

E. COMPARINI FATTORI (*)

Onde TE, TM in guide dielettriche (**)

Introduzione

In un precedente lavoro ⁽¹⁾ si è dimostrato che in una guida dielettrica non possono propagarsi onde e.m. trasversali di tipo TEM ⁽²⁾.

Ci proponiamo di mostrare in quanto segue che possono invece propagarsi nella stessa guida dielettrica, e sotto determinate condizioni, modi TE e TM. È appunto oggetto di questa nota far vedere che tali modi possono propagarsi soltanto in guide aventi sezione normale di forma circolare (o di corona circolare), ed inoltre se e soltanto se i campi variano secondo la sola componente radiale.

1 - Intendiamo, qui come al solito, per modi TE (rispettivamente TM) quei campi e.m. i cui vettori (complessi) \mathbf{E} , \mathbf{H} , soluzioni delle equazioni di Maxwell, siano, con le solite notazioni per gli indici ⁽³⁾,

$$(1) \quad \mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_t(P) + E_z(P) \mathbf{k}, \quad \mathbf{H}(P) = \mathbf{H}_t(P) + H_z(P) \mathbf{k},$$

con

$$(2) \quad \mathbf{E}(P) = [\mathbf{E}_t(x, y) + E_z(x, y) \mathbf{k}] e^{-i\beta z}, \quad \mathbf{H}(P) = [\mathbf{H}_t(x, y) + H_z(x, y) \mathbf{k}] e^{-i\beta z},$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, V.le Morgagni 67/A, 50134 Firenze, Italy.

(**) Ricevuto: 28-II-1980.

⁽¹⁾ E. COMPARINI FATTORI, *Onde e.m. di tipo trasversale in una guida dielettrica*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 819-825.

⁽²⁾ In questa nota si definisce la guida dielettrica in esame così come è stata definita nel lavoro precedente, del quale sono adottati qui anche simbolismo e terminologia.

⁽³⁾ È sottinteso, come di consueto, l'esponentiale $e^{i\omega t}$, esprime la dipendenza temporale. Sono indicati qui con \mathbf{E}_t , \mathbf{H}_t i componenti trasversali dei vettori del campo, con E_z , H_z le componenti longitudinali, con \mathbf{k} il versore dell'asse longitudinale z della guida, con β la costante di propagazione lungo l'asse z .

cioè tali che la dipendenza dalla variabile longitudinale z sia espressa soltanto dall'esponenziale $e^{-i\beta z}$ (4); questi campi sono detti modi TE se è $E_z(x, y) = 0$; modi TM se è invece $H_z(x, y) = 0$.

2 - Modi TE

Ricerchiamo innanzitutto i modi TE, i cui vettori sono

$$(2)' \quad \mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_t(x, y) e^{-i\beta z}, \quad \mathbf{H}(P) = \mathbf{H}_t(x, y) e^{-i\beta z} + H_z(x, y) \mathbf{k} e^{-i\beta z}.$$

Condizione necessaria per l'esistenza del modo TE espresso dalle (2)' è che i vettori \mathbf{E} , \mathbf{H} soddisfino alle condizioni al contorno, cioè alle condizioni di continuità sulle superfici di separazione tra i vari dielettrici costituenti la guida e tra la guida dielettrica e il vuoto (5).

In particolare avremo

$$(3) \quad \left[\frac{\partial H_{zi}}{\partial n} - \frac{\partial H_{zj}}{\partial n} \right]_{s_{ij}} = 0,$$

$$(4) \quad \left[\varepsilon_i \frac{\partial H_{zi}}{\partial n} - \varepsilon_j \frac{\partial H_{zj}}{\partial n} \right]_{s_{ij}} = 0,$$

$$(5) \quad [H_{zi} - H_{zj}]_{s_{ij}} = 0, \quad \left[\frac{\partial H_{zi}}{\partial t} - \frac{\partial H_{zj}}{\partial t} \right]_{s_{ij}} = 0,$$

dove s_{ij} è il contorno tra due qualsiasi porzioni distinte S_i , S_j della sezione normale della guida, occupata dai dielettrici di costanti ε_i , ε_j rispettivamente (6) (con S_0 verrà indicata la eventuale porzione di sezione normale, nella quale il dielettrico sia il vuoto); con $\partial/\partial t$, $\partial/\partial n$ sono indicate le derivate direzionali fatte nelle direzioni dei versori \mathbf{t} , \mathbf{n} rispettivamente tangente e normale nel generico punto del contorno s_{ij} (cfr. fig. 1); i componenti trasversali \mathbf{E}_t , \mathbf{H}_t sono stati espressi mediante le note relazioni (7)

$$(6) \quad (\varepsilon\mu\omega^2 - \beta^2) \mathbf{E}_t = -i\omega\mu \text{grad } H_z \wedge \mathbf{k}, \quad (\varepsilon\mu\omega^2 - \beta^2) \mathbf{H}_t = -i\beta \text{grad } H_z.$$

(4) Non sussistendo la trasversalità dei vettori \mathbf{E} , \mathbf{H} , non è possibile dimostrare la necessità della dipendenza da z tramite il solo esponenziale $e^{-i\beta z}$. Come vedremo più avanti, è comunque possibile dimostrare che i vettori \mathbf{E} , \mathbf{H} espressi dalle (2) rappresentano gli unici modi che si possono propagare nella guida.

(5) Ammettiamo, per ciascuno dei dielettrici, l'omogeneità in tutti i punti di ogni retta parallela all'asse longitudinale della guida.

(6) Supponiamo che ciascuno dei dielettrici costituenti la guida abbia costante dielettrica uniforme su ogni retta parallela all'asse longitudinale della guida.

(7) Cfr. p. es. D. GRAFFI, *Onde elettromagnetiche*, Istituto Superiore delle Telecomunicazioni, Roma 1958.

Osservando la (4) e la seconda delle (5), si nota subito che, essendo $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$, deve essere necessariamente

$$\left[\frac{\partial H_{zi}}{\partial t} \right]_{s_{ij}} \equiv \left[\frac{\partial H_{zj}}{\partial t} \right]_{s_{ij}} \equiv 0 .$$

Così le linee s_{ij} di contorno tra le due porzioni S_i, S_j devono essere linee $H_z = \text{costante}$.

Le (3), (4), (5) esprimono nell'ordine la continuità della componente tangenziale del vettore elettrico, della componente normale del vettore spostamento, della componente tangenziale del vettore magnetico, attraverso i contorni s_{ij} .

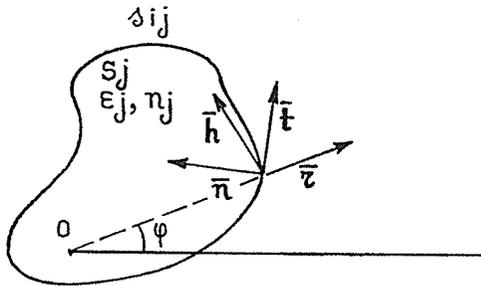


Fig. 1

Per quanto già dimostrato, le componenti longitudinali E_{zi}, H_{zi} del campo non possono essere entrambe nulle, in quanto nella guida non è possibile che si propaghi un modo TEM. La componente H_{zi} sarà pertanto non nulla, e dovrà essere nella generica porzione S_i della sezione S della guida soluzione dell'equazione

$$(7) \quad \Delta H_{zi} + h_i^2 H_{zi} = 0, \quad \text{con} \quad (8) \quad h_i^2 = \omega^2 \varepsilon_i \mu - \beta^2,$$

dove si è posto $\beta^2 = \beta_i^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$), coerentemente alla ovvia ipotesi che le costanti β_i nei vari mezzi abbiano lo stesso valore.

Ora, com'è ben noto, il segno della costante h_i^2 condiziona fortemente la natura delle soluzioni della (7).

Nel caso delle guide metalliche è noto che h_i^2 è una quantità non negativa. E quindi le soluzioni della (7) sono autofunzioni, determinabili imponendo ai vettori del campo di soddisfare alle condizioni al contorno.

Nel caso della guida dielettrica in esame, indichiamo con S_i la porzione della sezione della guida il cui indice di rifrazione $n_i = \sqrt{\varepsilon_i}$ sia maggiore degli indici di rifrazione delle porzioni adiacenti. Per brevità supponiamo che la guida sia costituita da un cilindro di dielettrico di costante ε_i interamente circondato da un dielettrico di costante $\varepsilon_j < \varepsilon_i$, che supporremo inoltre, per fissare le idee, infinitamente esteso ⁽⁸⁾, cosicchè la guida risulti costituita da un « nocciolo » cilindrico di sezione S_i circondato dalla regione S_j infinitamente estesa.

È noto dall'Ottica elementare che la relazione

$$(9) \quad n_i > n_j,$$

qui ovviamente verificata, è condizione necessaria perchè si abbia il confinamento dei modi nella porzione S_i ⁽⁹⁾.

Inoltre sarà anche $h_i^2 > 0$ in S_i , mentre nella porzione S_j sarà $h_j^2 < 0$ ⁽¹⁰⁾.

Pertanto, ammessa la (9) le equazioni dei possibili campi sono le seguenti

$$(11)_1 \quad E_{z_i} = 0, \quad \Delta H_{z_i} + h^2 H_{z_i} = 0,$$

$$(11)_2 \quad E_{t_i} h^2 = -i\omega\mu \operatorname{grad} H_{z_i} \wedge \mathbf{k} \quad (h^2 \geq 0),$$

$$(11)_3 \quad H_{t_i} h^2 = -i\beta \operatorname{grad} H_{z_i} \quad \forall P_i \in S_i,$$

$$(12)_1 \quad E_{z_j} = 0, \quad \Delta H_{z_j} - \gamma^2 H_{z_j} = 0,$$

$$(12)_2 \quad -E_{t_j} \gamma^2 = -i\omega\mu \operatorname{grad} H_{z_j} \wedge \mathbf{k} \quad (\gamma^2 = \beta^2 - \omega^2 \varepsilon_j \mu > 0),$$

$$(12)_3 \quad -H_{t_j} \gamma^2 = -i\beta \operatorname{grad} H_{z_j} \quad \forall P_j \in S_j,$$

⁽⁸⁾ Infatti è irrilevante che S_j confini a sua volta con altri dielettrici o con il vuoto, se i campi e.m. che si propagano nella guida sono confinanti in S_i .

⁽⁹⁾ Cfr. p. es. D. MARCUSE, *Theory of Dielectric Optical Waveguides*, Academic Press 1974.

⁽¹⁰⁾ Indicato con ϑ_i l'angolo di incidenza dell'onda di lunghezza λ nella superficie di separazione tra la porzione di dielettrico di costante ε_i e la porzione di dielettrico di costante ε_j , e con ϑ_{ic} l'angolo critico, cioè il più grande angolo di incidenza per cui si abbia la totale riflessione interna, per la legge di Snell deve essere

$$(10) \quad \cos \vartheta_i \geq n_j/n_i = \cos \vartheta_{ic},$$

per cui sarà in S_i

$$h_i^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu n_i^2 - \beta^2 = n_i^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \cos^2 \vartheta_i) = n_i^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin^2 \vartheta_i \geq 0,$$

mentre in S_j

$$h_j^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu n_j^2 - n_i^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cos^2 \vartheta_i = n_i^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{n_j^2}{n_i^2} - \cos^2 \vartheta_i\right)$$

per la (10) è senz'altro $h_j^2 \leq 0$.

rispettivamente nelle porzioni S_i, S_j ⁽¹¹⁾.

La ricerca, qui oggetto di studio, dei modi TE è pertanto ricondotta alla ricerca di soluzioni dei sistemi (11), (12) che soddisfino le condizioni al contorno (3), (4), (5).

Ora, mentre la prima delle (11), unitamente alle condizioni al contorno (3) (4), (5), ammette, com'è ben noto, infinite soluzioni (autofunzioni), esiste ed è unica la funzione che soddisfa alla prima delle (12) nei punti di S_j , ed alle condizioni al contorno (3), (4), (5) ⁽¹²⁾.

Per trovare la soluzione comune ai due sistemi, riferiamo la generica sezione normale della guida ad un sistema di coordinate polari $0, r, \varphi$ con polo arbitrario 0 interno alla regione S_i .

In tale riferimento i sistemi (11), (12) assumono la forma seguente:

$$(11)'_1 \quad E_{zi} = 0, \quad \frac{\partial^2 H_{zi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{zi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_{zi}}{\partial \varphi^2} + h^2 H_{zi} = 0,$$

$$(11)'_2 \quad E_{ri} = -\frac{i}{h^2} \omega \mu \frac{1}{r} \frac{\partial H_{zi}}{\partial \varphi}, \quad E_{\varphi i} = \frac{i}{h^2} \omega \mu \frac{\partial H_{zi}}{\partial r},$$

$$(11)'_3 \quad H_{ri} = -\frac{i}{h^2} \beta \frac{\partial H_{zi}}{\partial r}, \quad H_{\varphi i} = -\frac{i}{h^2} \beta \frac{1}{r} \frac{\partial H_{zi}}{\partial \varphi} \quad \forall P_i \in S_i,$$

$$(12)'_1 \quad E_{zj} = 0, \quad \frac{\partial^2 H_{zj}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{zj}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_{zj}}{\partial \varphi^2} - \gamma^2 H_{zj} = 0,$$

$$(12)'_2 \quad E_{rj} = -\frac{i}{\gamma^2} \omega \mu \frac{1}{r} \frac{\partial H_{zj}}{\partial \varphi}, \quad E_{\varphi j} = +\frac{1}{\gamma^2} \omega \mu \frac{\partial H_{zj}}{\partial r},$$

$$(12)'_3 \quad H_{rj} = -\frac{1}{\gamma^2} \beta \frac{\partial H_{zj}}{\partial r}, \quad H_{\varphi j} = -\frac{1}{\gamma^2} \beta \frac{1}{r} \frac{\partial H_{zj}}{\partial \varphi} \quad \forall P_j \in S_j,$$

e le condizioni al contorno (3), (4), (5) diventano:

$$(3)' \quad [(E_{ri} - E_{rj}) \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}]_{s_{ij}} = 0, \quad [(E_{\varphi i} - E_{\varphi j}) \mathbf{h} \cdot \mathbf{t}]_{s_{ij}} = 0,$$

$$(4)' \quad [(\varepsilon_i E_{ri} - \varepsilon_j E_{rj}) \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}]_{s_{ij}} = 0, \quad [(\varepsilon_i E_{\varphi i} - \varepsilon_j E_{\varphi j}) \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}]_{s_{ij}} = 0,$$

$$(5)' \quad [H_{zi} - H_{zj}]_{s_{ij}} = 0, \quad [(H_{ri} - H_{rj}) \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}]_{s_{ij}} = 0, \quad [(H_{\varphi i} - H_{\varphi j}) \mathbf{h} \cdot \mathbf{t}]_{s_{ij}} = 0,$$

⁽¹¹⁾ È possibile riottenere la condizione di confinamento mediante l'equazione agli autovalori a cui si perviene dal sistema (11) e dalle condizioni di continuità tra S_i, S_j .

Cfr. D. MARCUSE, Opera citata e *Light Transmission Optics*, Bell Laboratories Series 1972.

⁽¹²⁾ Cfr. F. TRICOMI, *Equazioni differenziali*, Einaudi, Torino 1953.

avendo indicato con \mathbf{t} , \mathbf{n} i versori tangenti e normale, e con \mathbf{r} , \mathbf{h} i versori radiale e trasverso (nel prefissato riferimento polare di polo 0: cfr. fig. 1) nel generico punto del contorno s_{ij} .

Dette condizioni al contorno assumono infine, tenuto conto delle (11)' (12)', la forma seguente (13)

$$(13)_1 \quad [H_{zi} - H_{zj}]_{s_{ij}} = 0, \quad \left[-\frac{i}{h^2} \frac{\partial H_{zi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial H_{zj}}{\partial \varphi} \right]_{s_{ij}} = 0,$$

$$(13)_2 \quad \left[\frac{i}{h^2} \frac{\partial H_{zi}}{\partial r} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial H_{zj}}{\partial r} \right]_{s_{ij}} = 0, \quad \{ [-i \frac{\varepsilon_i}{h^2} \frac{\partial H_{zi}}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon_j}{\gamma^2} \frac{\partial H_{zj}}{\partial \varphi}] \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \}_{s_{ij}} = 0,$$

$$(13)_3 \quad \{ [i \frac{\varepsilon_i}{h^2} \frac{\partial H_{zi}}{\partial r} - \frac{\varepsilon_j}{\gamma^2} \frac{\partial H_{zj}}{\partial r}] \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \}_{s_{ij}} = 0.$$

Dall'ultima ipotesi $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ segue che il sistema (13) può essere verificato se e soltanto se è verificato l'uno o l'altro dei due sistemi seguenti (14)

$$(14) \quad \begin{aligned} [H_{zi} - H_{zj}]_{s_{ij}} = 0, & \quad \left[\frac{i}{h^2} \frac{\partial H_{zi}}{\partial \varphi} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial H_{zj}}{\partial \varphi} \right]_{s_{ij}} = 0, \\ [\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}]_{s_{ij}} = 0, & \quad \left[\frac{\partial H_{zi}}{\partial r} \right]_{s_{ij}} \equiv \left[\frac{\partial H_{zj}}{\partial r} \right]_{s_{ij}} \equiv 0, \end{aligned}$$

$$(14)' \quad \begin{aligned} [H_{zi} - H_{zj}]_{s_{ij}} = 0, & \quad \left[\frac{i}{h^2} \frac{\partial H_{zi}}{\partial r} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial H_{zj}}{\partial r} \right]_{s_{ij}} = 0, \\ [\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}]_{s_{ij}} = 0, & \quad \left[\frac{\partial H_{zi}}{\partial \varphi} \right]_{s_{ij}} \equiv \left[\frac{\partial H_{zj}}{\partial \varphi} \right]_{s_{ij}} \equiv 0. \end{aligned}$$

Consideriamo il sistema (14). Dall'equazione $[\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}]_{s_{ij}} = 0$, si deduce che in ciascun punto del contorno sono paralleli i versori radiale e tangente

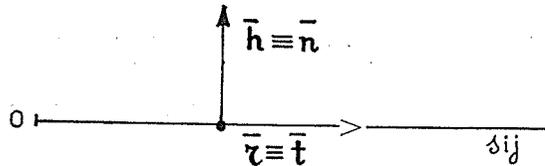


Fig. 2

(13) Si è tenuto conto del fatto che sono finiti e non nulli i fattori $\omega\mu/r$, $\omega\mu$, β , β/r . (Cfr. la nota a pag. 16 per il caso in cui $r \rightarrow \infty$), che le equazioni del sistema devono essere compatibili, e che non possono essere entrambi nulli gli scalari $\mathbf{r} \cdot \mathbf{t}$, $\mathbf{h} \cdot \mathbf{t}$.

(14) Ovviamente non consideriamo il caso banale $\partial H_{zi}/\partial \varphi \equiv \partial H_{zj}/\partial \varphi \equiv 0$ e $\partial H_{zi}/\partial r \equiv \partial H_{zj}/\partial r \equiv 0$, che conduce alla soluzione identicamente nulla.

cioè le linee s_{ij} devono essere linee radiali, ed inoltre, come avevamo già visto a pag. 3, su s_{ij} H_z è costante.

Per un noto teorema ⁽¹⁵⁾, due funzioni H_{zi} e H_{zj} che soddisfano alle equazioni d'onda

$$\Delta H_{zi} + h^2 H_{zi} = 0, \quad \Delta H_{zj} - \gamma^2 H_{zj} = 0,$$

rispettivamente in S_i e in S_j , costanti sul contorno comune s_{ij} rispetto alla variabile r , se esistono, sono uniche, e sono costanti in S_i , S_j rispetto alla r .

Possiamo pertanto cercare le soluzioni dei sistemi (11)', (12)' tra quelle del tipo

$$(15) \quad H_z = A' F(\varphi),$$

cioè con H_z funzione della sola variabile φ , A' costante.

Sostituendo la (15) nelle seconde equazioni di (11)', (12)' otteniamo

$$(16) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} + h^2 F = 0 \quad \text{in } S_i,$$

$$(17) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} - \gamma^2 F = 0 \quad \text{in } S_j,$$

che devono valere, fissato φ , per qualsiasi valore di r .

Si può subito osservare che questo caso non ammette soluzioni che non siano identicamente nulle.

Consideriamo ora il sistema (14)'.

Per la terza equazione devono essere paralleli i versori tangente e trasverso per cui le linee s_{ij} sono necessariamente circonferenze di centro 0 ed inoltre sulle circonferenze s_{ij} H_z è costante.

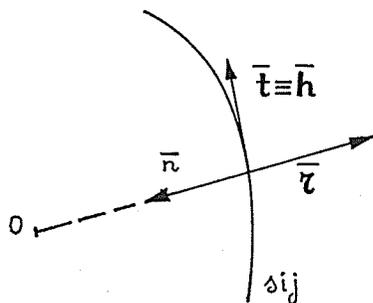


Fig. 3

⁽¹⁵⁾ Cfr. N. TIKHONOV - A. A. SAMARSKII, *Equations of Mathematical Physics*, Pergamon Press 1963.

Analogamente al caso precedente, possiamo cercare le soluzioni dei sistemi (11)', (12)' tra quelle del tipo

$$(18) \quad H_z = AF(r),$$

cioè con H funzione della sola variabile r , (A costante).

Sostituendo la (15) nelle seconde equazioni di (11)', (12)' otteniamo le equazioni (di Bessel, di ordine zero)

$$(19) \quad \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + h^2 F = 0 \quad \text{in } S_i,$$

$$(20) \quad \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \gamma^2 F = 0 \quad \text{in } S_j$$

Ora, è noto che la soluzione generale $F(x)$ di un'equazione

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dF}{dx} + \lambda^2 F = 0,$$

può esprimersi nella forma

$$(21) \quad F(x) = AJ_0(x) + CK_0(x),$$

cioè come combinazione lineare di due funzioni cilindriche di ordine zero di argomento reale $x = \lambda r$ se è $\lambda^2 \geq 0$; o di argomento immaginario $x = i\lambda r$ nel caso che sia $\lambda^2 < 0$; i coefficienti A , C della combinazione lineare dipendendo ovviamente da condizioni di regolarità o di convergenza all'infinito.

Assumiamo come funzioni circolari nella (21) la funzione di Bessel di I specie (finita nell'origine delle coordinate e infinita per r che tende all'infinito) e la funzione di Hankel di I tipo (infinita nell'origine e che decade esponenzialmente per r tendente all'infinito).

Pertanto in S_i , a cui è interna l'origine, si dovrà porre $C = 0$, mentre in S_j , supposta infinitamente estesa, sarà $A = 0$

Il sistema (11)' relativo alla porzione S_i diventa a questo punto

$$(22)_1 \quad E_{zi} = 0, \quad H_{zi} = AJ_0(hr),$$

$$(22)_2 \quad E_{ri} = 0, \quad E_{\varphi i} = -\frac{i}{h} \omega \mu A \frac{\partial}{\partial(hr)} J_0(hr),$$

$$(22)_3 \quad H_{ri} = -\frac{i}{h} \beta A \frac{\partial}{\partial(hr)} J_0(hr), \quad H_{\varphi i} = 0,$$

con $h^2 = \omega^2 \varepsilon_i \mu - \beta^2$, $\varepsilon_i = n_i^2 \varepsilon_0$.

In S_j sarà, analogamente

$$(23)_1 \quad E_{zj} = 0, \quad H_{zj} = CH_0^{(1)}(i\gamma r),$$

$$(23)_2 \quad E_{rj} = 0, \quad E_{\varphi j} = \frac{\omega\mu_0}{\gamma} C \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial(i\gamma r)}(i\gamma r),$$

$$(23)_3 \quad H_{rj} = -\frac{\beta}{\gamma} C \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial(i\gamma r)}(i\gamma r), \quad H_{\varphi j} = 0,$$

con $\gamma^2 = \beta^2 - \omega^2 \varepsilon_j \mu$, $\varepsilon_j = n_j^2 \varepsilon_0$.

Le condizioni al contorno (14)' forniscono il sistema

$$(24) \quad [AJ_0(hr) - CH_0^{(1)}(i\gamma r)]_{s_{ij}} = 0,$$

$$\left[\frac{i}{h} AJ_0'(hr) - \frac{1}{\gamma} CH_0^{(1)'}(i\gamma r) \right]_{s_{ij}} = 0,$$

$\forall P \in s_{ij}$, circonferenza di centro 0 e raggio fissato $r = a$ ⁽¹⁶⁾, dove l'apice indica la derivata delle funzioni J_0 , $H_0^{(1)}$ fatte rispetto agli argomenti hr , $i\gamma r$.

Pertanto il sistema (24) ammette soluzioni solo se si annulla il determinante

$$(25) \quad \begin{vmatrix} J_0(ha) & -H_0^{(1)}(i\gamma a) \\ \frac{i}{h} J_0'(ha) & -\frac{1}{\gamma} H_0^{(1)'}(i\gamma a) \end{vmatrix} = 0.$$

Considerata la nota relazione tra le funzioni cilindriche ⁽¹⁷⁾ $Z_0' = Z_1$, in cui Z_0 è una qualsiasi funzione cilindrica di ordine zero e Z_1 è la stessa funzione di ordine uno, l'annullarsi del determinante (25) comporta che sia verificato

$$(26) \quad \frac{\gamma J_1(ha)}{h J_0(ha)} + i \frac{H_1^{(1)}(i\gamma a)}{H_0^{(1)}(i\gamma a)} = 0.$$

La (26) è un'equazione agli autovalori, di incognite h e γ (tra loro non indipendenti), la determinazione dei quali permette di esprimere tutti i possibili campi propagantisi nella guida, tramite le autofunzioni corrispondenti a tali autovalori, e di conoscerne le pulsazioni.

⁽¹⁶⁾ A conferma dell'affermazione che le linee s_{ij} sono circonferenze, si può notare che il sistema (24) ammette soluzioni solo per r costante.

⁽¹⁷⁾ Cfr. p. es. G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press 1922.

Il caso della guida dielettrica « a lastra » si può considerare come caso particolare di questo: tale guida si può infatti schematizzare come una porzione di dielettrico di costante ε_1 , omogeneo, racchiuso tra due dielettrici omogenei di costanti $\varepsilon_2, \varepsilon_3$, minori di ε_1 , in modo che le superfici di separazione siano piani paralleli al piano xz , infinitamente estesi.

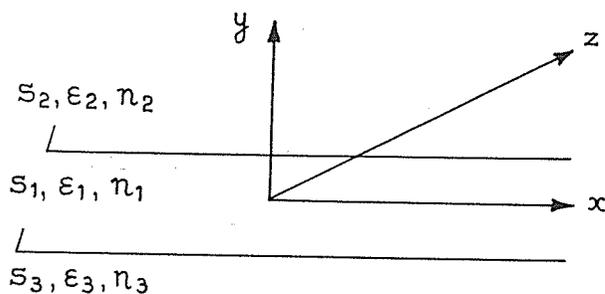


Fig. 4

Supposto inoltre che i vettori del campo che si propaga nella guida varino in funzione della sola variabile x , oltre che naturalmente in funzione della variabile longitudinale z , lo studio della guida « a lastra » si può ricondurre allo studio di una guida di sezione a forma di corona circolare, di raggio infinitamente esteso ⁽¹⁸⁾.

3 - Modi TM

Consideriamo ora, sempre nella stessa guida dielettrica un modo TM, i cui vettori \mathbf{E} , \mathbf{H} siano del tipo

$$(1) \quad \mathbf{E}(P) = [\mathbf{E}_t(x, y) + E_z(x, y)\mathbf{k}]e^{-i\beta z}, \quad \mathbf{H}(P) = [\mathbf{H}_t(x, y)]e^{-i\beta z}.$$

Analogamente al caso precedente, la componente longitudinale del campo elettrico dovrà soddisfare all'equazione d'onda

$$(2) \quad \Delta E_z + h_i^2 E_z, \quad h_i^2 = \omega^2 \varepsilon_i \mu - \beta^2,$$

in ogni porzione S_i della sezione della guida.

⁽¹⁸⁾ Infatti se $r \rightarrow \infty$, nel sistema (13) alcune equazioni sono identicamente verificate, per cui ci si può ridurre al solo sistema (14)', privato dell'ultima equazione, la quale, d'altra parte, conferma soltanto il risultato già noto che le linee s_{ij} sono linee H_z costante.

Con la solita scelta di sistema di riferimento, otterremo per le componenti del modo TM cercato il seguente sistema

$$(3)_1 \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + h_i^2 E_z = 0$$

$$(3)_2 \quad H_z = 0, \quad E_r = -\frac{i}{h_i} \beta \frac{\partial E_z}{\partial r},$$

$$(3)_3 \quad E_\varphi = -\frac{i \beta}{h_i} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, \quad H_r = \frac{i \omega \varepsilon_i}{h_i} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = -\frac{i}{h_i} \omega \varepsilon_i \frac{\partial E_z}{\partial r},$$

Analogamente al caso TE le condizioni al contorno danno luogo al sistema ⁽¹⁹⁾

$$(4) \quad [E_{zi} - E_{zj}]_{s_{ij}} = 0, \quad \left[\frac{i}{h^2} \frac{\partial E_{zi}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial E_{zj}}{\partial r} \right]_{s_{ij}} = 0,$$

$$[h \cdot n]_{s_{ij}} = 0, \quad \left[\frac{\partial E_{zi}}{\partial \varphi} \right]_{s_{ij}} \equiv \left[\frac{\partial E_{zj}}{\partial \varphi} \right]_{s_{ij}} \equiv 0.$$

Ricerchiamo una soluzione del tipo ⁽²⁰⁾

$$(5) \quad E_z = BF(r),$$

Pertanto le soluzioni del sistema (3) saranno, operando come a pag. 8.

$$\begin{aligned} E_{zi} &= BJ_0(hr) && \text{in } S_i, \\ E_{zj} &= DH_0^{(1)}(i\gamma r) && \text{in } S_j, \end{aligned}$$

le quali, per la (4) devono soddisfare a ⁽²¹⁾

$$(6) \quad \begin{aligned} BJ_0(hr) - DH_0^{(1)}(i\gamma r) &= 0, \\ i \frac{\varepsilon_i}{h} BJ_0'(hr) - \frac{1}{\gamma} \varepsilon_j DH_0^{(1)'}(i\gamma r) &= 0, \end{aligned}$$

che ammette soluzioni solo per $r = a$ costante, supposto che si annulli il determinante di (6), cioè

$$(7) \quad \frac{\varepsilon_i \gamma J_1(ha)}{\varepsilon_j h J_0(ha)} + i \frac{H_1^{(1)}(i\gamma a)}{H_0^{(1)}(i\gamma a)} = 0.$$

⁽¹⁹⁾ Scartiamo anche qui l'altro possibile sistema in quanto privo di soluzioni.

⁽²⁰⁾ Come nel caso precedente E_z dipende dalla sola variabile φ .

⁽²¹⁾ Naturalmente, anche in questo caso, i contorni s_{ij} devono essere circonferenze di raggio $r = a$.

