx\, dt\Big\}$$

ed applicando la (2.4) si ottiene

$$z_{h+1}(k_{h+1}-k_h)^2 \leqslant 4\beta^2\Big[\gamma_1\Big\{\Big[\frac{2^{h+3}}{\tau}+\frac{4^{h+3}}{\varrho^2}\Big]y_h + (k_{h+1}^2+1)z_h^{1+\chi}\Big\} + \frac{4^{h+1}}{\varrho^2}y_h\Big] \tag{3.6}$$

$$\leqslant \gamma_3(k^2+1)\frac{1}{\varrho^2}\Big(1+\frac{1}{\tau}\Big)\{y_h+z_h^{1+\chi}\}$$

e, poichè $(k_h-k_{h+1})^2 = k^2/2^{2h+2}$, si ha infine

$$z_{h+1} \leqslant \sigma_1 2^{4h}\frac{k^2+1}{k^2}\frac{1}{\varrho^2}\Big(1+\frac{1}{\tau}\Big)\{y_h+z_h^{1+\chi}\}\,. \tag{3.7}$$

Potremo ora dimostrare il

Teorema 3.1. *Sia* $u(x, t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$ *una soluzione della disequazione* (1.1), *i cui coefficienti soddisfino alle condizioni* (1.3) ... (1.7) *e* (2.1) ... (2.3); *allora risulta* $\lim_{t\to\infty} u(x, t) = 0$.

Dimostrazione. Poniamo nella (3.1) e (3.2)

$$b = 2^4, \qquad c = \sigma_1\frac{k^2+1}{k^2}\Big(1+\frac{1}{\tau}\Big)\frac{1}{\varrho^2};$$

le relazioni stesse equivalgono alle seguenti

$$y_{h+1} \leqslant cb^h(y_h^{1+\delta} + y_h^{\delta}\cdot z_h^{1+\chi})\,, \qquad z_{h+1} \leqslant cb^h(y_h + z_h^{1+\chi})\,.$$

Allora, posto

$$d = \min\Big(\delta, \frac{\chi}{\chi+1}\Big), \qquad \lambda = \min[(2c)^{-1/\delta}b^{-1/d\delta}, (2c)^{-(1+\chi)/\chi}b^{-1/\chi\delta}],$$

sfruttando un lemma ben noto (cfr. [3] pag. 96), potremo dedurre che risulta

$$y_h \leqslant \lambda b^{-h/d}, \qquad z_h \leqslant \{\lambda b^{-h/d}\}^{1/(1+\chi)}, \tag{3.8}$$

se riusciremo a dimostrare che

$$y_0 \leqslant \lambda, \qquad z_0 \leqslant \lambda^{1/1+\chi}. \tag{3.9}$$

Per questo basta osservare che λ è infinitesima dello stesso ordine di $k^{2/\sigma}$

$$\lambda = \sigma k^{2/\delta}, \tag{3.10}$$

poichè $\dfrac{1}{\delta} < (1+\chi)/\chi$, essendo $\chi = 2\chi_1/n$, con $\chi_1 < 1$. Posto ora

$$\beta(t_0) = \int_{t_0-3/4\tau}^{t_0} \int_\Omega u^2(x,t)\,dx\,dt$$

per il Lemma (1.1) avremo $\lim\limits_{t_0\to\infty} \beta(t_0) = 0$. D'altra parte si ha

$$z_0 = \int_{t_0-3/4\tau}^{t_0} \operatorname{mes}^{2/\hat{r}} A_{k,3/4\varrho}(t)\,dt \leqslant \Big\{\int_{t_0-3/4\tau}^{t_0} \operatorname{mes} A_{k,3/4\varrho}(t)\,dt\Big\}^{2/\hat{r}}$$

$$k^2 \int_{t_0-3/4\tau}^{t_0} \operatorname{mes} A_{k,3/4\varrho}(t)\,dt \leqslant \int_{t_0-3/4\tau}^{t_0} \int_\Omega u^2(x,t)\,dx\,dt = \beta(t_0);$$

pertanto risulta

$$z_0 \leqslant \left(\frac{\beta(t_0)}{k^2}\right)^{2/\hat{r}}.$$

Se poniamo $k^2 = \beta^\nu(t_0)$, si avrà $z_0 \leqslant \beta^{2(1-\nu)/\hat{r}}(t_0)$, e risulterà verificata la seconda delle (3.9) se ν soddisfa alla condizione $(2/\hat{r})(1-\nu) > \gamma\delta/(1+\chi)$, da cui segue

$$\frac{2\delta}{\bar{r}+2\delta}. \tag{3.11}$$

Per la prima delle (3.9) basta osservare che si ha

$$y_0 = \int_{t_0-3/4\tau} \int_{A_{k,3/4\varrho}(t)} (u-k)^2\,dx\,dt \leqslant \beta(t_0),$$

e la diseguaglianza richiesta sarà verificata se

$$\gamma < \delta . \tag{3.12}$$

Allora, dalle (3.8), possiamo dedurre

$$\lim_{h\to 0} y_h = 0 , \qquad \lim_{h\to 0} z_h = 0 , \tag{3.13}$$

e quindi in particolare

$$\int_{t_0-\tau/2}^{t_0} \operatorname{mes} A_{2k,\varrho/2}(t)\, dt = 0 ,$$

cioè che

$$u(x, t) \leqslant 2k = 2\beta^{\gamma/2}(t_0) \qquad \text{q.o. in } Q_{\varrho/2,(t_0-\tau/2,\, t_0)} .$$

Con ragionamenti analoghi si può dimostrare anche che

$$\int_{t_0-\tau/2}^{t_0} \operatorname{mes} A_{2\bar{k},\varrho/2}(t)\, dt = 0 ,$$

pertanto $u(x, t) \geqslant -2\beta^{\gamma/2}(t_0)$ q.o. in $Q_{\varrho/2,(t_0-\tau/2,\, t_0)}$.

Poichè Ω è chiuso e limitato, può essere ricoperto con un numero finito di tali cilindri $Q_{\varrho/2,(t_0-\tau/2,\, t_0)}$ e pertanto $\|u(x, t)\|_{L^\infty(Q_{(t_0-\tau/2,\, t_0)})} \leqslant 2m\beta^{\gamma/2}(t_0)$ e l'asserto del teorema segue dal fatto che $\beta(t_0) \to 0$ per $t_0 \to \infty$.

Bibliografia

[1] H. Beiras da Veiga et J. P. Dias, *Regularité des solutions d'une equation parabolique non lineaire avec des contraintes unilaterales sur la frontiere,* Ann. Inst. Fourier (4) **22** (1972), 161-192.

[2] N. Kemochi, (in corso di stampa).

[3] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type,* Amer. Math. Soc. Providence R. I. (1968.)

[4] M. M. Tang, *Asimptotic stability of some quasi-linear parabolic equations in divergence L^∞ results,* J. Math. Anal. Appl. **57** (1977), 368-381.

Summary

We study the asymptotic behaviour of the weak solution $u(x, t)$ of a quasi-linear parabolic variational inequality. We show that: $\lim_{t\to\infty} u(x, t) = 0$.

* * *