

M. CAPRILI e D. PELESSONE (*)

Sulla misura della pressione di un fluido in regime turbolento (**)

1 - Problema

Si studia la dipendenza della risposta in ampiezza e del ritardo di fase di una sonda, rappresentata schematicamente in fig. 1, dai parametri: lunghezza L e diametro d del tubo, coefficienti di smorzamento e volume V della cavità di accoppiamento.

Lo stato del fluido, poichè $d/L \ll 1$, si può assumere costante su ogni sezione trasversale, così che dipende dalla sola coordinata x , misurata lungo l'asse del tubo, e dal tempo t .

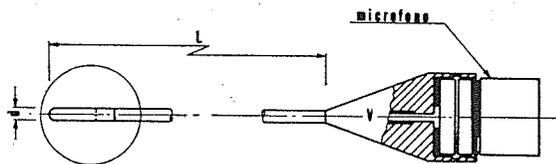


Fig. 1 - Rappresentazione schematica della sonda.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematiche Applicate « U. Dini », Via Diotallevi 2, 56100 Pisa, Italy.

(**) Ricevuto: 25-III-1980.

Ne consegue che il moto del fluido è definito dalle equazioni

$$(1) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + u \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \varrho \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + cu + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$(3) \quad p = \alpha \varrho^\gamma, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

con le condizioni al contorno

$$(4) \quad \beta u + p = p_0(1 + \chi \operatorname{sen} \omega t), \quad x = 0, \quad t \geq 0,$$

$$(5) \quad u \varrho = \frac{V}{S} \frac{d \varrho_c(t)}{dt}, \quad -\lambda u + p = p_c(t), \quad x = L, \quad t \geq 0,$$

e le condizioni iniziali

$$u = u_0, \quad p = p_0, \quad \varrho = \varrho_0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t = 0,$$

dove $c, \alpha, \gamma, \beta, \chi, \omega, \lambda$ sono costanti positive, $S = \pi d^2/4$ e u, ϱ, p , rispettivamente, la velocità, la densità e la pressione del fluido.

La condizione al contorno (4). La presenza di un filtro smorzante a $x = 0$, onde ridurre effetti indesiderati di risonanza, fa sì che il salto di pressione sia proporzionale alla velocità.

La condizione al contorno (5). La portata del fluido entrante nella cavità è uguale alla variazione di massa del fluido nella cavità; cioè

$$S \varrho(L, t) u(L, t) = V \frac{d \varrho_c(t)}{dt},$$

dove $\varrho_c(t)$ è la media integrale della densità nella cavità; inoltre il salto di pressione è proporzionale alla velocità; cioè

$$\lambda u(L, t) = p(L, t) - p_c(t),$$

dove $p_c(t)$ è la media integrale della pressione nella cavità.

Introducendo le variabili adimensionali

$$\xi = x/L, \quad \tau = a_0 t/L, \quad v = u/a_0, \quad w = (p - p_0)/\gamma p_0,$$

dove $a_0 = [p_0 \cdot \gamma / \rho_0]^{\frac{1}{2}}$ e considerando piccole perturbazioni di u , ρ , p dai valori $u_0 = 0$, $\rho_0 = \text{cost.}$, $p_0 = \text{cost.}$ del fluido in quiete, il problema differenziale non lineare (1)-(5) si può approssimare con il problema differenziale lineare

$$(6) \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0,$$

$$(7) \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} + \mu v + \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0,$$

$$(8) \quad \delta v + w = \frac{\chi}{\gamma} \text{sen } \nu \tau, \quad \xi = 0, \quad \tau \geq 0,$$

$$(9) \quad v + \sigma \eta \frac{\partial v}{\partial \tau} - \sigma \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0, \quad \xi = 1, \quad \tau \geq 0,$$

dove $\mu = cL/a_0$, $\delta = \beta/a_0 \rho_0$, $\nu = \omega L/a_0$, $\sigma = V/LS$, $\eta = \lambda a_0 / \gamma p_0$.

Si osserva che la (9) si è ottenuta supponendo che p_c e ρ_c soddisfino la (3).

Chiaramente la soluzione di (6)-(9) deve inoltre soddisfare la condizione iniziale

$$(10) \quad v = 0, \quad w = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad \tau = 0.$$

Si verifica che, se $v(\xi, \tau)$ e $w(\xi, \tau)$ sono di classe C^1 nel dominio $D_\tau = \{(\xi, \tau): 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \tau \leq T\}$ le (8) e (9) sono compatibili con la (10). Infatti la (8), per $\tau = 0$, è subito verificata dalla (10) mentre la (9) per le (6) e (7) si può scrivere

$$(1 - \sigma \eta \mu) v + \sigma \frac{\partial v}{\partial \xi} - \sigma \eta \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 1, \quad \tau \geq 0.$$

Poichè dalla (10) si trae $(\partial v / \partial \xi)(1, 0) = (\partial w / \partial \xi)(1, 0) = 0$ la precedente equazione è compatibile con la (10).

Le equazioni (3) e (5), linearizzate ed in forma adimensionale, si scrivono

$$(3)' \quad w = z, \quad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0,$$

$$(5)' \quad v = \sigma \frac{dz_c}{d\tau}, \quad -\eta v + w = w_c, \quad \xi = 1, \quad \tau \geq 0,$$

dove $z = (\rho - \rho_0) / \rho_0$, $z_c = (\rho_c - \rho_0) / \rho_0$ e $w_c = (p_c - p_0) / \gamma p_0$.

Mostriamo ora che, se v e w soddisfano le equazioni (9) e (10) le funzioni $z_c(\tau)$ e $w_c(\tau)$, che risultano dalle (5)', soddisfano la (3)'.

Infatti, dalla (5)', poichè $z_c(0) = 0$, si trova

$$(5)'' \quad z_c = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\tau} v(1, \tau) d\tau, \quad w_c = -\eta v + w, \quad \xi = 1, \quad \tau \geq 0,$$

o anche, sottraendo membro a membro,

$$(11) \quad w_c(\tau) - z_c(\tau) = -\eta v(1, \tau) + w(1, \tau) - \frac{1}{\sigma} \int_0^{\tau} v(1, \tau) d\tau.$$

Ma, per le (9) e (10),

$$\int_0^{\tau} v(1, \tau) d\tau = -\sigma\eta v(1, \tau) + \sigma w(1, \tau),$$

cosicchè, sostituendo questa equazione nella (11), si ottiene, come volevasi, $w_c(\tau) = z_c(\tau)$, $\tau \geq 0$.

Dimostriamo adesso il seguente

Teorema 1. *La soluzione del problema misto (6)-(10) nella classe C^1 in D_T è unica (1).*

Dim. Supponiamo che vi siano due soluzioni $v_1(\xi, \tau)$, $w_1(\xi, \tau)$ e $v_2(\xi, \tau)$, $w_2(\xi, \tau)$ del problema misto (6)-(10). La differenza $\nu(\xi, \tau) = v_1(\xi, \tau) - v_2(\xi, \tau)$, $\omega(\xi, \tau) = w_1(\xi, \tau) - w_2(\xi, \tau)$ soddisferà allora sia il sistema omogeneo

$$(12) \quad \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = 0,$$

$$(13) \quad \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \mu \nu + \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0,$$

sia le condizioni al contorno

$$(14) \quad \delta \nu + \omega = 0, \quad \xi = 0, \quad \tau \geq 0,$$

$$(15) \quad \nu + \sigma \eta \frac{\partial \nu}{\partial \tau} - \sigma \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = 0, \quad \xi = 1, \quad \tau \geq 0,$$

(1) L'esistenza della soluzione è dimostrata in Appendice.

sia le condizioni iniziali

$$(16) \quad v = 0, \quad \omega = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad \tau = 0.$$

Mostreremo che $v(\xi, \tau) \equiv 0$, $\omega(\xi, \tau) \equiv 0$ in D_T . Moltiplicando la (12) per $\omega(\xi, \tau)$, la (13) per $v(\xi, \tau)$ e integrando sul rettangolo $D_{T_1} = \{(\xi, \tau): 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \tau \leq T_1 \leq T\}$ riesce

$$\iint_{D_{T_1}} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \omega + \omega \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right) d\xi d\tau = 0, \quad \iint_{D_{T_1}} \left(v \frac{\partial v}{\partial \tau} + \mu v^2 + v \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right) d\xi d\tau = 0,$$

sommando quindi membro a membro, si ottiene

$$(17) \quad \iint_{D_{T_1}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \omega^2}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (v\omega) + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial \tau} + \mu v^2 \right) d\xi d\tau = 0.$$

Inoltre, integrando per parti e sommando alla (17) la quantità nulla

$$\int_0^{T_1} \eta v(1, \tau) \{v(1, \tau) + \sigma \frac{\partial}{\partial \tau} [\eta v(1, \tau) - \omega(1, \tau)]\} d\tau = 0,$$

per le (14) e (15) si trova

$$(18) \quad \frac{1}{2} \int_0^1 [v^2(\xi, T_1) + \omega^2(\xi, T_1)] d\xi + \frac{1}{2} \sigma [\eta v(1, T_1) - \omega(1, T_1)]^2 \\ + \mu \iint_{D_{T_1}} v^2 d\xi d\tau + \eta \int_0^{T_1} v^2(1, \tau) d\tau + \delta \int_0^{T_1} v^2(0, \tau) d\tau \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 [v^2(\xi, 0) + \omega^2(\xi, 0)] d\xi + \frac{1}{2} \sigma [\eta v(1, 0) - \omega(1, 0)]^2.$$

Per la (16) il secondo membro della (18) è nullo cosicchè la (18) è vera se, e solo se $v(\xi, \tau) \equiv 0$ in D_{T_1} e $\omega(\xi, T_1) \equiv 0$ per $0 \leq \xi \leq 1$. Essendo $T_1 \leq T$ qualunque, ne segue $v(\xi, \tau) \equiv \omega(\xi, \tau) \equiv 0$ in D_T .

Cerchiamo adesso la soluzione v, w del problema misto (6)-(10) nella forma

$$(19) \quad v(\xi, \tau) = \tilde{v}(\xi, \tau) + \hat{v}(\xi, \tau), \quad w(\xi, \tau) = \tilde{w}(\xi, \tau) + \hat{w}(\xi, \tau),$$

dove le funzioni \tilde{v}, \tilde{w} sono soluzione del problema ai limiti (6)-(9).

Per la linearità del problema misto (6)-(10) le funzioni \hat{v} , \hat{w} sono tali che

$$(20) \quad \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} = 0,$$

$$(21) \quad \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} + \mu \hat{v} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0,$$

$$(22) \quad \delta \hat{v} + \hat{w} = 0, \quad \xi = 0, \quad \tau \geq 0,$$

$$(23) \quad \hat{v} + \sigma \eta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} - \sigma \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} = 0, \quad \xi = 1, \quad \tau \geq 0,$$

$$(24) \quad \hat{v} = -\tilde{v}, \quad \hat{w} = -\tilde{w}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad \tau = 0.$$

A tal proposito sussiste il

Teorema 2. *Se la soluzione \hat{v} , \hat{w} è di classe C^3 in $D \equiv \{(\xi, \tau): 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \tau < +\infty\}$, allora converge uniformemente a zero rispetto a ξ quando τ tende a infinito; cioè*

$$(25) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq \xi \leq 1} \hat{v}(\xi, \tau) = 0,$$

$$(26) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq \xi \leq 1} \hat{w}(\xi, \tau) = 0.$$

Premettiamo per la dimostrazione del teorema alcuni lemmi.

Lemma 1. *Supposta la soluzione \hat{v} , \hat{w} , di classe C^2 in D , riesce*

$$(27) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^1 \hat{v}^2(\xi, \tau) d\xi = 0.$$

Dim. Posto

$$a(f, g; \tau) = \frac{1}{2} \int_0^1 [f^2(\xi, \tau) + g^2(\xi, \tau)] d\xi + \frac{\sigma}{2} [\eta f(1, \tau) - g(1, \tau)]^2,$$

per la (18) risulta

$$(28) \quad a(\hat{v}, \hat{w}; T) + \mu \int_{D_T} \hat{v}^2 d\xi d\tau + \eta \int_0^T \hat{v}^2(1, \tau) d\tau + \delta \int_0^T \hat{v}^2(0, \tau) d\tau = a(\hat{v}, \hat{w}; 0).$$

Poichè $a(\hat{\phi}, \hat{w}; \tau)$ è una forma definita positiva per ogni $\tau \geq 0$, l'integrale $\int \int_D \hat{\phi}^2 d\xi d\tau$ è limitato per ogni $D_T \subset D$; cioè

$$(29) \quad \int \int_D \hat{\phi}^2 d\xi d\tau < +\infty.$$

Derivando formalmente le (20) e (23) rispetto a τ si ottiene

$$(30) \quad \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$(31) \quad \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \tau^2} + \mu \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi \partial \tau} = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0,$$

$$(32) \quad \delta \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} = 0, \quad \xi = 0, \quad \tau \geq 0,$$

$$(33) \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau} + \sigma \eta \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \tau^2} - \sigma \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \tau^2} = 0, \quad \xi = 1, \quad \tau \geq 0,$$

cioè il problema ai limiti (20)-(23) nelle incognite $\partial \hat{\phi} / \partial \tau$, $\partial \hat{w} / \partial \tau$. Pertanto, analogamente alla (28), si può scrivere

$$(34) \quad a\left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau}, \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau}; T\right) + \mu \int \int_D \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau}\right)^2 d\xi d\tau + \eta \int_0^T \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau}(1, \tau)\right)^2 d\tau + \delta \int_0^T \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau}(0, \tau)\right)^2 d\tau \\ = a\left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau}, \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau}; 0\right),$$

e l'integrale $\int \int_D (\partial \hat{\phi} / \partial \tau)^2 d\xi d\tau$ risulta limitato per ogni $D_T \subset D$; cioè

$$(35) \quad \int \int_D \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau}\right)^2 d\xi d\tau < +\infty.$$

Mostriamo adesso che vale

$$(36) \quad \int_0^1 \hat{\phi}^2 d\xi = -2 \int_{\tau}^{+\infty} d\tau \int_0^1 \hat{\phi} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau} d\xi.$$

Infatti si ha

$$\int_0^1 \hat{\phi}^2(\xi, \tau_2) d\xi - \int_0^1 \hat{\phi}^2(\xi, \tau_1) d\xi = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^1 2\hat{\phi} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau} d\xi,$$

e per la (29) esiste una successione $\{\tau_n\}$ divergente positivamente tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \hat{\psi}^2(\xi, \tau_n) d\xi = 0$, così che, facendo tendere τ_n a $+\infty$ lungo questa successione, si ha la (36).

Per la disuguaglianza di Schwarz, dalla (36) si trae

$$\int_0^1 \hat{\psi}^2 d\xi \leq 2 \left[\int_{\tau}^{+\infty} d\tau \int_0^1 \hat{\psi}^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\tau}^{+\infty} d\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \tau} \right)^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}}$$

e quindi, per le (29) e (35), segue la (27).

Analogamente al Lemma 1 si dimostra il

Lemma 2. *Supposto la soluzione di (20)-(24) di classe C^3 in D si ha*

$$(37) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \tau} \right)^2 d\xi = 0.$$

Lemma 3. *Se \hat{v} e \hat{w} sono di classe C^3 in D , risulta*

$$(38) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} \right)^2 d\xi = 0.$$

Dim. Derivando formalmente le (21)-(23) rispetto a ξ si ha

$$(39) \quad \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \tau \partial \xi} + \mu \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi^2} = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0,$$

$$(40) \quad \delta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 0, \quad \tau \geq 0,$$

$$(41) \quad \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \sigma \eta \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \tau \partial \xi} - \sigma \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \tau \partial \xi} = 0, \quad \xi = 1, \quad \tau \geq 0.$$

Moltiplicando la (39) per $\partial \hat{w} / \partial \tau$ e integrando in D_τ si trova

$$(42) \quad \iint_{D_\tau} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \tau \partial \xi} d\xi d\tau + \mu \iint_{D_\tau} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} d\xi d\tau + \iint_{D_\tau} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi^2} d\xi d\tau = 0.$$

Tuttavia per la (30)

$$\iint_{D_\tau} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \tau \partial \xi} d\xi d\tau = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi}(\xi, T) \right]^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi}(\xi, 0) \right]^2 d\xi,$$

per la (20)

$$\mu \int_{D_T} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \tau} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \xi} d\xi d\tau = -\mu \int_{D_T} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \tau} \right)^2 d\xi d\tau$$

e, per le (20), (40) e (41),

$$\begin{aligned} \int_{D_T} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \xi^2} d\xi d\tau &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\partial \dot{w}}{\partial \xi}(\xi, T) \right]^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\partial \dot{w}}{\partial \xi}(\xi, 0) \right]^2 d\xi \\ &\quad - \frac{\sigma}{2} [\eta \dot{\phi}(1, T) - \dot{w}(1, T)]^2 + \frac{\sigma}{2} [\eta \dot{\phi}(1, 0) - \dot{w}(1, 0)]^2 - \delta \int_0^1 \left[\frac{\partial \dot{w}}{\partial \tau}(0, \tau) \right]^2 d\tau. \end{aligned}$$

Così che la (42) si può scrivere

$$a \left(\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \xi}, \frac{\dot{w}}{\partial \xi}; T \right) + \mu \int_{D_T} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \tau} \right)^2 d\xi d\tau + \delta \int_0^T \left[\frac{\partial \dot{w}}{\partial \tau}(0, \tau) \right]^2 d\tau = a \left(\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \xi}, \frac{\dot{w}}{\partial \xi}; 0 \right)$$

e l'integrale $\int_{D_T} (\partial \dot{w} / \partial \tau)^2 d\xi d\tau$ risulta limitato per ogni $D_T \subset D$; cioè

$$(43) \quad \int_{D_T} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \tau} \right)^2 d\xi d\tau < +\infty.$$

In modo del tutto analogo si dimostra che

$$(44) \quad \int_{D_T} \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \tau^2} \right)^2 d\xi d\tau < +\infty.$$

Sicchè, come nel Lemma 1, viene

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \tau} \right)^2 d\xi \leq 2 \left[\int_{\tau}^{+\infty} d\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \tau} \right)^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\tau}^{+\infty} d\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \tau^2} \right)^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}}$$

e, per le (43) e (44), si ha la (38).

Dal Lemma 3 e per la (20) inoltre risulta

$$(45) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \xi} \right)^2 d\xi = 0.$$

Dimostriamo adesso il Teorema 2. Sia

$$\dot{\phi}(\xi, \tau) - \dot{\phi}(0, \tau) = \int_0^{\xi} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \xi} d\xi,$$

da cui

$$|\hat{v}(\xi, \tau) - \hat{v}(0, \tau)| \leq \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Così che per la (45) riesce $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{v}(\xi, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{v}(0, \tau)$, ma per il Lemma 1

$$(46) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{v}(0, \tau) = 0,$$

e quindi la (25).

Per dimostrare la (26) si osserva che per la (21) si ha $|\partial \hat{w} / \partial \xi| \leq |\partial \hat{v} / \partial \tau| + \mu |\hat{v}|$, o anche

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \leq \int_0^1 \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} \right)^2 d\xi + \mu^2 \int_0^1 \hat{v}^2 d\xi + 2\mu \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} \right)^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \hat{v}^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pertanto per i Lemmi 1 e 2 risulta

$$(47) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right)^2 d\xi = 0.$$

Allora, posto $\hat{w}(\xi, \tau) - \hat{w}(0, \tau) = \int_0^\xi (\partial \hat{w} / \partial \xi) d\xi$, da cui $|\hat{w}(\xi, \tau) - \hat{w}(0, \tau)| \leq \int_0^1 (\partial \hat{w} / \partial \xi)^2 d\xi$, per la (47) si ha $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{w}(\xi, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{w}(0, \tau)$. Ma per la (22) e (46) $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{w}(0, \tau) = 0$, e quindi la (26).

Determiniamo adesso la soluzione \tilde{v}, \tilde{w} , periodica rispetto a τ . Si osserva che, per studiare la risposta in ampiezza e il ritardo di fase, ci possiamo limitare a considerare solo la parte periodica della soluzione, trascurando la parte \hat{v}, \hat{w} transitoria; infatti in virtù del Teorema 2, le norme $\|\hat{v}\|_\infty, \|\hat{w}\|_\infty$ ⁽²⁾, per $\tau > \bar{\tau}$ sufficientemente grande, sono minori di un arbitrario numero positivo. La realizzazione fisica della sonda e le misure eseguite hanno confermato questa scelta; cioè $\bar{\tau}$ è ragionevolmente piccolo.

Poniamo dunque

$$(48) \quad \tilde{v}(\xi, \tau) = f_1(\xi) \operatorname{sen} \nu \tau + f_2(\xi) \operatorname{cos} \nu \tau,$$

$$(49) \quad \tilde{w}(\xi, \tau) = g_1(\xi) \operatorname{sen} \nu \tau + g_2(\xi) \operatorname{cos} \nu \tau.$$

(2) Si è indicato, come consueto, $\|\hat{v}\|_\infty = \sup_{0 \leq \xi \leq 1} |\hat{v}|$, $\|\hat{w}\|_\infty = \sup_{0 \leq \xi \leq 1} |\hat{w}|$.

Sostituendo le (48) e (49) nelle (6) e (7) si ottiene il sistema differenziale

$$(50) \quad \mathbf{y}' = A\mathbf{y},$$

dove $\mathbf{y}^x \equiv [y_1, y_2, y_3, y_4] = [f_1, f_2, g_1, g_2]$ e

$$(51) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & -\nu & 0 \\ -\mu & \nu & 0 & 0 \\ -\nu & -\mu & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di A risultano

$$(52) \quad \lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \lambda_3 = -\alpha + i\beta, \quad \lambda_4 = -\alpha - i\beta,$$

dove

$$\alpha = \nu \left(\frac{\sqrt{1 + (\mu/\nu)^2} - 1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta = \nu \left(\frac{\sqrt{1 + (\mu/\nu)^2} + 1}{2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

e gli autovettori associati, rispettivamente, sono

$$(53) \quad \begin{aligned} \mathbf{c}_1^x &= [\nu/\lambda_1, i\lambda_3/\sqrt{\nu^2 + \mu^2}, i, 1], & \mathbf{c}_2^x &= [\nu/\lambda_2, i\lambda_1/\sqrt{\nu^2 + \mu^2}, -i, 1], \\ \mathbf{c}_3^x &= [\nu/\lambda_3, i\lambda_4/\sqrt{\nu^2 + \mu^2}, -i, 1], & \mathbf{c}_4^x &= [\nu/\lambda_4, i\lambda_2/\sqrt{\nu^2 + \mu^2}, i, 1]. \end{aligned}$$

Pertanto, se $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, la soluzione generale di (50) diviene

$$(54) \quad \mathbf{y}(\xi) = \sum_{i=1}^4 a_i \mathbf{c}_i \exp(\lambda_i \xi),$$

con a_1, a_2, a_3, a_4 costanti arbitrarie.

Le condizioni ai limiti (8), (9) si scrivono

$$(55) \quad D_1 \mathbf{y}(0) = \mathbf{d}_1, \quad D_2 \mathbf{y}(1) = \mathbf{0},$$

dove

$$D_1 = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\sigma\nu\eta & 0 & \sigma\nu \\ \sigma\nu\eta & 1 & -\sigma\nu & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_1^x = [\chi/\nu, 0].$$

Posto $\mathbf{a}^T = [a_1, a_2, a_3, a_4]$, $\mathbf{d}^T = [\chi/\gamma, 0, 0, 0]$ e sostituendo la (54) in (55), si ha il sistema

$$H\mathbf{a} = \mathbf{d},$$

dove $H = DC$, con $C = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4]$ e

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ \dots \\ D_2 \Delta \end{bmatrix}, \quad \Delta = \text{diag} \{e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, e^{\lambda_3}, e^{\lambda_4}\}.$$

Nelle ipotesi poste gli autovettori (53) sono linearmente indipendenti cosicchè la matrice C è non degenera. Inoltre, essendo $\det(D) = \sigma^2 \nu^2 (\delta \exp(-\alpha) + \eta \exp(\alpha))^2 + \exp(2\alpha)$, chiaramente positivo, la matrice H risulta non degenera e si può affermare il seguente

Teorema 3. *Il sistema differenziale (50) con le condizioni ai limiti (55) ha una e una sola soluzione.*

2 - Risposta in ampiezza

Il segnale di uscita del trasduttore, costituito da un microfono a condensatore, dipende dalla deformazione del diaframma del microfono. La deformazione del diaframma, il quale è schematizzabile ad una membrana sottile circolare fissata al bordo, dipende dalla differenza delle pressioni che si esercitano sulle superfici: S_1 interna alla cavità e S_2 esterna. Chiaramente gli spostamenti del diaframma sono maggiormente influenzati dalla pressione al centro, uguale a circa a $p(L, t)$. Assumendo la pressione su S_2 uguale a p_0 , l'ampiezza del segnale di uscita del trasduttore è, con buona approssimazione, proporzionale all'ampiezza $p(L, t) - p_0$, [1], [5].

Supposto che la risposta in ampiezza G_T del trasduttore sia costante nella banda di frequenza di impiego della sonda, per la (49), la risposta in ampiezza G della sonda risulta

$$(56) \quad G = k \sqrt{g_1^2(1) + g_2^2(1)}, \quad k = G_T \gamma/\chi.$$

Supposto che il fluido all'interno del tubo sia in regime di Poiseuille risulta $\mu = 2\pi\varphi L/a_0 S$, dove φ è la viscosità cinematica del fluido.

Poichè nelle prove sperimentali il fluido è aria, $L/d \simeq 50$, il confronto tra i risultati numerici e sperimentali può essere fatto ponendo nelle equazioni

di par. 1 $\mu = 0$. In tal caso gli autovalori (52) divengono

$$(57) \quad \lambda_1 = \lambda_3 = i\nu, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = -i\nu,$$

e gli autovettori associati risultano

$$(58) \quad \mathbf{c}_1^x = [-i, 0, 0, 1], \quad \mathbf{c}_2^x = [i, 0, 0, 1], \quad \mathbf{c}_3^x = [0, i, 1, 0], \quad \mathbf{c}_4^x = [0, -i, 1, 0].$$

Poichè gli autovettori (58) risultano linearmente indipendenti, la soluzione generale, per $\mu = 0$, di (50) è formalmente identica alla (54). Tuttavia per la (57) la soluzione generale si può scrivere

$$(59) \quad \mathbf{y}(\xi) = \mathbf{b} \cos \nu \xi + \hat{\mathbf{b}} \sin \nu \xi,$$

dove $\mathbf{b}^x = [b_1, b_2, b_3, b_4]$, $\hat{\mathbf{b}}^x = [b_4, -b_3, b_2, -b_1]$ e b_1, b_2, b_3, b_4 costanti arbitrarie.

Imponendo le condizioni ai limiti (55), le costanti b_i ($i = 1, 2, 3, 4$) risultano

$$(60)_1 \quad b_1 = \frac{\chi}{\gamma \Delta} \{ \sigma^2 \nu^2 \eta + \delta [(\sigma \nu \eta \sin \nu)^2 + (\sin \nu + \sigma \nu \cos \nu)^2] \},$$

$$(60)_2 \quad b_2 = \frac{\chi}{\gamma \Delta} [(\cos \nu - \sigma \nu \sin \nu)(\sigma \nu \cos \nu + \sin \nu) + (\sigma \nu \eta)^2 \sin \nu \cos \nu],$$

$$(60)_3 \quad b_3 = \frac{\chi}{\gamma \Delta} [(\cos \nu - \sigma \nu \sin \nu)^2 + (\sigma \nu \eta \cos \nu)^2 + \delta \sigma^2 \nu^2 \eta],$$

$$(60)_4 \quad b_4 = \frac{\chi \delta}{\gamma \Delta} [(\sigma \nu \sin \nu - \cos \nu)(\sin \nu + \sigma \nu \cos \nu) - (\sigma \nu \eta)^2 \sin \nu \cos \nu],$$

dove $\Delta = \delta \{ 2\sigma^2 \nu^2 \eta + \delta [(\sigma \nu \eta \sin \nu)^2 + (\sin \nu + \sigma \nu \cos \nu)^2] \} + (\cos \nu - \sigma \nu \sin \nu)^2 + (\sigma \nu \eta \cos \nu)^2$. Pertanto la (56), per la (59), si scrive

$$(61) \quad G = k [(b_3 \cos \nu + b_2 \sin \nu)^2 + (b_4 \cos \nu - b_1 \sin \nu)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Alcuni casi particolari.

(a) Il rapporto tra il volume della cavità di accoppiamento e il volume del tubo tende a zero; poniamo cioè $\sigma = 0$. Allora la (61), per la (60) diviene

$$G = G_T (\cos^2 \nu + \delta^2 \sin^2 \nu)^{-\frac{1}{2}}.$$

In fig. 2 sono riportati i grafici di $S(\nu) = 20 \log (G/G_T)$ per $\delta = 0, 0.5, 1, 2$ ⁽³⁾. Al crescere di δ , cioè dello smorzamento, i valori di $S(\nu)$ in corrispondenza delle frequenze di risonanza diminuiscono: tali valori sono massimi se $\delta < 1$, minimi se $\delta > 1$ e infine, se $\delta = 1$, $S(\nu)$ è costante.

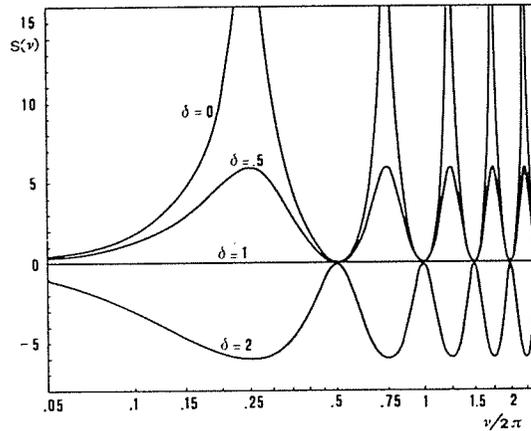


Fig. 2 - Risposta in ampiezza per $\sigma = \mu = 0$.

(b) Nelle figg. 3 e 4 riportiamo i grafici di $S(\nu) = 20 \log (G/G_T)$, qui $G(\nu)$ è dato dalla (61), per $\eta = 0$, $\delta = 0, 0.5, 1, 2$ e rispettivamente $\sigma = 0.1, 0.2$.

Per $\delta = 1$ si osserva, dal confronto dei grafici, che $S(\nu)$ diminuisce al crescere di σ e al crescere di ν . È opportuno quindi, per una buona sonda, che σ sia piccolo.

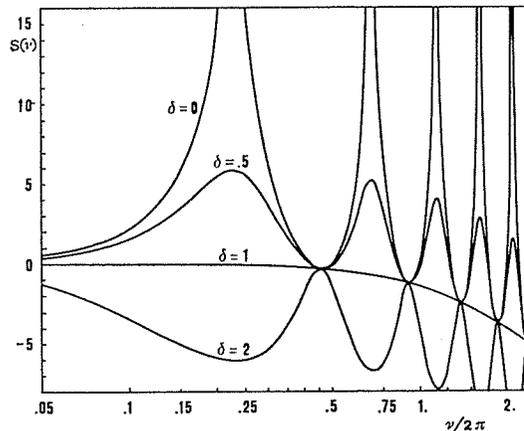


Fig. 3 - Risposta in ampiezza per $\sigma = 0.1$ e $\eta = \mu = 0$.

⁽³⁾ Si è usata la convenzione anglosassone di sostituire il punto alla virgola.

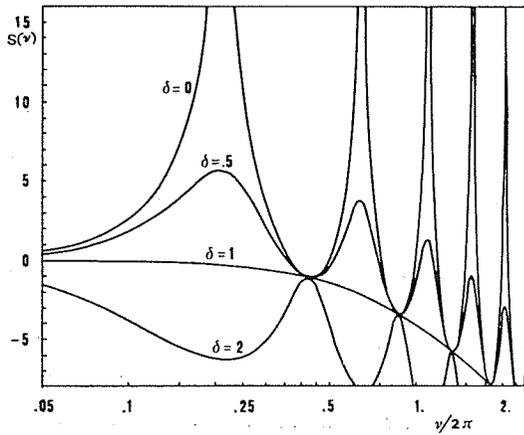
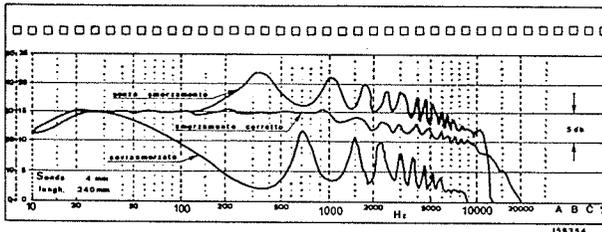
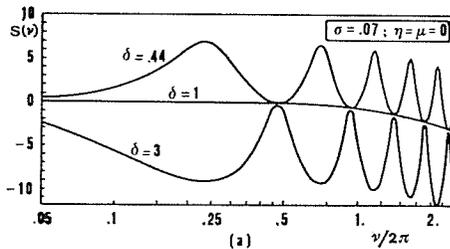


Fig. 4 - Risposta in ampiezza per $\sigma = 0.2$ e $\eta = \mu = 0$.

(c) I grafici delle figg. 5 e 6 mostrano un confronto tra i risultati sperimentali e risultati numerici ottenuti, questi ultimi, tramite le (60) e (61). In fig. 5 si è posto $\sigma = 0.07$, $\eta = 0$ e $\delta = 0.44, 1, 3$, mentre in fig. 6 si è posto $\sigma = 0.55$, $\delta = 0.11$, $\eta = 0.3$, oppure $\sigma = 1.2$, $\delta = 0.6$, $\eta = 0.7$. Il notevole accordo tra i risultati appare evidente.

Osserviamo che, i grafici delle figg. 3, 4, 5 e 6 sono stati costruiti tramite l'elaboratore IBM 370/158.



(b)

Fig. 5 - Confronto tra risultati numerici (a) e sperimentali (b).

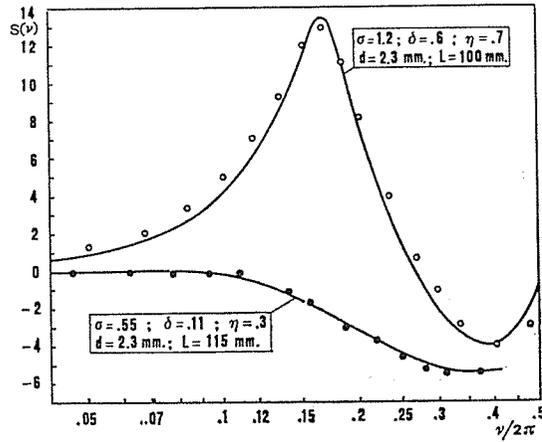


Fig. 6 - Confronto tra risultati numerici (linee continue) e sperimentali (linee per punti).

(d) Infine i grafici di fig. 7 mostrano l'andamento di $S(\nu)$ al variare di $\sigma\nu$ per $\delta = 1$ e $\eta = 0, 0.5, 1$.

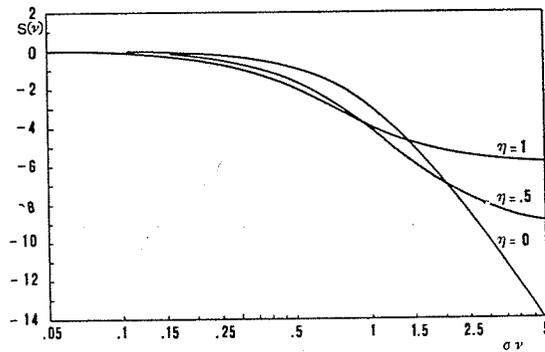


Fig. 7 - Risposta in ampiezza per $\delta = 1$ e $\mu = 0$.

3 - Ritardo di fase

Ferme restando le considerazioni del par. 2 ed assumendo che il ritardo temporale introdotto dal trasduttore sia costante nella banda di frequenza

di impiego della sonda, il ritardo angolare di fase Φ_f del segnale all'estremità $\xi = 1$ del tubo, per le (49) e (59), risulta

$$(62) \quad \text{tang } \Phi_f = \frac{g_2(1)}{g_1(1)} = \frac{b_4 \cos \nu - b_1 \text{sen } \nu}{b_3 \cos \nu + b_2 \text{sen } \nu},$$

e il ritardo temporale di fase Γ_f ($= t_f(L/a_0)$), diviene

$$(63) \quad \Gamma_f = \frac{\Phi_f}{\nu},$$

dove le funzioni b_1, b_2, b_3, b_4 sono espresse dalle (60).

Alcuni casi particolari.

(a) $\sigma = 0$. Allora la (62), per le (60), si può scrivere $\text{tang } \Phi_f = -\delta \text{ tang } \nu$ e nelle figg. 8 e 9 riportiamo i grafici di Φ_f e Γ_f per $\delta = 0.5, 1, 2$. Per $\delta = 1$ il ritardo temporale di fase risulta costante ($\equiv L/a_0$); la valutazione numerica di questa costante è utile per calcolare i fattori di correlazione fra le fluttuazioni di pressione e le fluttuazioni di altre grandezze fisiche relativamente ad uno studio statistico dei fenomeni di turbolenza.

Queste considerazioni, anche se dedotte per un caso ideale: fluido non viscoso e $\sigma = 0$, sono tuttavia valide in generale per un'ampia banda di frequenza. Infatti, gli effetti della cavità di accoppiamento e della viscosità del fluido risultano significativi solo alle alte frequenze.

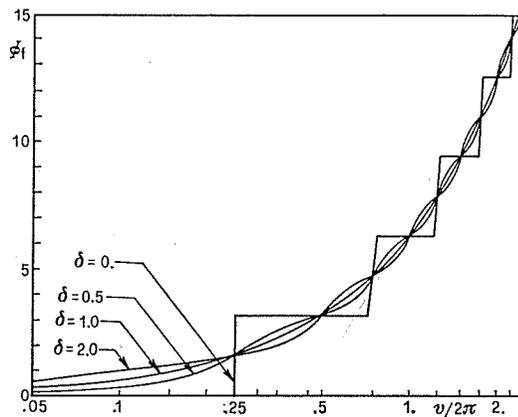


Fig. 8 - Ritardo angolare di fase per $\sigma = \mu = 0$.

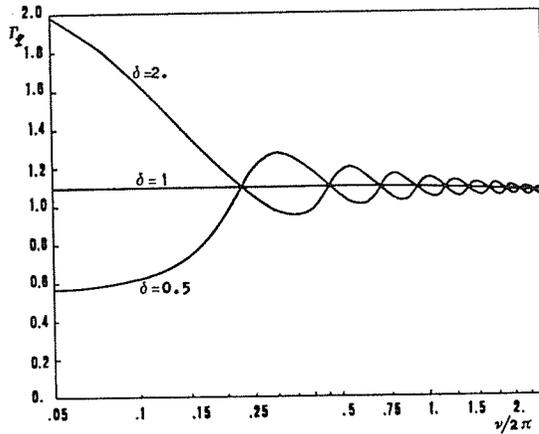


Fig. 9 - Ritardo temporale di fase per $\sigma = \mu = 0$.

(b) $\sigma = 0.1$. Riportiamo nelle figg. 10 e 11 i grafici di Φ_r e Γ_r per $\mu = \eta = 0$ e $\gamma = 0.5, 1, 2$. Tali grafici sono stati ottenuti con l'ausilio del calcolatore IBM 370/158.

Si conclude osservando che, l'effetto della viscosità del fluido, finora tralasciato, risulta particolarmente sensibile per tubi di diametro molto piccolo, (0.5 ÷ 1) mm, [2], [3]. Chiaramente, in tali casi, si può valutare l'influenza della viscosità tramite le formule di par. 1 e procedendo in modo analogo a $\mu=0$.

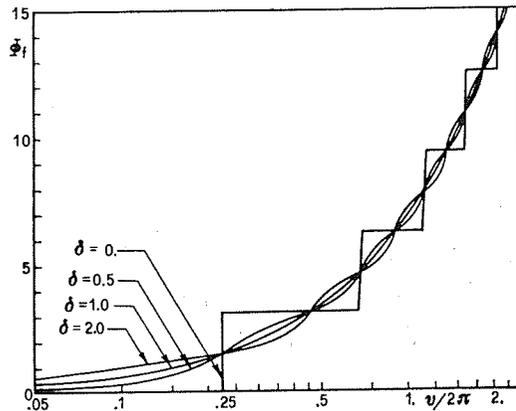


Fig. 10 - Ritardo angolare di fase per $\sigma = 0.1, \eta = \mu = 0$.

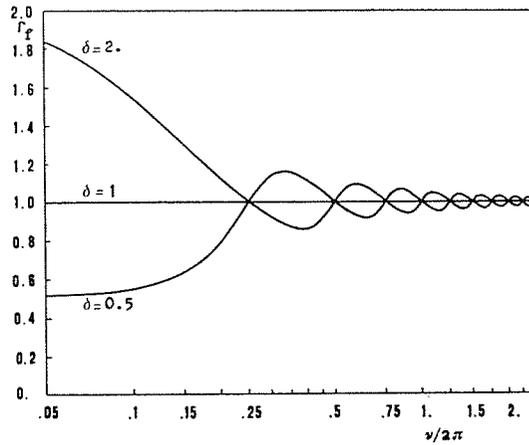


Fig. 11 - Ritardo temporale di fase per $\sigma = 0.1$ e $\eta = \mu = 0$.

4 - Appendice

Proviamo l'esistenza della soluzione del problema differenziale (6)-(10) nella classe di funzioni trasformabili secondo Laplace e al tempo stesso diamo un metodo per determinarla.

Ponendo

$$V(\xi, p) = L[v(\xi, \tau)] = \int_0^{+\infty} \exp(-p\tau) v(\xi, \tau) d\tau, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$W(\xi, p) = L[w(\xi, \tau)] = \int_0^{+\infty} \exp(-p\tau) w(\xi, \tau) d\tau, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

e applicando ai due membri di ciascuna delle equazioni (6)-(9) la trasformata di Laplace, si ottiene, in virtù delle condizioni iniziali (10),

$$(64) \quad \frac{dV}{d\xi} + pW = 0, \quad \frac{dW}{d\xi} + (p + \mu)V = 0, \quad 0 < \xi < 1,$$

$$\delta V + W = F(p), \quad \xi = 0, \quad (1 + \sigma\mu p)V - \sigma p W = 0, \quad \xi = 1.$$

dove $F(p) = (\chi/\gamma)(v/(p^2 + \nu^2))$.

Con facili calcoli, si trova che la soluzione di (64) è

$$(65) \quad \begin{aligned} V(\xi, p) &= Z_0 \frac{Z_0 \sinh [(1-\xi)K] + Z \cosh [(1-\xi)K]}{(\delta Z_0^2 + Z) \sinh K + Z_0(\delta Z + 1) \cosh K} F(p), \\ W(\xi, p) &= \frac{Z_0 \cosh [(1-\xi)K] + Z \sinh [(1-\xi)K]}{(\delta Z_0^2 + Z) \sinh K + Z_0(\delta Z + 1) \cosh K} F(p), \end{aligned}$$

o anche

$$(66) \quad \begin{aligned} V(\xi, p) &= \frac{Z_0}{\delta Z_0 + 1} \frac{\exp(-\xi K) - (Z_0 - Z)/(Z_0 + Z) \exp(-(2-\xi)K)}{1 - (\delta Z_0 - 1)/(\delta Z_0 + 1) \cdot (Z_0 - Z)/(Z_0 + Z) \exp(-2K)} F(p), \\ W(\xi, p) &= \frac{1}{\delta Z_0 + 1} \frac{\exp(-\xi K) + (Z_0 - Z)/(Z_0 + Z) \exp(-(2-\xi)K)}{1 - (\delta Z_0 - 1)/(\delta Z_0 + 1) \cdot (Z_0 - Z)/(Z_0 + Z) \exp(-2K)} F(p), \end{aligned}$$

dove

$$(67) \quad K(p) = \sqrt{p(p + \mu)}, \quad Z_0(p) = \frac{p}{\sqrt{p(p + \mu)}}, \quad Z(p) = \frac{p}{1 + \sigma \eta p},$$

con $K(p)$ la determinazione principale di $\sqrt{p(p + \mu)}$.

Mostriamo adesso che le funzioni $V(\xi, p)$, $W(\xi, p)$, sono L -antitrasformabili per ogni $0 \leq \xi < 1$.

Premettiamo il seguente ([6])

Teorema 4. *Le funzioni $f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)$ siano assolutamente L -trasformabili per $\operatorname{Re}(p) > a$ e sia $L[f_l(t)] = F_l(p)$, ($l = 1, 2, \dots, k$). La funzione $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_k)$ sia olomorfa in un intorno del punto $(0, 0, \dots, 0)$, risultando $\varphi(0, 0, \dots, 0) = 0$. Allora esistono un numero reale $b > a$ ed una funzione assolutamente L -trasformabile $f(t)$ tale da aversi*

$$L[f(t)] = \varphi[F_1(p), F_2(p), \dots, F_k(p)], \quad \text{per } \operatorname{Re}(p) > b.$$

Le funzioni

$$(68) \quad H_1(\xi, p) = \frac{Z_0}{\delta Z_0 + 1} F(p) \exp(-\xi \sqrt{p(p + \mu)}),$$

$$(69) \quad H_2(\xi, p) = \frac{Z_0}{\delta Z_0 + 1} \frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z} F(p) \exp(-(2-\xi) \sqrt{p(p + \mu)}),$$

$$(70) \quad H_3(\xi, p) = \frac{1}{\delta Z_0 + 1} F(p) \exp(-\xi \sqrt{p(p+\mu)}),$$

$$(71) \quad H_4(\xi, p) = \frac{1}{\delta Z_0 + 1} \frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z} F(p) \exp(-(2-\xi) \sqrt{p(p+\mu)}),$$

$$(72) \quad H_5(p) = \frac{\delta Z_0 - 1}{\delta Z_0 + 1} \frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z} \exp(-2 \sqrt{p(p+\mu)}),$$

come proveremo tra breve, sono trasformate di Laplace di funzioni assolutamente L -trasformabili per ogni $0 \leq \xi \leq 1$.

Pertanto, posto $z_1 = H_1(\xi, p)$, $z_2 = H_2(\xi, p)$, $z_3 = H_3(\xi, p)$, $z_4 = H_4(\xi, p)$ e $z_5 = H_5(p)$, le (66) si possono scrivere

$$V(\xi, p) = \varphi(z_1, z_2, z_5) = \frac{z_1 + z_2}{1 - z_5}, \quad W(\xi, p) = \psi(z_3, z_4, z_5) = \frac{z_3 + z_4}{1 - z_5}.$$

Chiaramente le funzioni $\varphi(z_1, z_2, z_5)$, $\psi(z_3, z_4, z_5)$ sono olomorfe in un intorno di $(0, 0, 0)$ con $\varphi(0, 0, 0) = \psi(0, 0, 0) = 0$. Perciò, in virtù del Teorema 4, le (66) sono le trasformate di Laplace di due funzioni assolutamente L -trasformabili per $\text{Re}(p) > a$, con a abbastanza grande; cioè, per il Teorema 1, l'antitrasformata delle (66) è l'unica soluzione del problema (6)-(10).

Inoltre, essendo la (72) una trasformata di Laplace, per $\text{Re}(p)$ abbastanza grande, è $|H(p)| < 1$, onde le (66) si possono anche scrivere

$$(73) \quad V(\xi, p) = H_1(\xi, p) + H_2(\xi, p) + [H_1(\xi, p) + H_2(\xi, p)] \sum_{n=1}^{\infty} H_5^n(p),$$

$$W(\xi, p) = H_3(\xi, p) + H_4(\xi, p) + [H_3(\xi, p) + H_4(\xi, p)] \sum_{n=1}^{\infty} H_5^n(p).$$

Allora, poichè le (68)-(72) sono trasformate di Laplace di funzioni assolutamente L -trasformabili, applicando il teorema della convoluzione si ottengono le antitrasformate delle (73); cioè, la soluzione $v(\xi, \tau)$, $w(\xi, \tau)$, $0 \leq \xi \leq 1$, $\tau > 0$, del problema (6)-(10).

Proviamo ora che le funzioni (68)-(72) sono antitrasformabili per $0 \leq \xi \leq 1$.

Premettiamo alcune trasformate di Laplace di funzioni assolutamente L -trasformabili ([6])

$$(74) \quad E_1(\zeta, p) = L[\exp(-\frac{1}{2}\mu\zeta) \delta^*(\tau - \zeta) + \frac{\mu}{4} \zeta \exp(-\frac{1}{2}\mu\tau) \frac{I_1((\mu/4)\sqrt{\tau^2 - \zeta^2})}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \eta^*(\tau - \zeta)] = \exp(-\zeta \sqrt{p(p+\mu)}),$$

$$(75) \quad E_2(\zeta, p) = L [\exp(-\frac{1}{2}\mu\zeta) \delta^*(\tau - \zeta) + \frac{d}{d\tau} [\exp(-\frac{1}{2}\mu\tau) I_0(\frac{\mu}{4} \sqrt{\tau^2 - \zeta^2})] \eta^*(\tau - \zeta)] = p \frac{\exp(-\zeta \sqrt{p(p+\mu)})}{\sqrt{p(p+\mu)}},$$

$$(76) \quad E_3(\zeta, p) = L [\exp(-\frac{1}{2}\mu\tau) I_0(\frac{\mu}{4} \sqrt{\tau^2 - \zeta^2}) \eta^*(\tau - \zeta)] = \frac{\exp(-\zeta \sqrt{p(p+\mu)})}{\sqrt{p(p+\mu)}},$$

ove I_0 e I_1 sono i simboli delle funzioni di Bessel modificate con gli ordini 0 ed 1 e $\delta^*(\tau - \zeta)$, $\eta^*(\tau - \zeta)$, rispettivamente, le funzioni di Dirac e di Heaviside. Sia $0 < \zeta \leq 1$.

La funzione $H_1(\xi, p)$. Per le (67), dopo semplici calcoli, la (68) si può scrivere

$$(77) \quad H_1(\xi, p) = \frac{\delta \exp(-\xi \sqrt{p(p+\mu)}) - (\mu+p) \exp(-\xi \sqrt{p(p+\mu)}) / (\sqrt{p(p+\mu)})}{\delta^2 - 1 - \mu/p} F(p).$$

Posto, $z_1 = E_1(\xi, p)$, $z_2 = E_2(\xi, p)$, $z_3 = E_3(\xi, p)$, $z_4 = \frac{1}{p}$ e $z_5 = F(p)$, la (77) diviene

$$(78) \quad H_1(\xi, p) = \varphi_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = \frac{\delta z_1 - \mu z_3 - z_2}{\delta^2 - 1 - \mu z_4} z_5.$$

Allora, poichè $\varphi_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ è olomorfa in un intorno del punto $(0, \dots, 0)$ risultando $\varphi_1(0, \dots, 0) = 0$, in virtù del Teorema 4 la (77) è la trasformata di Laplace di una funzione assolutamente L -trasformabile.

In (78) deve essere $\delta^2 \neq 1$; ma la conclusione per $\delta^2 = 1$ è ancora più immediata in quanto $pF(p)$ è la trasformata di Laplace di una funzione assolutamente L -trasformabile. Tuttavia, nel seguito, per brevità, tralascieremo di considerare la antitrasformata delle (68)-(72) per valori particolari dei parametri δ, σ, η e μ .

La funzione $H_2(\xi, p)$. La (69) diviene

$$H_2(\xi, p) = \frac{Z_0}{\delta Z_0 + 1} \left(\frac{Z_0^2 + Z^2}{Z_0^2 - Z^2} - 2 \frac{Z_0 Z}{Z_0^2 - Z^2} \right) F(p) \exp(- (2 - \xi) \sqrt{p(p+\mu)}).$$

Per le (67), $(Z_0^2 + Z^2)/(Z_0^2 - Z^2)$ è il rapporto tra polinomi di secondo

grado in p , allora, poichè la (68) è antitrasformabile, tale è anche la funzione

$$\frac{Z_0}{\delta Z_0 + 1} \frac{Z_0^2 + Z^2}{Z_0^2 - Z^2} F(p) \exp(-(2 - \xi)\sqrt{p(p + \mu)}).$$

Risulta poi

$$(79) \quad \frac{1}{\delta Z_0 + 1} F(p) \exp(-(2 - \xi)\sqrt{p(p + \mu)}) \\ = \frac{\delta p \sqrt{p(p + \mu)} - 1}{\delta^2 - 1 - \delta^2 \mu / (p + \mu)} F(p) \exp(-(2 - \xi)\sqrt{p(p + \mu)}).$$

Pertanto, posto $z_1 = E_1(2 - \xi, p)$, $z_2 = E_2(2 - \xi, p)$, $z_3 = 1/(p + \mu)$ e $z_4 = F(p)$, la (79) diviene

$$\varphi_2(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\delta z_2 - z_1}{\delta^2 - 1 - \delta^2 \mu z_3} z_4.$$

Allora, poichè $\varphi_2(z_1, z_2, z_3, z_4)$ è olomorfa in un intorno del punto $(0, 0, 0, 0)$ e nulla nell'origine, per il Teorema 4, la (79) è la trasformata di Laplace di una funzione assolutamente L -trasformabile, e così, essendo $Z_0^2 Z / (Z_0^2 - Z^2)$ una funzione razionale propria in p , tale è anche la funzione

$$\frac{1}{\delta Z_0 + 1} \frac{Z_0^2 Z}{Z_0^2 - Z^2} F(p) \exp(-(2 - \xi)\sqrt{p(p + \mu)}).$$

Ne viene, per la linearità della trasformazione di Laplace, che $H_2(\xi, p)$ è la trasformata di Laplace di una funzione assolutamente L -trasformabile.

La funzione $H_3(\xi, p)$. L'antitrasformabilità di questa funzione segue subito dall'antitrasformabilità della (79).

La funzione $H_4(\xi, p)$. La (71) si può scrivere

$$H_4(\xi, p) = \frac{1}{\delta Z_0 + 1} \left(\frac{Z_0^2 + Z^2}{Z_0^2 - Z^2} - 2 \frac{Z_0 Z}{Z_0^2 - Z^2} \right) F(p) \exp(-(2 - \xi)\sqrt{p(p + \mu)}).$$

Considerando che, per le (67), le funzioni $(Z_0^2 + Z^2)/(Z_0^2 - Z^2)$ e $Z/(Z_0^2 - Z^2)$ sono rapporti di polinomi di secondo grado in p e che le (79) e (68) sono funzioni antitrasformabili, si può concludere che $H_4(\xi, p)$ è la trasformata di Laplace di una funzione assolutamente L -trasformabile.

La funzione $H_5(p)$. Dopo semplici calcoli la (72) diviene

$$H_5(p) = \left[\frac{(\delta^2 Z_0^2 + 1)(Z_0^2 + Z^2) + 4\delta Z_0^2 Z^2}{(\delta^2 Z_0^2 - 1)(Z_0^2 - Z^2)} - 2Z_0 \frac{\delta^2 Z_0^2 Z + Z + \delta(Z_0^2 + Z^2)}{(\delta^2 Z_0^2 - 1)(Z_0^2 - Z^2)} \right] \exp(-2\sqrt{p(p+\mu)}),$$

o anche

$$H_5(p) = \left[\frac{N(p)}{D(p)} + \frac{1}{\sqrt{p(p+\mu)}} \frac{M(p)}{D(p)} \right] \exp(-2\sqrt{p(p+\mu)}),$$

dove $N(p)$, $M(p)$ e $D(p)$ sono polinomi di terzo grado.

Allora, per le formule (74), (76) scritte con $\zeta = 2$, si ha che $H_5(p)$ è la trasformata di Laplace di una funzione assolutamente L -trasformabile.

Le potenze di $H_5(p)$ si scrivono

$$(80) \quad [H_5(p)]^n = \left\{ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[\frac{N(p)}{D(p)} \right]^{n-i} \left[\frac{M(p)\sqrt{p(p+\mu)}}{D(p)} \right]^i \right\} \exp(-2n\sqrt{p(p+\mu)})$$

($n = 2, 3, \dots$).

I termini della somma sono, se i è pari, funzioni razionali proprie, se i è dispari, il prodotto di una funzione razionale propria per $1/\sqrt{p(p+\mu)}$.

Pertanto, mercè le formule (74), (76) scritte per $\zeta = 2n$ ($n = 2, 3, \dots$), applicando il teorema della convoluzione si può determinare, per ogni $n \geq 2$, la L -antitrasformata della (80).

Poniamo ora $\xi = 0$ nelle (66). Osserviamo che ([6])

$$L[\exp(-\frac{1}{2}\mu\tau) I_0(\frac{1}{2}\mu\tau)] = \frac{1}{\sqrt{p(p+\mu)}},$$

e che, per le (67), riesce

$$(81) \quad \frac{F(p)}{\delta Z_0 + 1} = \frac{(\delta p \sqrt{p(p+\mu)} - 1) F(p)}{\delta^2 - 1 - \mu/(p+\mu)}.$$

Allora, per il Teorema 4, la funzione (81) è la trasformata di Laplace di una funzione assolutamente L -trasformabile. Analogamente, in virtù del teorema citato, anche la funzione

$$\frac{Z_0}{\delta Z_0 + 1} F(p) = \frac{\delta/(p+\mu) - 1/\sqrt{p(p+\mu)}}{\delta^2 - 1 - \mu/(p+\mu)} pF(p)$$

è una trasformata di Laplace.

Si può concludere che, anche in questo caso, tenendo conto di quanto già detto per $0 < \xi \leq 1$, le funzioni $V(0, p)$, $W(0, p)$ risultano L -antitrasformabili.

Si osserva infine che, per valori numerici dei parametri δ , η , σ e μ , non è difficile, tenendo conto di quanto indicato avanti, determinare le ascisse di convergenza di $V(\xi, p)$ e $W(\xi, p)$.

Bibliografia

- [1] A. BAKE, *On the static pressure in fully developed turbulent flow*, Proc. Roy. Soc. Ser. A **155** (1936), 576-590.
- [2] P. BRADSHAW and D. G. GOODMAN, *The effect of turbulence on static pressure tubes*, A.R.C.R. & M. 3527 (1968), 187-201.
- [3] G. M. CORCOS, *Resolution of pressure in turbulence*, J. of Acoust. Soc. America **35** (1963), 192-199.
- [4] R. COURANT and D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, Interscience Publishers Inc., New York 1953.
- [5] H. V. FUCHS, *Measurement of pressure fluctuations within subsonic turbulent jets*, J. of Sound and Vibration **22** (1972), 361-378.
- [6] A. GHIZZETTI e A. OSSICINI, *Trasformata di Laplace e calcolo simbolico*, UTET, Torino 1971.
- [7] R. VON MISES, *Mathematical theory of compressible fluid flow*, Academic Press Inc., New York 1958.

S u m m a r y

In this paper we study the amplitude and time-delay response of a feeler for measurement of pressure fluctuations in subsonic turbulent fluid flow, in order to compare several physical configurations of it avoiding experimental tests.

Furthermore, we prove existence and uniqueness of the initial boundary problem describing the motion of the fluid, we determine the periodic solution and we prove a asymptotic property of the transient solution.

Last, we derive the formulae of the amplitude and time-delay response and we compare the analytical results with the experiments ones in some particular cases.

