Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 297-308

M. SASSETTI e C. SILLI (*)

Sulla stabilità dei moti di precessione di un girostato con massa variabile (**)

1 - Introduzione

In un precedente lavoro [5] è stato affrontato il problema delle precessioni di un girostato formato da una armatura rigida R la cui massa, anzichè costante, diminuisce col tempo, con continuità e con legge largamente arbitraria, e da un volano C perfettamente girevole e vincolato attorno al suo asse giroscopico. In queste condizioni, e nonostante la variabilità della massa è possibile determinare il moto del volano sotto l'azione delle forze apparenti, costruire in forma finita la soluzione del problema ed indagarne la stabilità.

In questo secondo lavoro, prendendo spunto da un lavoro di B. A. Smol'nikov [6], che studia il moto di un girostato con massa costante formato da un'armatura che porta un volano perfettamente girevole attorno a un asse, opportunamente orientato, solidale con l'armatura stessa; supposto ancora di considerare un girostato simmetrico con massa variabile formato, anche qui, da un'armatura R e da un volano C perfettamente girevole e vincolato a ruotare attorno ad un'asse appartenente alla sezione equatoriale del girostato, si studiano i moto di precessione dell'intero girostato S e la loro stabilità rispetto ad opportune classi di moti.

2 - Posizione del problema

Si consideri un corpo rigido R a struttura giroscopica perfettamente girevole attorno al suo centro di massa O, che si suppone fisso e che si assume come

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via Buonarroti 2, 56100 Pisa, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 25-III-1980.

origine di una terna inerziale ortogonale $T_1(O; \xi, \eta, \zeta)$. Sia Oz asse di simmetria di R e Ox un asse equatoriale su cui è calettato un secondo corpo rigido C, omogeneo e con densità ϱ, con centro di massa in O e a simmetria cilindrica attorno all'asse Ox.

Il sistema considerato viene quindi a costituire un girostato S perfettamente girevole attorno al centro di massa comune ai due corpi che lo costituiscono.

Si suppone poi che la massa di R diminuisca con continuità, senza però che questo alteri il centro di massa nè l'asse Oz di simmetria; una situazione del genere si realizza, ad esempio, se l'espulsione avviene dall'equatore di R con simmetria cilindrica.

La seconda equazione cardinale della dinamica per il girostato S con massa variabile, riferita al centro di riduzione O, assume la forma [**3**], [**2**]

$$\sigma_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\chi}}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma_0 \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\chi}_0 = \boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{\mu}_0 , \tag{2.1}$$

dove: σ_0 è l'omografia d'inerzia dell'intero girostato calcolata rispetto a O e data da $\sigma_0 = -\int_S \varrho[(P-O)\wedge]^2 dS$; $\boldsymbol{\omega}$ è il vettore rotazione dell'armatura R; $\boldsymbol{\chi}_0$ il momento girostatico, ossia il momento risultante delle quantità di moto relative del corpo C rispetto all'involucro R [**2**]; $\boldsymbol{\mu}_0$ il momento delle forze di distacco (1); $\boldsymbol{M}_0$ il momento delle forze esterne agenti sull'intero girostato S, diverse da quelle di distacco; $\dot{\boldsymbol{\chi}}_0$ indica la derivata relativa di $\boldsymbol{\chi}_0$ calcolata rispetto a una terna $T(0; x, y, z)$ solidale con R.

Per l'equazione di moto che regola il momento girostatico $\boldsymbol{\chi}_0$ si ha

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_0 + \boldsymbol{\omega}' \wedge \boldsymbol{\chi}_0 = \boldsymbol{M}_0' + \boldsymbol{M}_0'' + \boldsymbol{M}_0''' , \tag{2.2}$$

dove: $\boldsymbol{\omega}'$ è il vettore di rotazione relativo di C rispetto a R; $\boldsymbol{M}_0'$ il momento delle forze apparenti dovute al trascinamento di C in R; $\boldsymbol{M}_0''$ il momento delle forze esterne agenti su C; $\boldsymbol{M}_0'''$ il momento delle reazioni vincolari.

Anche qui, come nella (2.1), i momenti sono calcolati rispetto a O.

Si indichino con $A(t) = B(t)$ e $C(t)$ i momenti d'inerzia dell'intero girostato S rispetto agli assi x, y, z; assieme alla massa $m(t)$ di S supponiamo queste grandezze funzioni positive del tempo, con estremo inferiore non nullo.

---

(1) V. [**3**].

Proiettando la (2.1) sugli assi della terna $T(0;\, x, y, z)$ si hanno le equazioni scalari

$$(2.3)_1 \qquad \dot{p}(t) = \frac{A(t) - C(t)}{A(t)}\, q(t)\, r(t) - \frac{\dot{\chi}_x - M_x + \mu_x}{A(t)}\,,$$

$$(2.3)_2 \qquad \dot{q}(t) = \frac{C(t) - A(t)}{A(t)}\, p(t)\, r(t) - \frac{r(t)\,\chi_x(t) - M_y + \mu_y}{A(t)}\,,$$

$$(2.3)_3 \qquad \dot{r}(t) = \frac{q(t)\,\chi_x(t) + M_z - \mu_z}{C(t)}\,.$$

Per quanto riguarda il moto relativo di C, proiettando la (2.2) sull'asse Ox, nell'ipotesi di assenza di attrito e di momento nullo rispetto a Ox delle forze esterne agenti su C, si ottiene

$$(2.4) \qquad A'\dot{p}'(t) = M'_{0x}\,,$$

dove: A' è il momento d'inerzia rispetto all'asse Ox del corpo rigido C; p' la componente di $\boldsymbol{\omega}'$ secondo l'asse Ox.

Lo studio del moto del girostato S, armatura R e corpo interno C, è dunque ricondotto a quello del sistema (2.3) e dell'equazione (2.4).

3 - Calcolo di M'_{0x}

Per calcolare il momento $\boldsymbol{M}'_0$ delle forze apparenti in funzione di $\boldsymbol{\omega}$ e di $\boldsymbol{\omega}'$, e in particolare la sua componente M'_{0x}, si tiene conto delle espressioni dell'accelerazione di trascinamento e di quella complementare, in modo da avere

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{M}'_0 &= -\int_C \varrho(P-O)\wedge\{\dot{\boldsymbol{\omega}}\wedge(P-O)+\boldsymbol{\omega}\wedge[\boldsymbol{\omega}\wedge(P-O)]+2\boldsymbol{\omega}\wedge[\boldsymbol{\omega}'\wedge(P-O)]\}\,\mathrm{d}C \\ &= -\sigma_0^{(c)}\dot{\boldsymbol{\omega}} - \int_C \varrho[\boldsymbol{\omega}\cdot(P-O][(P-O)\wedge\boldsymbol{\omega}]\,\mathrm{d}C - \int_C 2\varrho[\boldsymbol{\omega}\cdot(P-O][(P-O)\wedge\boldsymbol{\omega}']\,\mathrm{d}C \\ &= -\sigma_0^{(c)}\dot{\boldsymbol{\omega}} - \int_C \varrho[\boldsymbol{\omega}\cdot(P-O][(P-O)\wedge(\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{\omega}')]\,\mathrm{d}C\,. \end{aligned}$$

Ricordando ora che il corpo C è vincolato a ruotare attorno all'asse x e che è simmetrico con simmetria cilindrica rispetto a questo asse si deduce

$$(3.2) \qquad M'_{0x} = -A'\dot{p}(t)\,.$$

4 - Studio dei moti di precessione del girostato

Riprendiamo il sistema formato dalle equazioni (2.3) e (2.4) aggiungendo le ipotesi che sia nullo il momento $\boldsymbol{M}_0$ delle forze esterne e che l'espulsione delle particelle di R avvenga in modo tale da risultare $\mu_{0x} = \mu_{0y} = 0$.

Dalla (2.4) e dalla (3.2) si deduce la soluzione

$$\dot{p}'(t) = -\dot{p}(t) , \tag{4.1}$$

qualunque sia $\boldsymbol{\omega}$, e dunque, integrando la (4.1) si ha

$$p'(t) = -p(t) + p_0 , \tag{4.2}$$

con p_0 costante che si supporrà non nulla.

Nelle ipotesi fatte, e tenendo conto delle (4.1) e (4.2), le equazioni (2.3) si possono riscrivere nella forma

$$[1 - \varepsilon(t)]\, \dot{p}(t) - \frac{A(t) - C(t)}{A(t)}\, qr = 0 , \tag*{(4.3)$_1$}$$

$$\dot{q} + [\frac{A(t) - C(t)}{A(t)} - \varepsilon(t)] pr = -\varepsilon(t) p_0 r , \tag*{(4.3)$_2$}$$

$$\dot{r} + \varepsilon(t) \frac{A(t)}{C(t)} pq = \varepsilon(t) \frac{A(t)}{C(t)} p_0 q - \frac{\mu_{0z}}{C(t)} , \tag*{(4.3)$_3$}$$

dove si è posto $\varepsilon(t) = A'/A(t)$.

Cerchiamo ora due soluzioni particolari del moto sopra descritto.

Moto (a).

Il sistema (4.3) che regola il moto del girostato è soddisfatto dalla soluzione

$$p(t) = p_1 , \qquad q(r) = q_0 , \qquad r(t) = 0 , \tag{4.4}$$

con p_1 e q_0 costanti, e quindi

$$p'(t) = p_0 - p_1 , \tag*{(4.4)$'$}$$

sotto la condizione che risulti

$$\mu_{0z} = A' q_0 (p_0 - p_1) . \tag{4.5}$$

Dunque, con un momento della forza esterna $\boldsymbol{M}_0$ nullo e un momento delle forze di getto $\boldsymbol{\mu}$ con l'unica componente non nulla μ_{0z} costante e data dalla (4.5), è possibile ottenere il moto di precessione (4.4), (4.4)' come moto dell'intero girostato S.

Moto (b).

Il sistema (4.3) è anche soddisfatto dalla soluzione

$$p(t) = p_1\,, \qquad q(t) = 0\,, \qquad r(t) \neq 0\,, \tag{4.6}$$

con p_1 costante, e quindi

$$p'(t) = p_0 - p_1\,, \tag{4.6$'$}$$

sotto la condizione che risulti

$$A(t) - C(t) = \text{costante} = A'\,\frac{p_1 - p_0}{p_1}\,, \tag{4.7}$$

e se è

$$r(t) = -\int_0^t \frac{\mu_{0z}(\tau)}{C(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{4.8}$$

con $\mu_{0z}(t)$ tale che $\int_0^t\big(\mu_{0z}(\tau)/C(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau \neq 0$, ad esempio $\mu_{0z}(t) > 0$; se poi è addirittura

$$\frac{\mu_{0z}(t)}{C(t)} \geqq h > 0 \qquad \forall t\,, \tag{4.9}$$

si ha allora dalla (4.8) $r(t) \leq -ht$, e dunque è $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t) = -\infty$, cioè per t tendente a $+\infty$ il moto di precessione tende a una rotazione attorno all'asse con velocità infinita.

5 - Stabilità dei moti di precessione rispetto ad opportune classi di moti

Dato un moto base m_0 e una classe $C(\mathsf{m})$ di moti perturbati, si dirà che m_0 è stabile rispetto a tale classe quando lo è rispetto a tutti i moti che la compongono.

Ciò premesso, in questo paragrafo si vuole studiare la stabilità dei moti (a) e (b) rispetto ad opportune classi.

Moto (a).

(α) Sia dunque m_0 il moto (a) descritto dalle (4.4), (4.4)'.

Si consideri dapprima la classe $C_1(\mathsf{m})$ dei moti perturbati della forma

$$(5.1) \qquad p(t) = p_1 + u(t)\,, \qquad q(t) = q_0 + v(t)\,, \qquad r(t) = 0\,;$$

in questo caso si ha, per le tre equazioni che regolano il moto perturbato

$$(5.2)_1 \qquad [1 - \varepsilon(t)]\,\dot{u} = 0\,, \qquad\qquad (5.2)_2 \qquad \dot{v} = 0\,,$$

$$(5.2)_3 \qquad \varepsilon(t)\,\frac{A(t)}{C(t)}\,[p_1 + u(t)]\,[q_0 + v(t)] = \varepsilon(t)\,\frac{A(t)}{C(t)}\,p_0[q_0 + v(t)] - \frac{\mu_{0z}(t)}{C(t)}\,.$$

Dalle $(5.2)_{1,2}$ si hanno i due casi

$$\text{(i)} \qquad A(t) = A_0\,, \qquad v(t) = v_0\,; \qquad\qquad \text{(ii)} \qquad u(t) = u_0\,, \qquad v(t) = v_0\,.$$

Tenendo conto che per la (4.5) è $\mu_{0z} = A' q_0(p_0 - p_1)$, nel caso (i) si deduce dalla terza delle (5.2): $u(t)(q_0 + v_0) = v_0(p_0 - p_1)$, da cui $u(t) = u_0 =$ costante, per cui è

$$(5.3) \qquad u_0(q_0 + v_0) = v_0(p_0 - p_1)\,.$$

Uguale condizione (5.3) si deduce nel caso (ii); l'impossibilità, in entrambi i casi di scegliere arbitrariamente u_0, v_0 implica la mancanza di stabilità del moto (a) rispetto alla classe $C_1(\mathsf{m})$.

(β) Sempre assumendo come moto base il moto (a), si consideri adesso la classe $C_2(\mathsf{m})$ di moti variati, definiti da

$$(5.4) \qquad p(t) = p_1 + u(t)\,, \qquad q(t) = q_0\,, \qquad r(t) = w(t)\,.$$

Tenendo conto delle ipotesi fatte, dalla (4.3) si deduce il seguente sistema nelle variazioni $u(t)$ e $w(t)$:

$$(5.5)_1 \qquad \dot{u} - \frac{A(t) - C(t)}{A(t) - A'} q_0 w = 0 \,,$$

$$(5.5)_2 \qquad \left[\frac{A(t) - C(t)}{A(t)} - \varepsilon(t)\right](p_1 + u) w = -\varepsilon(t) p_0 w \,,$$

$$(5.5)_3 \qquad \dot{w} + \frac{A'}{C(t)} q_0 u = 0 \,.$$

Si consideri il sistema formato da $(5.5)_1$ e $(5.5)_3$

$$(5.6) \qquad \dot{u} - \frac{A(t) - C(t)}{A(t) - A'} q_0 w = 0 \,, \qquad \dot{w} + \frac{A'}{C(t)} q_0 u = 0 \,.$$

Vogliamo studiare la stabilità di questo sistema. Supposto che esistano A_∞ e C_∞ tali che $A_\infty = \lim_{t \to +\infty} A(t)$ e $C_\infty = \lim_{t \to +\infty} C(t)$, si consideri il sistema ridotto associato

$$(5.7) \qquad \dot{\tilde{u}} - \frac{A_\infty - C_\infty}{A_\infty - A'} q_0 \tilde{w} = 0 \,, \qquad \dot{\tilde{w}} + \frac{A'}{C_\infty} q_0 \tilde{u} = 0 \,.$$

Posto

$$H = \frac{A_\infty - C_\infty}{A_\infty - A'} q_0 \,, \qquad K = \frac{A'}{C_\infty} q_0 \,, \qquad \gamma^2 = HK \,,$$

nell'ipotesi che risulti: $\big((A_\infty - C_\infty)/(A_\infty - A')\big) > 0$, si deduce per il sistema (5.7)

$$\dot{\tilde{u}} - H\tilde{w} = 0 \,, \qquad \dot{\tilde{w}} + K\tilde{u} = 0 \,,$$

da cui

$$(5.7)' \qquad \tilde{u}(t) = \Omega \operatorname{sen}(\gamma t + \alpha) \,, \qquad \tilde{w}(t) = \Omega\sqrt{K/H} \cos(\gamma t + \alpha) \,.$$

Da $\tilde{u}(0) = \Omega \operatorname{sen}\alpha$ e $\tilde{w}(0) = \Omega\sqrt{K/H}\cos\alpha$ si ottiene per le $(5.7)'$

$$(5.7)'' \qquad \begin{aligned} \tilde{u}(t) &= \sqrt{\tilde{u}^2(0) + (H/K)\tilde{w}^2(0)} \operatorname{sen}(\gamma t + \alpha) \,, \\ \tilde{w}(t) &= \sqrt{(K/H)\,\tilde{u}^2(0) + \tilde{w}^2(0)} \cos(\gamma t + \alpha). \end{aligned}$$

Il legame tra la limitatezza delle soluzioni (5.7)″ del sistema (5.7) e quelle del sistema (5.6) è fornito da un classico risultato sui sistemi differenziali lineari, di cui si riporta l'enunciato [1]:

Teorema. Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice costante e $C(t) = [f_{ij}(t)]$ una matrice di funzioni misurabili in t con $\int_0^{+\infty} \| C(t) \| \, dt < +\infty$.

Se tutte le soluzioni del sistema $\dot{x} = Ax$ sono limitate, allora anche tutte le soluzioni del sistema $\dot{x} = [A + C(t)]x$ sono limitate in $(0; +\infty)$.

Ciò posto si osservi che il sistema (5.6) si può scrivere nella forma

$$\dot{x} = [A + C(t)]x ,$$

ponendo

$$x = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & \big((A_\infty - C_\infty)/(A_\infty - A')\big) q_0 \\ -(A'/C_\infty) q_0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0 & q_0 \, \big((A(t) - C(t))/(A(t) - A') - (A_\infty - C_\infty)/(A_\infty - A)\big) \\ -(A'/C(t) - A'/C_\infty) q_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque, il sistema (5.6) ha tutte le soluzioni limitate, sotto le ipotesi

$$(5.8) \qquad \int_0^{+\infty} \left| \frac{A(t) - C(t)}{A(t) - A'} - \frac{A_\infty - C_\infty}{A_\infty - A'} \right| dt < +\infty , \qquad \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{C(t)} - \frac{1}{C_\infty} \right| dt < +\infty ,$$

ipotesi queste in molti casi verificabili.

D'altra parte [4], la limitatezza delle soluzioni di (5.6) equivale alla loro stabilità.

(γ) Riferendosi ancora al moto (a) come moto base, si consideri la classe $C_3(\mathrm{m})$ dei moti variati definita da

$$(5.9) \qquad p(t) = p_1 , \qquad q(t) = q_0 + v(t) , \qquad r(t) = w(t) .$$

Per le variazioni $v(t)$ e $w(t)$ si deduce dalle (4.3), e tenendo sempre conto della (4.5)

$$(5.10)_1 \qquad \frac{A(t) - C(t)}{A(t)} \big(q_0 + v(t)\big) w(t) = 0 ,$$

$$(5.10)_2 \qquad \dot{v}(t) + \left[\frac{A(t) - C(t)}{A(t)} - \varepsilon(t)\right] p_1 w(t) = -\varepsilon(t) p_0 w(t) ,$$

$$(5.10)_3 \qquad \dot{w}(t) + \varepsilon(t) \frac{A(t)}{C(t)} p_1 v(t) = \varepsilon(t) \frac{A(t)}{C(t)} p_0 v(t) .$$

Poichè non può essere $w(t) \equiv 0$ e poichè se $v(t) = -q_0$ sicuramente non si ha stabilità, dalla $(5.10)_1$ si deduce che l'unico caso che meriti di essere studiato è quello in cui è $A(t) = C(t)$, caso di simmetria sferica.

In questo caso il sistema (5.10) si riduce a

$$(5.11) \qquad \dot{v} - \varepsilon(t)(p_1 - p_0)w = 0\,, \qquad \dot{w} + \varepsilon(t)(p_1 - p_0)v = 0\,.$$

Ripetendo per questo sistema il metodo usato nel caso precedente si ha $\dot{x} = [A + C(t)]x$ con

$$x = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \qquad A = \frac{A'}{A_\infty}\begin{bmatrix} 0 & p_1 - p_0 \\ p_0 - p_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C(t) = \left(\frac{A'}{A(t)} - \frac{A'}{A_\infty}\right)\begin{bmatrix} 0 & p_1 - p_0 \\ p_0 - p_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si trova che il sistema ridotto associato ha tutte le soluzioni limitate e se ne deduce la stabilità per le u, w di (5.11), nell'ipotesi che sia

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{1}{A(t)} - \frac{1}{A_\infty}\right| dt < +\infty\,.$$

Moto (b).

(α) Si consideri adesso come moto base m_0 il moto (b) definito dalle (4.6), (4.6)'. Come prima classe $C_1'(\mathrm{m})$ di moti perturbati si assuma quella dei moti della forma

$$(5.12) \qquad p(t) = p_1 + u(t)\,, \qquad q(t) = v(t)\,, \qquad r(t) \neq 0\,.$$

Per le equazioni che regolano il moto perturbato (5.12) si ha sempre dalle (4.3) e per la (4.8)

$$(5.13)_1 \qquad (A(t) - A')\dot{u} - (A(t) - C(t))vr = 0\,,$$

$$(5.13)_2 \qquad \dot{v} + \frac{A(t) - A' - C(t)}{A(t)}ur + \left(\frac{A(t) - A' - C(t)}{A(t)}p_1 + \frac{A'}{A(t)}p_0\right)r = 0\,,$$

$$(5.13)_3 \qquad (p_1 - p_0 + u)v = 0\,.$$

Se nella $(5.13)_3$ è $v = 0$ manca la stabilità. Infatti in questo caso si ha

$A(t) = A'$ e $u(t) = (A'/C(t))p_0 - p_1$, oppure $u(t) = u_0$ e $(A(t) - A' - C(t)) \cdot (u_0 + p_1) + A'p_0 = 0$.

Se invece è $p_0 = p_1$ e $A(t) = C(t)$, si trova la stabilità. Infatti, preso $u(t) = 0$, se è $A(t) = C(t)$ segue che $v(t) = v_0$.

(β) Si assuma poi come classe $C_2'(\mathrm{m})$ dei moti perturbati del moto base (b) quella definita da

$$p(t) = p_1 + u(t) \,, \qquad q(t) = 0 \,, \qquad r(t) + w(t) \,. \tag{5.14}$$

Dalla (4.3) si deduce il seguente sistema nelle variazioni $u(t)$ e $w(t)$

$$[1 - \varepsilon(t)]\dot{u} = 0 \,, \tag{5.15$_1$}$$

$$\frac{A(t) - C(t) - A'}{A(t)} (p_1 + u)(r + w) = -\frac{A'}{A(t)} p_0(r + w) \,, \tag{5.15$_2$}$$

$$\dot{w} = 0 \,. \tag{5.15$_3$}$$

Rispetto alla classe $C_2'(\mathrm{m})$ il moto base non è stabile. Infatti, la $(5.15)_3$ fornisce $w(t) = w_0$. Se $A(t) = A'$, si deduce $u(t) = p_0A'/C(t) - p_1$; se $u(t) = u_0$, si trova $(A(t) - C(t) - A')(p_1 + u_0) = -A'p_0$.

(γ) Si consideri infine la classe $C_3'(\mathrm{m})$ definita da

$$p(t) = p_1 \,, \qquad q(t) = v(t) \,, \qquad r(t) + w(t) \,. \tag{5.16}$$

Il sistema in v e w che si deduce dalla (4.3) è dato da

$$\frac{A(t) - C(t)}{A(t)} v(r + w) = 0 \,, \tag{5.17$_1$}$$

$$\dot{v} + [\frac{A(t) - C(t)}{A(t)} - \varepsilon(t)]p_1(r + w) = -\varepsilon(t)p_0(r + w) \,, \tag{5.17$_2$}$$

$$\dot{w} + \varepsilon(t)\frac{A(t)}{C(t)} p_1 v = \varepsilon(t)p_0 v \,. \tag{5.17$_3$}$$

Se nella terza delle (5.16) è $w + r = 0$, manca la stabilità, in quanto, per la (4.8) e la (4.9), qualunque sia la condizione iniziale per $w(t)$, risulta $w(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$. Se invece è $v = 0$, si deduce che deve essere $w = w_0$, e dunque si ottiene la stabilità sotto la condizione $(A(t) - C(t) - A')p_1 = -A'p_0$.

Nel caso infine che sia $A(t) = C(t)$, il sistema (5.17) si riduce alla forma

$$\dot{v} - \varepsilon(t)(p_1 - p_0)w = \varepsilon(t)(p_1 - p_0)r\,, \qquad \dot{w} + \varepsilon(t)(p_1 - p_0)v = 0\,, \tag{5.18}$$

che si può ulteriormente scrivere nella forma

$$\dot{x} = A(t)x + a(t)\,, \tag{5.19}$$

dove

$$x = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \qquad A(t) = \varepsilon(t)\begin{bmatrix} 0 & p_1 - p_0 \\ p_0 - p_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad a(t) = \varepsilon(t)r(t)\begin{bmatrix} p_1 - p_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per un sistema siffatto si ha il seguente risultato (²).

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (5.19) sia stabile è che si abbia

$$\max_{t\to+\infty} \lim \int_0^t \Lambda(\xi)\,d\xi > -\infty\,,$$

dove $\Lambda(\xi)$ è la più grande delle due radici caratteristiche della matrice $H(t) = \operatorname{sym} A(t)$.

Nel caso in questione è $H(t) = 0$, $\Lambda(t) = 0$, e la condizione espressa dal teorema è banalmente verificata.

Bibliografia

[1] L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer-Verlag, Berlin 1963.

[2] T. Levi Civita e U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Zanichelli, Bologna vol. **2** (1926), 264.

[3] T. Manacorda, *Il moto di un corpo con massa variabile*, Riv. Mat. Univ. Parma (1) **3** (1952), 361-373.

[4] G. Sansone e R. Conti, *Equazioni differenziali non lineari*, Ed. Cremonese, Roma (1956), 590.

[5] C. Silli, *Sui moti di precessione di un girostato con massa variabile*, Atti Accad. Sci. Torino **100** (1965-66), 595-608.

[6] B. A. Smol'nikov, *On the motion of a rigid body under the action of rotation of an internal flywheel*, P.M.M. **28** (1964).

(²) V. [4].

Summary

Precessions of a gyrostat with a variable mass are studied, with a particular reference to their stability under suitable classes of perturbations.

* * *