Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 335-346

LUCIA DORETTI (*)

Su alcune formule per la dimensione del prodotto tensoriale di K-algebre (**)

In [7] viene studiata la dimensione del prodotto tensoriale di due corpi L e K, estensione del corpo base k, provando che

$$\dim(L \otimes_k K) = \min\{\text{gr. tr.}_k L,\ \text{gr. tr.}_k K\}.$$

In questo lavoro estendiamo il calcolo al caso in cui L è anzichè un corpo una qualunque k-algebra noetheriana A. Le formule che si ottengono dipendono dai seguenti valori: $r = \text{gr. tr.}_k K$, $s = \sup\{\text{gr. tr.}_k k(\mathfrak{p})/\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) - \operatorname{Max}(A)\}$, $t = \sup\{\text{gr. tr.}_k k(\mathfrak{m})/\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)\}$, che possono essere numeri interi finiti oppure infiniti. Nella discussione della $\dim(A \otimes_k K)$ i risultati sono diversi a seconda dell'ordine dei numeri r, s, t; a questo proposito esaminiamo in particolare il caso in cui la presenza in A di massimali di altezza O può produrre il fatto che $s < t$ (altrimenti escluso).

Esaminiamo poi alcuni esempi notevoli (A = serie formali o ristrette, serie convergenti o k-algebra di tipo finito), includendo esempi di anelli non integri con massimali di altezza O (ma non necessariamente artiniani).

Nella parte finale del lavoro diamo infine una formula per $\dim(A \otimes_k B)$ dove B è una algebra noetheriana finitamente generata su k.

Formule analoghe per $\dim(A \otimes_k B)$ sono probabilmente contenute in [**8**], come si può desumere da un'auto-recensione dell'articolo, non ancora pubblicato, apparsa sul n. 398 (ott. 1979) di Zentralblatt. Sembra però che tali formule siano valide sotto l'ipotesi che le k-algebre A e B siano domini e che A

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 53100 Siena, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 17-IV-1980.

soddisfi alla condizione gr. tr.$_k$ $k(\mathfrak{p}) + ht(\mathfrak{p}) =$ gr. tr.$_k$ A, per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Non sembra inoltre considerato il caso in cui alcuni fra i valori r, s, t sono infiniti, caso che noi invece prendiamo in esame.

1 – Nella presente nota k rappresenta un corpo (commutativo) di caratteristica qualunque, K un'estensione di k, A una k-algebra noetheriana.

Se A, B sono anelli e $f\colon A \to B$ è un omomorfismo, per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, le fibre di f su $\mathfrak{p}$ sono gli anelli $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$, $k(\mathfrak{p})$ essendo il campo dei residui dell'anello locale $A_{\mathfrak{p}}$.

Ricordiamo alcuni fatti noti.

(1) Se $f\colon A \to A \otimes_k K$ è l'omomorfismo naturale di k-algebre, allora f è fedelmente piatto e $\dim(A) \leqslant \dim(A \otimes_k K)$ (v. [7], lemma 2-2).

(2) In particolare, se K è un'estensione algebrica di k, allora $A \otimes_k K$ è intero nel suo sottoanello $f(A)$ e $\dim(A) = \dim(A \otimes_k K)$ (v. [7], lemma 2-4).

(3) Siano A, B anelli locali noetheriani e $f\colon A \to B$ un omomorfismo locale piatto, allora: $\dim(B) = \dim(A) + \dim(B \otimes_A k(\mathfrak{m}))$, dove $k(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m}$ è il campo dei residui di A (v. [5] (13.B), teor. 19).

(4) Sia $f\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli noetheriani. Se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ e S rappresenta l'immagine di $A - \mathfrak{p}$ sotto la composizione $A \to B \to B/\mathfrak{p}B$ allora:

(i) $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \cong S^{-1}(B/\mathfrak{p}B)$ e quindi le fibre sono anelli noetheriani;

(ii) se $f^*\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ è l'applicazione indotta dalla f, esiste una corrispondenza biunivoca naturale che conserva l'ordine tra $\mathrm{Spec}(B \otimes_A k(\mathfrak{p}))$ e $f^{*-1}(\mathfrak{p})$;

(iii) $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ è un anello non ridotto al solo O se e solo se esiste un ideale primo di B che si contrae a $\mathfrak{p}$ (in particolare questo è vero se B è fedelmente piatto su A);

(iv) sia $P \in \mathrm{Spec}(B)$, $P \cap A = \mathfrak{p}$ e sia $f'\colon A_{\mathfrak{p}} \to B_P$ l'omomorfismo indotto da f; se P' è l'ideale di $\mathrm{Spec}(B \otimes_A k(\mathfrak{p}))$ corrispondente a P, allora $(B \otimes_A k(\mathfrak{p}))_{P'} \cong B_P \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p})$.

2 – Sia A una k-algebra noetheriana e K estensione trascendente di k. Introduciamo i seguenti valori:

$$
\begin{aligned}
r &= \text{gr. tr.}\, K/\mathrm{k} \qquad (> 0)\,,\\
s &= \sup\{\text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) - \mathrm{Max}(A)\}\,,\\
t &= \sup\{\text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)\}\,.
\end{aligned}
$$

Lemma 1. *Se in A non esistono ideali massimali di altezza 0, allora $t \leqslant s$.*

Dim. Sia $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) - \operatorname{Max}(A)$ e $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)$ tale che $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$. Poichè $A/\mathfrak{m}$ è quoziente di $A/\mathfrak{p}$, si tratta di provare che se A è un dominio contenente k avente corpo delle frazioni L e $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)$, si ha: $\text{gr. tr.}_k(A/\mathfrak{m}) \leqslant \text{gr. tr.}_k L$. Sia $\{\bar{u}_\alpha\}$, dove $\bar{u}_\alpha = u_\alpha \bmod \mathfrak{m}$ ($u_\alpha \in A$) una base di trascendenza di $A/\mathfrak{m}$ su k. Se gli u_α, pensati come elementi di L, sono algebricamente dipendenti su k si ha $f(u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_m}) = 0$ con f polinomio non nullo a coefficienti in k. Ma allora $\bar{f}(\bar{u}_{\alpha_1}, \dots, \bar{u}_{\alpha_m}) = 0$ con $\bar{f} \neq 0$ e questo è assurdo. Gli u_α sono allora algebricamente indipendenti su k, da cui la tesi.

Se A è un anello di dimensione maggiore di 0 ed esistono $\mathfrak{m}$ ed $\mathfrak{m}' \in \operatorname{Max}(A)$ con $ht(\mathfrak{m}) = 0$ e $ht(\mathfrak{m}') > 0$, allora (v. [**1**], es. 22, cap. 1), $A \cong A_1 \oplus A_2$ dove A_1 è un anello noetheriano che non possiede massimali di altezza 0 (quindi soddisfacente alle ipotesi del Lemma 1) e A_2 è un anello artiniano. Si ha allora $A \otimes_k K \cong (A_1 \otimes_k K) \oplus (A_2 \otimes_k K)$ e quindi $\dim(A \otimes_k K) = \sup\{\dim(A_1 \otimes_k K), \dim(A_2 \otimes_k K)\}$.

Nello studio della dimensione di $A \otimes_k K$ ci si può allora ricondurre a considerare k-algebre non aventi massimali di altezza 0, e k-algebre di dimensione 0 (artiniane).

Sia A una k-algebra non avente ideali massimali di altezza 0. Dal Lemma 1 segue che le sole relazioni possibili tra r, s e t sono le seguenti

(a) $r \geqslant s \geqslant t$, (b) $s \geqslant r \geqslant t$, (c) $s \geqslant t \geqslant r$.

Si osserva che in (b) esistono primi non massimali con $\text{gr. tr.}_k k(\mathfrak{p}) \geqslant r$, mentre in (c) vi sono ideali primi, massimali e non, con la stessa proprietà. Posto allora

$$h(r) = \sup\{ht(\mathfrak{p})/\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) - \operatorname{Max}(A),\ \text{gr. tr.}_k k(\mathfrak{p}) \geqslant r\},$$

$$l(r) = \sup\{ht(\mathfrak{m})/\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A),\ \text{gr. tr.}_k k(\mathfrak{m}) \geqslant r\},$$

in (b) resta definito l'insieme $S^* = \operatorname{Max}(A) \cup \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) - \operatorname{Max}(A)/ht(\mathfrak{p}) > h(r)\}$, mentre in (c), accanto ad S^*, resta definito l'insieme $S^{**} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) - \operatorname{Max}(A)/ht(\mathfrak{p}) > h(r)\} \cup \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)/ht(\mathfrak{m}) > l(r)\}$.

Gli esempi seguenti mostrano che in alcuni casi notevoli è possibile determinare s e t e quindi descrivere gli insiemi sopra introdotti.

I - Sia $A = k[\![X_1, \dots, X_n]\!]/I$, dove $X_1, \dots, X_n$ sono indeterminate ed I un ideale qualunque. Poichè $k[\![X_1, \dots, X_n]\!]$ è di Cohen-Macauley si ha (v. [**5**], (16.B)): $\dim(A) = n - ht(I)$. È inoltre $t = \text{gr.tr.}_k(k[\![X_1, \dots, X_n]\!]/(X_1, \dots, X_n)) = 0$.

Se $P = \mathfrak{p}/I$ è un primo non massimale di A, $A/P \cong k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]/\mathfrak{p}$ e quindi contiene un anello di serie formali in $m \leqslant n$ indeterminate (v. [9], vol. II, p. 219). Poichè il grado di trascendenza su k di un anello di serie formali a coefficienti in tale corpo è infinito, segue gr. tr.$_k\, k(P) = +\infty$, e quindi $s = +\infty$. È chiaro che si possono presentare solo i casi (a), (b); in particolare se si verifica (b) è $h(r) = \dim(A) - 1$ e quindi $S^* = \{(X_1, \ldots, X_n)/I\}$.

II - Se k è un corpo valutato completo e $A = k\langle\!\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\!\rangle/I$ l'anello delle serie convergenti in un intorno dell'origine modulo un ideale I, dal teorema di normalizzazione per serie convergenti (v, [6], (45.5)), $k\langle\!\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\!\rangle$ è locale regolare di dimensione n, e quindi $\dim(A) = n - ht(I)$, e per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di $k\langle\!\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\!\rangle$, $k\langle\!\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\!\rangle/\mathfrak{a}$ contiene $k\langle\!\langle Y_1, \ldots, Y_m\rangle\!\rangle$ per opportune variabili Y_i. Si ha ancora $t = 0$ e $s = +\infty$. Se $s \geqslant r \geqslant t$ (caso (b)), è $h(r) = \dim(A) - 1$ e $S^* = \{(X_1, \ldots, X_n)/I\}$.

III - Sia k un corpo valutato completo non archimedeo e $A = k\{X_1, \ldots, X_n\}$ l'anello delle serie strettamente convergenti su k in n indeterminate. È noto (v. [4]) che:

(a) A è un dominio noetheriano di dimensione n;

(b) ogni ideale massimale di A ha altezza n;

(c) il campo dei residui di ogni ideale massimale è estensione finita di k;

(d) se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, l'anello $A/\mathfrak{p}$ è un modulo finito su un anello di serie strettamente convergenti su k in m indeterminate, $m \leqslant n$.

È allora $t = 0$, $s = +\infty$ e se $s \geqslant r \geqslant t$ (caso (b)) si ha $h(r) = n - 1$ e $S^* = \operatorname{Max}(A)$.

IV - Sia A un anello di serie formali, convergenti o ristrette come in I-II-III, con coefficienti in L, L estensione di k. È facile controllare che $t =$ gr. tr.$_k\, L \geqslant 0$ e $s = +\infty$. Si possono presentare allora i tre casi (a), (b), (c). Se $s \geqslant r \geqslant t$ (caso (b)) è $h(r) = \dim(A) - 1$ e $S^* = \operatorname{Max}(A)$; se $s \geqslant t \geqslant r$ (caso (c)) è $h(r) = \dim(A) - 1$, $l(r) = \dim(A)$ e $S^{**} = \emptyset$.

V - Se $(A, \mathfrak{m})$ è una k-algebra locale completa noetheriana di dimensione n maggiore di O, è noto che A ammette un sistema di parametri $X_1, \ldots, X_n$ tale che gli X_i sono analiticamente indipendenti su k (v. [9], vol. II, cap. VIII, § 9); A contiene quindi l'anello $k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$. Per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) - \operatorname{Max}(A)$ è allora gr. tr.$_k\, k(\mathfrak{p}) = +\infty$ e quindi $s = +\infty$. Poichè A è locale, $t =$ gr. tr.$_k$ $\cdot(A/\mathfrak{m}) \geqslant 0$. Se $s \geqslant r \geqslant t$ (caso (b)) è $h(r) = n - 1$, $S^* = \{\mathfrak{m}\}$; se $s \geqslant t \geqslant r$, è $h(r) = n - 1$, $l(r) = n$, e $S^{**} = \emptyset$.

VI - Sia $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ l'anello dei polinomi in k indeterminate $X_1, \ldots, X_n$ e sia $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, $ht(\mathfrak{p}) = p$. Consideriamo $A_\mathfrak{p}$. Se $Q = \mathfrak{q}A_\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A_\mathfrak{p})$, è gr. tr.$_k\, k(Q) = n - ht(\mathfrak{q})$ $(0 \leqslant ht(\mathfrak{q}) \leqslant p)$. Di conseguenza $t = n - p$, $s = n$. Se allora $s \geqslant r \geqslant t$ (caso (b)), posto $r = n - \bar{q}$ è $h(r) = \bar{q}$ e $S^* = \{\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}\} \cup \{\mathfrak{q}A_\mathfrak{p} / \bar{q} < ht(\mathfrak{q}) < p\}$. Se $s \geqslant t \geqslant r$ (caso (c)), è $h(r) = p - 1$, $l(r) = p$ e quindi $S^{**} = \emptyset$.

Il risultato che segue dà informazioni sulla dimensione di $A \otimes_k K$, A privo di massimali di altezza O, noti r, s e t.

Teorema 2. *Se A è una k-algebra noetheriana priva di massimali di altezza O di dimensione n e $A \otimes_k K$ è un anello noetheriano, si ha:*

(a) *se* $r \geqslant s \geqslant t$,

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{sim}(A \otimes_k K) = \sup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} \{ht(\mathfrak{p}) + \text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{p})\};$$

(b) *se* $s \geqslant r \geqslant t$,

$$\text{(2)} \qquad \dim(A \otimes_k K) = \max\{h(r) + r, \sup_{\mathfrak{p} \in S^*} \{ht(\mathfrak{p}) + \text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{p})\}\};$$

(c) *se* $s \geqslant t \geqslant r$,

$$\text{(3)} \qquad \dim(A \otimes_k K) = \max\{h(r) + r,\ l(r) + r,\ \sup_{\mathfrak{p} \in S^{**}} \{ht(\mathfrak{p}) + \text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{p})\}\}.$$

Dim. Posto $B = A \otimes_k K$, indichiamo con $f: A \to B$ l'omomorfismo canonico.

(a) Sia $r \geqslant s \geqslant t$. Sia $P \in \operatorname{Spec}(B)$, $P \cap A = \mathfrak{p}$ e $f': A_\mathfrak{p} \to B_P$ l'omomorfismo naturale indotto dalla f che rende B_P una $A_\mathfrak{p}$-algebra fedelmente piatta. Poichè f' è locale piatto, da (3) n. **1**, si ha

$$(\alpha) \qquad \dim(B_P) = \dim(A_\mathfrak{p}) + \dim(B_P \otimes_{A_\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p}))_{P'},$$

P' essendo l'ideale di $\operatorname{Spec}(B \otimes_A k(\mathfrak{p}))$ corrispondente a P (v. 4(iv), n. **1**). Calcoliamo la dimensione di $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$. Poichè $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) = (A \otimes_k K) \otimes_A k(\mathfrak{p}) \simeq K \otimes_k k(\mathfrak{p})$, per [7] è: $\dim(B \otimes_A k(\mathfrak{p})) = \min\{\text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{p}), r\} = \text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{p})$.
Posto $r_\mathfrak{p} = \text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{p})$, dalla (α) segue

$$(\beta) \qquad ht(P) = ht(\mathfrak{p}) + ht(P') \leqslant ht(\mathfrak{p}) + r_\mathfrak{p},$$

dove l'uguaglianza è vera se P è un primo di B che giace su $\mathfrak{p}$ e che corrisponde ad un ideale di $\operatorname{Spec}(B \otimes_A k(\mathfrak{p}))$ di altezza $r_\mathfrak{p}$. Per ogni fissato primo $\mathfrak{p}$

di A, si ha allora: $\sup\{ht(P) \mid P \in \operatorname{Spec}(B),\ P \cap A = \mathfrak{p}\} = ht(\mathfrak{p}) + r_{\mathfrak{p}}$ e quindi $\dim(A \otimes_k K)$ soddisfa alla (1).

(b) Sia $s \geqslant r \geqslant t$. Con il procedimento utilizzato in (a), si verifica che se P è primo di B che giace su un $\mathfrak{p}$ non massimale di A e $ht(\mathfrak{p}) \leqslant h(r)$, è $ht(P) \leqslant h(r) + r$. Se invece $ht(\mathfrak{p}) > h(r)$ o se $\mathfrak{p}$ è un massimale di A, allora $r_{\mathfrak{p}} = \text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{p}) < r$, da cui $\dim\big(B \otimes_A k(\mathfrak{p})\big) = r_{\mathfrak{p}}$ e quindi $ht(P) \leqslant ht(\mathfrak{p}) + r_{\mathfrak{p}}$. Dal confronto delle altezza dei primi di B segue la (2).

(c) Sia $s \geqslant t \geqslant r$. Se P è un primo di B che giace su un primo non massimale di A e $ht(\mathfrak{p}) \leqslant h(r)$, si prova con le solite tecniche che $ht(P) \leqslant h(r) + r$. Se invece P giace su un massimale $\mathfrak{m}$ con $ht(\mathfrak{m}) \leqslant l(r)$, è $ht(P) \leqslant l(r) + r$. Infine, se P giace su un primo $\mathfrak{p}$ di A che non soddisfa a nessuna di queste condizioni, allora si ha $ht(P) \leqslant ht(\mathfrak{p}) + r_{\mathfrak{p}}$. Segue la (3). Il teorema resta così provato.

Osservazione 3. Nell'ipotesi del Teor. 2, la dimensione di $A \otimes_k K$ è sempre finita. Ciò segue dalla noetherianità delle fibre (v. 4(i), n. **1**) e dal seguente risultato: se K ed L sono estensioni di k e $\text{gr. tr.}_k K = \text{gr. tr.}_k L = +\infty$, allora $K \otimes_k L$ non è un anello noetheriano [1]. In particolare, in (a) si vede immediatamente che deve essere $s < +\infty$, da cui $\dim(A \otimes_k K) < +\infty$. In (b), deve essere invece $r < +\infty$ e quindi il risultato segue dall'essere $\dim(A \otimes_k K) \leqslant n + r$. In (c) infine, è $\dim(A \otimes_k K)$ finita perchè $\dim(A \otimes_k K) \leqslant n + r$ e necessariamente $r < +\infty$.

Note. I – Osserviamo che l'ipotesi di noetherianità di $B = A \otimes_k K$ è essenziale per poter applicare il teorema sulla dimensione (v. (3), n. **1**).

II – L'estensione K influisce sulla dimensione di $A \otimes_k K$ in modo tanto maggiore quanto più piccolo è r. In particolare se $r \geqslant s$, la dimensione di $A \otimes_k K$ è indipendente dall'estensione K considerata.

III – Siano K_i $(i = 1, 2, 3)$ estensioni di k e sia $r_i = \text{gr. tr.}_k K_i$. Se $r_1 \geqslant s \geqslant r_2 \geqslant t \geqslant r_3$, allora dal Teor. 2 è facile verificare che $\dim(A \otimes_k K_1) \geqslant \dim(A \otimes_k K_2) \geqslant \dim(A \otimes_k K_3)$.

---

(1) Tale risultato discende dal cor. 3.6 di [**3**]. Infatti, posto $B = k(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ è $K \otimes_k L$ fedelmente piatto su $B \otimes_k B$ e quindi se $K \otimes_k L$ è noetheriano, per fedele piattezza, lo è anche $B \otimes_k B$. Dal cor. 3.6, B deve essere allora essenzialmente di tipo finito, assurdo.

Corollario 4. *Sia* $(A, \mathfrak{m})$ *una* k*-algebra locale noetheriana di dimensione* $n > 0$ *e* $A \otimes_k K$ *un anello noetheriano. Allora*:

(a)$'$ *se* $r \geqslant s \geqslant t$,

$$(1)' \qquad \dim(A \otimes_k K) = \max\Big\{n + t, \sup_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \\ \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}}} \{ht(\mathfrak{p}) + \text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{p})\}\Big\} ;$$

(b)$'$ *se* $s \geqslant r \geqslant t$,

$$(2)' \qquad \dim(A \otimes_k K) = \max\Big\{n + t, h(r) + r, \sup_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \\ h(r) < ht(\mathfrak{p}) < n}} \{ht(\mathfrak{p}) + \text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{p})\}\Big\} ;$$

(c)$'$ *se* $s \geqslant t \geqslant r$,

$$(3)' \qquad \dim(A \otimes_k K) = n + r .$$

Osservazione 5. Se $A = k$-algebra finitamente generata si ha $\dim(A/\mathfrak{p}) = \text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{p})$ per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ (v. [**5**], (14.G), cor. 1). Da qui si deduce

$$\dim(A) \leqslant \dim(A \otimes_k K) = \sup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} \{ht(\mathfrak{p}) + \text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{p})\}$$

$$= \sup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} \{ht(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p})\} \leqslant \dim(A) ,$$

e quindi $\dim(A) = \dim(A \otimes_k K)$ nel caso (a). Analogo calcolo nei casi (b) e (c) del Teor. 2 consente di affermare che si ha sempre $\dim(A) = \dim(A \otimes_k K)$. Ciò si vede anche direttamente.

Applichiamo il Teor. 2 per determinare la dimensione di $A \otimes_k K$ nei casi I-VI.

Sia A un anello come in I-II-III. Per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, la fibra $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) = K \otimes_k k(\mathfrak{p})$ è un anello noetheriano e quindi $r < +\infty$ (v. ([1]), p. 6). Si ha allora $s > r > t$ e quindi dal Teor. 2

$$(4) \qquad \dim(A \otimes_k K) = \dim(A) - 1 + \text{gr. tr.}_k K .$$

In particolare: (a) Se $(A, \mathfrak{m})$ è locale completo noetheriano e k è un campo dei coefficienti di A, allora

$$\dim(A \otimes_k K) = \dim(k[\![X_1, \dots, X_n]\!]/I \otimes_k K) = n - ht(I) - 1 + \text{gr. tr.}_k K$$

(v. [**5**] (28.J), cor. 1). Se inoltre A è regolare di dimensione n è

$$\dim(A \otimes_k K) = \dim(k[\![X_1, \dots, X_n]\!] \otimes_k K) = n - 1 + \text{gr. tr.}_k K$$

(v [**5**] (28.J), cor. 2). (b) Ogni k-algebra analistica A, in quanto quoziente di un anello di serie formali o convergenti in un numero finito di indeterminate, soddisfa alla (4).

Sia A un anello come in IV. Poichè $r < +\infty$ si può avere $s > r \geqslant t$ o $s > t \geqslant r$. Dal Teor. 2 segue allora

$$\dim(A \otimes_k K) = \begin{cases} \dim(A) - 1 + r & \text{se } r > \mathrm{gr.\,tr.}_k L \\ \dim(A) + r & \text{altrimenti}. \end{cases} \tag{5}$$

Se $(A, \mathfrak{m})$ è una k-algebra locale completa noetheriana di dimensione n maggiore di 0, per [1] p. 7, è $r < +\infty$ e quindi o $s > r \geqslant t$ o $s > t \geqslant r$. Dal Cor. 4 si ha

$$\dim(A \otimes_k K) = \begin{cases} n - 1 + r & \text{se } r > \mathrm{gr.\,tr.}_k (A/\mathfrak{m}) \\ n + r & \text{altrimenti}. \end{cases} \tag{6}$$

Se $A/\mathfrak{m}$ è un'estensione separabile di k e K è un campo dei coefficienti di A è $\dim(A \otimes_k K) = \dim(A/\mathfrak{m}) + n$ (v. [**5**] (28.J), teor. 60).

In particolare: (c) Se $(A, \mathfrak{m})$ è una k-algebra locale noetheriana di dimensione $n > 0$ e $\hat{A}$ è il completamento $\mathfrak{m}$-adico di A, è noto che $\hat{A}$ è ancora una k-algebra locale noetheriana di dimensione n e completa rispetto alla $\hat{\mathfrak{m}}$ $(= \mathfrak{m}\hat{A})$-topologia; dalla (6) si ottiene allora $\dim(\hat{A} \otimes_k K)$. (d) Sia $(A', \mathfrak{m})$ una k-algebra locale artiniana e $\mathrm{gr.\,tr.}_k (A'/\mathfrak{m}) = +\infty$. Posto allora $A = A'[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ e ricordando che A è il completamento di $A'[X_1, \ldots, X_n]$ rispetto alla topologia $(X_1, \ldots, X_n)$-adica dalla (6), si ha: $\dim(A \otimes_k K) = n + \mathrm{gr.\,tr.}_k K$ (es.: $B = k(Y_1, \ldots, Y_m, \ldots)[\![X_1 \ldots X_n]\!] \otimes_k K$ con Y_i variabili, allora

$$\dim\left(k(Y_1, \ldots, Y_m, \ldots)[\![X_1, \ldots, X_n]\!] \otimes_k K\right) = n + \mathrm{gr.\,tr.}_k K\,.$$

Sia $A_\mathfrak{p} = k[X_1, \ldots, X_n]_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n])$ di altezza p; dal Cor. 4 si ottiene

$$\dim(A_\mathfrak{p} \otimes_k K) = \begin{cases} r + p & \text{se } r \leqslant n - p \\ n & \text{altrimenti}. \end{cases} \tag{7}$$

Osservazione 6. Sia A un anello privo di massimali di altezza O contenente un'estensione L di k. Sia K come al solito e $A \otimes_k K$ noetheriano. Posto $\bar{r} = \mathrm{gr.\,tr.}_k L$ per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ è $\mathrm{gr.\,tr.}_k k(\mathfrak{p}) = \mathrm{gr.\,tr.}_L k(\mathfrak{p}) + \bar{r}$ e quindi se $\bar{r} \geqslant r$, si ha

$$\dim(A \otimes_k K) = \dim(A) + r \tag{8}$$

(per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ è infatti $\dim(K \otimes_k k(\mathfrak{p})) = \min\{r, \mathrm{gr.\,tr.}_L k(\mathfrak{p}) + \bar{r}\} = r$).

La (8) permette allora di calcolare immediatamente la dimensione del prodotto tensoriale in casi come questi

$$B = k(T_1, T_2)[X, Y, Z] \otimes_k k(U), \qquad B = k(T_1, T_2)[\![X, Y, Z]\!] \otimes_k k(U),$$

dove T_1, T_2, X, Y, Z, U sono variabili. In entrambe le situazioni si ha $\dim(B) = 3 + 1$.

Nota. Quanto sopra osservato vale anche se $\bar{r} = +\infty$. In questo caso per la [1] p. 6 è $r < +\infty$ e per la (8), $\dim(A \otimes_k K) = \dim(A) + r < +\infty$. Es.: se $B = k((T_1, T_2))[X, Y, Z] \otimes_k k(U)$, è $\dim(B) = 3 + 1$.

Esaminiamo il caso in cui A è una k-algebra artiniana.

Teorema 7. *Sia A una k-algebra artiniana e K estensione di k tale che $A \otimes_k K$ è noetheriano. Se $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_n$ sono i massimali di A, posto* $t = \sup \{\text{gr tr.}_k\, k(\mathfrak{m}_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *e* $r = \text{gr. tr.}_k K$, *si ha*

$$\dim(A \otimes_k K) = \min\{t, r\}. \tag{9}$$

Dim. Poniamo $B = A \otimes_k K$. sia $t \geqslant r$, allora per ogni $P \in \operatorname{Spec}(B)$ tale che $P \cap A = \mathfrak{m}_i$, è $\sup\{ht(P) \mid P \cap A = \mathfrak{m}_i\} = \text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{m}_i)$ se $\text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{m})_i \leqslant r$, ed è r altrimenti. Se $r > t$, per ogni i è $\sup\{ht(P) \mid P \cap A = \mathfrak{m}_i\} = \text{gr. tr.}_k\, k(\mathfrak{m}_i)$, quindi $\dim(A \otimes_k K) = t$. Segue la tesi.

Le formule che abbiamo ottenuto permettono di calcolare $\dim(A \otimes_k K)$ dove A è una qualunque k-algebra noetheriana. Si ha infatti

$$\dim(A \otimes_k K) = \sup\{\dim(A_1 \otimes_k K),\ \dim(A_2 \otimes_k K)\}, \tag{10}$$

A_1 essendo di dimensione 0 e A_2 privo di massimali di altezza 0.

Negli esempi seguenti calcoliamo $\dim(A \otimes_k K)$ dove A è in particolare un anello non integro.

I - Sia $A = k[X_1, \ldots, X_n] \times L$. Allora

$$\begin{aligned}\dim(A \otimes_k K) &= \sup\{\dim(k[X_1, \ldots, X_n] \otimes_k K),\ \dim(L \otimes_k K)\}\\ &= \sup\{n,\ \min\{\text{gr. tr.}_k L,\ r\}\}.\end{aligned}$$

II - Sia $A = k[\![X_1, \ldots, X_n]\!] \times L$. Allora

$$\begin{aligned}\dim(A \otimes_k K) &= \sup \dim\{(k[\![X_1, \ldots, X_n]\!] \otimes_k K),\ \dim(L \otimes_k K)\}\\ &= \sup\{\mathrm{n} - 1 + r,\ \min\{\text{gr. tr.}_k L,\ r\}\} = n - 1 + \mathrm{r}.\end{aligned}$$

Proposizione 8. *Siano* $K_1, K_2, \dots, K_n$ $(n \geqslant 2)$ *estensioni di* k *e sia* $r_i = \text{gr. tr.}_{.k} K_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. *Supponiamo* $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \dots \geqslant r_n$ *e* $A \otimes_k K_1 \otimes_k K_2 \otimes_k \dots \otimes_k K_j$ *noetheriano per ogni* j, $1 \leqslant j \leqslant n$. *Allora*

$$\dim(A \otimes_k K_1 \otimes_k \dots \otimes_k K_n) = \dim(A \otimes_k K) + r_2 + \dots + r_n . \tag{11}$$

Dim. È sufficiente provare il risultato per $n = 2$. Per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A \otimes_k K_1)$ è $\text{gr. tr.}_{.k}\, k(\mathfrak{p}) \geqslant r_1 \geqslant r_2$ e quindi con teniche analoghe a quelle utilizzate nel Teor. 2, si ha

$$\dim\big((A \otimes_k K_1) \otimes_k K_2\big) = \sup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A \otimes K_1)} \{ht(\mathfrak{p}) + \min\{r_2,\ \text{gr. tr.}_{.k}\, k(\mathfrak{p})\}\} .$$

Segue $\dim(A \otimes_k K_1 \otimes_k K_2) = \dim(A \otimes_k K_1) + r_2$, da cui la tesi.

3 – I risultati del n. **2** sono stati ottenuti sotto l'ipotesi della noetherianità di $A \otimes_k K$. Se $A \otimes_k K$ non è noetheriano è tuttavia possibile esprimerlo come limite diretto di prodotti tensoriali noetheriani e dare ugualmente una formula per la dimensione.

Osserviamo che se $\{K_\alpha\}$ è la famiglia delle sottoestensioni finitamente generate di K su k, si ha: $A \otimes_k K = A \otimes_k (\varinjlim K_\alpha) = \varinjlim (A \otimes_k K_\alpha)$.

Premettiamo il seguente risultato.

Lemma 9. *Sia* R *un anello,* $R = \lim R_\alpha$. *Se* R *è fedelmente piatto su* R_α *per ogni* α *allora*

$$\dim(R) = \sup\{\dim(R_\alpha)\} . \tag{12}$$

Dim. Poichè per ogni α è $\dim(R_\alpha) \leqslant \dim(R)$ (v. 1), n. (1), dimostriamo la disuguaglianza opposta. Sia $P \in \operatorname{Spec}(R)$ e siano per ogni α, $\varphi_\alpha \colon R_\alpha \to R$ gli omomorfismi canonici. Posto allora $P_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(P) = P \cap R_\alpha$, si ha $P = \varinjlim P_\alpha$ (*v.* [**2**], cap. IV (5.13.1)). Se $\dim(R) = n < +\infty$, indichiamo con P un ideale primo di R con $ht(P) = n$. Esiste allora una catena strettamente crescente di primi di R, $P^{(0)} \subset P^{(1)} \subset \dots \subset P^{(n)} = P$, $P^{(i)} = \varinjlim P^{(i)}_\alpha$, $1 \leqslant i \leqslant n$, e quindi per ogni α è $P^{(0)}_\alpha \subseteq P^{(1)}_\alpha \subseteq \dots \subseteq P^{(n)}_\alpha = P_\alpha$. Per le proprietà del limite diretto esiste allora un α_i per ogni i, tale che $P^{(i-1)}_{\alpha_i} \subsetneq P^{(i)}_{\alpha_i}$ e tale che per ogni $\gamma > \alpha_i$ è $P^{(i-1)}_\gamma \subsetneq P^{(i)}_\gamma$. Scelto allora $\beta > \alpha_i$ per ogni i, in R_β esiste una catena strettamente crescente di primi di lunghezza n, $P^{(0)}_\beta \subset P^{(1)}_\beta \subset \dots \subset P^{(n)}_\beta = P_\beta$ e quindi $\dim(R_\beta) \geqslant n = \dim(R)$. Sia $\dim(R) = +\infty$. Se $\sup_\alpha \{\dim(R_\alpha)\} = d < +\infty$ con il ragionamento precedente è possibile determinare un indice β tale che in R_β esiste una catena strettamente crescente di primi di lunghezza maggiore di d, assurdo. È allora $\sup_\alpha\{\dim(R_\alpha)\} = +\infty$. Segue la tesi.

Teorema 10. *Sia A una k-algebra noetheriana. Allora*

$$\dim(A\otimes_k K) = \sup_\alpha\{\dim(A\otimes_k K_\alpha)\}\,, \tag{12$'$}$$

$\{K_\alpha\}$ essendo la famiglia delle sottoestensioni finitamente generate di K.

Dim. Segue dal Lemma 9 tenendo presente che $A\otimes_k K$ è fedelmente piatto su $A\otimes_k K_\alpha$ per ogni α.

Osservazione 11. (i) Sia A una k-algebra priva di massimali di altezza O e sia $r = \text{gr. tr.}_k K < +\infty$. Esistono allora $X_1, \dots, X_r$ elementi di K algebricamente indipendenti su k, tali che K è estensione algebrica di $L = k(X_1, \dots, X_r)$. Si ha quindi: $A\otimes_k K = (A\otimes_k L)\otimes_L K$ da cui (v. (2), n. **1**) $\dim(A\otimes_k K) = \dim\big(A\otimes_k k(X_1, \dots, X_r)\big)$, calcolabile con il Teor. 2. Sia $r = +\infty$. Se $s < +\infty$, considerato un α sufficientemente grande è $r_\alpha \geqslant s \geqslant t$ e quindi si rientra nel caso (a) del Teor. 2, da cui

$$\dim(A\otimes_k K) = \sup_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)}\{ht(\mathfrak{p}) + \text{gr. tr.}_k k(\mathfrak{p})\}\,.$$

Se $s = +\infty$, poichè per ogni α è $r_\alpha < +\infty$ e $t < +\infty$, per α opportuno sufficientemente grande, si ha $s > r_\alpha \geqslant t$ e quindi (v. (b), Teor. 2)

$$\dim(A\otimes_k K) = \max\Big\{h(r_\alpha) + r_\alpha,\ \sup_{\mathfrak{p}\in S^*}\{ht(\mathfrak{p}) + \text{gr. tr.}_k k(\mathfrak{p})\}\Big\} \leqslant n - 1 + r_\alpha\,.$$

Segue $\dim(A\otimes_k K) = +\infty$. (ii) Sia A una k-algebra di dimensione O (artiniana). Se $r < +\infty$ è

$$\dim(A\otimes_k K) = \sup_\alpha\{\dim(A\otimes_k K_\alpha)\{ = \sup_\alpha\{\min\{t, r_\alpha\}\} = \min\{r_\alpha, t\}\,.$$

Se $r = +\infty$, per ogni α sufficientemente grande, è $\dim(A\otimes_k K_\alpha) = \min\{t, r_\alpha\} = t$. Quindi $\dim(A\otimes_k K) = t$ (eventualmente $t = +\infty$).

4 – La proposizione seguente fornisce una formula per la dimensione di $A\otimes_k B$ dove A e B sono k-algebre noetheriane e B è finitamente generato su k.

Proposizione 12. *Siano A, B k-algebre noetheriane e B finitamente generate su k. Allora*

$$\dim(A\otimes_k B) = \dim(A) + \dim(B)\,. \tag{13}$$

Dim. Poniamo $A \otimes_k B = C$. Sia $\varphi\colon A \to C$ l'omomorfismo canonico che rende C una A-algebra. Per la « proprietà discendente » della fedele piattezza (v. [**5**] (4.B)), C è fedelmente piatto su A. Inoltre per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ la fibra di φ su $\mathfrak{p}$, $C \otimes_k k(\mathfrak{p})$, è isomorfa a $B \otimes_k k(\mathfrak{p})$ e la fedele piattezza di φ induce a fedele piattezza di $\varphi'\colon A_{\mathfrak{p}} \to C_P$. Poichè C è noetheriano, da (3), n. **1**, segue: $\dim(C_P) = \dim(A_{\mathfrak{p}}) + \dim\big(B \otimes_k k(\mathfrak{p})\big)_{P'}$, P' essendo l'ideale di $\operatorname{Spec}\big(B \otimes_k k(\mathfrak{p})\big)$ corrispondente a P. Con il procedimento utilizzato nel Teor. 2, si ottiene $\sup\{ht(P) \mid P \in \operatorname{Spec}(C),\ P \cap A = \mathfrak{p}\} = ht(\mathfrak{p}) + \dim\big(B \otimes_k k(\mathfrak{p})\big)$ e quindi dall'Oss. 5 segue $ht(\mathfrak{p}) + \dim\big(B \otimes_k k(\mathfrak{p})\big) = ht(\mathfrak{p}) + \dim(B)$, da cui $\dim(A \otimes_k B) = \dim(A) + \dim(B)$, cioè la tesi.

Bibliografia

[**1**] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, London 1969.

[**2**] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., n. 24, Bures-sur-Yvette 1965.

[**3**] D. Ferrand, *Monomorphismes et morphismes absolument plats*, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 97-128.

[**4**] S. Greco and P. Valabrega, *On the excellent property for strictly convergent power series over a complete non archimedean valued field*, Atti Accad. Sci. Torino **108** (1973-1974).

[**5**] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Benjamin, New York 1970.

[**6**] M. Nagata, *Local Rings*, Interscience Publishers 1962.

[**7**] R. Sharp, *The dimension of the tensor product of two field extensions*, Bull. London Math. Soc. **9** (1977), 42-48.

[**8**] A. R. Wadsworth, *The Krull dimensions of tensor products of commutative algebras over a field*, J. London Math. Soc. (II Ser.) (in corso di stampa).

[**9**] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, Springer-Verlag, New York.

* * *