Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 383-395

FILIPPO CAMMAROTO e GIOVANNI LO FARO (*)

Spazi weakly-compact (**)

Introduzione

Le generalizzazioni degli spazi compatti occupano in topologia un posto di rilevante importanza, tanto che ognuna di esse è stata studiata e caratterizzata in più modi.

Le tecniche principalmente usate per caratterizzare questi nuovi spazi in termini di filtri, sono essenzialmente due:

(1) costruzione di nuovi sottoreticoli (atomici o no) del reticolo dei filtri sullo spazio (cfr. [**3**]$_1$) tali che l'aderenza per ogni elemento del sottoreticolo o la convergenza per ogni atomo del sottoreticolo (nel caso in cui il sottoreticolo è atomico) è proprietà caratterizzante per lo spazio (cfr. [**2**], [**4**], [**9**], [**10**], [**13**], [**17**]);

(2) generalizzazione dei concetti di aderenza e convergenza per un filtro, in guisa che il richiedere che un qualsiasi filtro abbia almeno un punto di aderenza nel senso della generalizzazione o che ogni ultrafiltro converga nel senso della generalizzazione, è proprietà caratterizzante per lo spazio (cfr. [**6**], [**16**]).

In questo lavoro introduciamo una nuova generalizzazione degli spazi (quasi) compatti che risulta anche essere una generalizzazione degli spazi almost-compact, gli spazi *weakly-compact*; al fine di unificare le tecniche di cui ai punti (1) e (2) nel senso che caratterizziamo tali spazi contemporanea-

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via C. Battisti 90, 98100 Messina, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) (oggetto di una comunicazione al Congresso U.M.I., Palermo 1979). — Ricevuto: 21-V-1980.

mente sia introducendo una sottofamiglia di filtri aperti, i filtri quasi-regolari (che risultano una generalizzazione dei filtri regolari, cfr. [**1**]), sia generalizzando il concetto di r-aderenza, r-convergenza per un qualsiasi filtro con quello di γ-aderenza, γ-convergenza.

Premesse e notazioni

Usiamo le seguenti notazioni: Siano $(S, \mathscr{T})$ uno spazio topologico ed A un suo sottoinsieme, indichiamo con $\bar{A}$ oppure con $\bar{A}^{\mathscr{T}}$ e con $\mathring{A}$ oppure con $\mathring{A}^{\mathscr{T}}$ la chiusura e l'interno di A in S rispettivamente. Siano, $x \in S$, $\mathscr{F}$ un filtro non nullo su S e $\mathscr{B}$ una sua base ($\mathscr{F} = \bar{\mathscr{B}}$) (cfr. [**5**]), indichiamo con $\mathscr{U}_x$ ed $\mathscr{U}(\mathscr{F})$ il filtro degli intorni di x in S e di $\mathscr{F}$ in S rispettivamente. Il filtro $\mathscr{U}(\mathscr{F})$ è un filtro aperto una cui base è costituita dagli intorni aperti degli elementi di $\mathscr{B}$ (cfr. [**5**], vol. 2, pag. 519).

Indichiamo inoltre con $\bar{\mathscr{F}}$ il filtro chiuso su S una cui base è costituita dall'insieme dei $\bar{B}$ per ogni $B \in \mathscr{B}$ e con $\mathring{\mathscr{F}}$ il filtro aperto (eventualmente nullo) una cui base è costituita dall'insieme dei $\mathring{\bar{B}}$ per ogni $B \in \mathscr{B}$.

Precisiamo inoltre che per tutte le notazioni sui filtri seguiamo quelle del Demaria (cfr. [**5**]) e del Kowalsky (cfr. [**8**]), anzichè quelle del Bourbaki (cfr. [**2**]). Per tutti i concetti rimandiamo a $[\mathbf{3}]_2$, [**5**], [**11**], [**12**], [**13**], [**14**] e [**15**], ricordiamo solamente:

I – Siano, $\mathscr{F}$ un filtro non nullo (non contenente cioè l'insieme vuoto) su $(S, \mathscr{T})$ ed x un elemento di S, diciamo che x è un punto di r-aderenza per $\mathscr{F}$ ($\mathscr{F}$ r-converge ad x) se $\mathscr{F} \wedge \bar{\mathscr{U}}_x \neq \theta$ ($\mathscr{F} \leqslant \bar{\mathscr{U}}_x$), cfr. [**6**].

II – Siano, $\mathscr{F}$ un filtro non nullo su $(S, \mathscr{T})$ ed x un elemento di S, diciamo che x è un punto di δ-aderenza per $\mathscr{F}$ ($\mathscr{F}$ δ-converge ad x) se $\mathscr{F} \wedge \mathring{\bar{\mathscr{U}}}_x \neq \theta$ ($\mathscr{F} \leqslant \mathring{\bar{\mathscr{U}}}_x$), cfr. [**16**].

Ovviamente ogni punto di aderenza (convergenza) è un punto di δ-aderenza (δ-convergenza) e quest'ultimo è un punto di r-aderenza (r-convergenza).

1 - Spazi weakly-compact; filtri quasi-regolari; γ-aderenza «γ-convergenza»

Definizione 1.1. *Siano, S uno spazio topologico ed A un suo aperto, diciamo che A è quasi-regolare se esiste un insieme regolarmente chiuso e non vuoto in esso contenuto.*

Osservazione 1. Ovviamente ogni spazio T_3 è tale che ogni suo aperto è quasi-regolare, il viceversa in generale non è vero; a tal fine sussiste il seguente

Controesempio 1. Se S è l'insieme dei punti interni del quadrato di lato l'intervallo chiuso $[0, 1]$ della retta reale, l'insieme $X = S \cup \{(0, 0), (1, 0)\}$ si può dotare della struttura di spazio topologico prendendo come base di una topologia (cfr. [**5**]) su X, la famiglia degli intorni circolari, per i punti di S, mentre $U_n(0, 0) = \{(0, 0)\} \cup \{\{(x, y)\}/\ 0 < x < \frac{1}{2}$ e $0 < y < 1/n\}$ e $U_m(1, 0) = \{(1, 0)\} \cup \{\{(x, y)\}/\ \frac{1}{2} < x < 1$ e $0 < y < 1/m\}$ come intorni per $(0, 0)$ e $(1, 0)$ rispettivamente. Tale spazio topologico non è uno spazio T_3 (cfr. [**15**], ex. 81) ma è tale che ogni suo aperto è quasi-regolare.

Definizione 1.2. *Diciamo che una famiglia $\mathscr{A}$ di aperti di uno spazio topologico S è quasi-regolare se ogni suo elemento lo è.*

Osservazione 2. Se $\mathscr{A}$ è una famiglia quasi-regolare di S, esistono allora due famiglie $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$, aperta e chiusa rispettivamente di S tali che $\mathscr{B} \leqslant \mathscr{C} \leqslant \mathscr{A}$.

Il viceversa, cioè se $\mathscr{A}$ è una famiglia di aperti di S per la quale esistono una famiglia $\mathscr{C}$ di chiusi di S ed una famiglia $\mathscr{B}$ di aperti di S con $\mathscr{B} \leqslant \mathscr{C} \leqslant \mathscr{A}$ allora $\mathscr{A}$ è quasi-regolare, non è in generale vero per il fatto che se $B \in \mathscr{B}$ possiamo dire che esistono $C \in \mathscr{C}$ ed $A \in \mathscr{A}$ tali che $B \subseteq C \subseteq A$ ma non è detto che ciò sia valido per ogni elemento di $\mathscr{A}$. Infatti se consideriamo come spazio topologico S quello di cui al controesempio 2 e come famiglie $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ le seguenti: $\mathscr{A} = \{S, \{a, c, b\}\}$; $\mathscr{B} = \{\{a\}, \{c\}\}$ e $\mathscr{C} = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}\}$, pur risultando $\mathscr{B} \leqslant \mathscr{C} \leqslant \mathscr{A}$, l'aperto $\{a, b, c\} \in \mathscr{A}$ non contiene alcun regolarmente chiuso di $\mathscr{C}$.

Definizione 1.3. *Diciamo che un ricoprimento aperto $\mathscr{A}$ di uno spazio topologico S è quasi-regolare quando lo è come famiglia.*

Definizione 1.4. *Diciamo che un ricoprimento quasi-regolare $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ di uno spazio topologico S è regolare se per ogni $i \in I$ esiste C_i regolarmente chiuso di S tale che: $C_i \subseteq A_i$ ed $\bigcup_{i \in I} \mathring{C}_i = S$.*

Osservazione 3. Ogni ricoprimento regolare è quasi-regolare ma non vale in generale il viceversa, esiste infatti il seguente

Controesempio 2. Siano, $S = \{a, b, c, d\}$ e $\mathscr{T}$ la topologia costituita da: $\emptyset$, S, $\{a\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

Ovviamente i chiusi di $(S, \mathscr{T})$ sono: S, $\emptyset$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b\}$, $\{d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{b, d\}$, $\{a, d\}$, $\{b\}$, $\{a\}$.

Il ricoprimento aperto $\{\{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$ è quasi-regolare in quanto sia

$\{a, b, c\}$ che $\{a, c, d\}$ contengono $\{a\}$, insieme aperto e chiuso e quindi regolarmente chiuso. Ma non è regolare in quanto in $\{a, b, c\}$ e $\{a, c, d\}$ non sono contenuti regolarmente chiusi distinti da $\{a\}$.

Definizione 1.5. *Diciamo che uno spazio topologico S è weakly-compact se da ogni suo ricoprimento regolare è possibile estrarre un numero finito di elementi la cui unione è densa in S.*

Osservazione 4. Ogni spazio almost-compact è ovviamente uno spazio weakly-compact ma in generale non vale il viceversa. Esiste infatti il seguente

Controesempio 3. Siano, $S = [0, 1]$ l'intervallo chiuso della retta reale, $\mathscr{T}$ la topologia indotta su S da quella standard dei numeri reali ed S_1, S_2, S_3 tre sottoinsiemi di S densi in $(S, \mathscr{T})$ a due a due disgiunti e tali che $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = S$.

Consideriamo ora su S la nuova topologia $\sigma = \mathscr{T} \wedge \mathscr{T}^*$ (cfr. [**5**], vol. 1**, cor. 12/5.5) essendo $\mathscr{T}^*$ la seguente topologia su S: $\mathscr{T}^* = \{\emptyset, S, S_1, S_2, S_1 \cup S_2\}$. Vale allora il seguente

Lemma. *Siano, C ed A un regolarmente chiuso ed un aperto rispettivamente di (S, σ) tali che $C \subseteq A$. Risulta allora*

$$\overset{\circ}{C}{}^{\sigma} \subseteq \overset{\circ\mathscr{T}}{\overline{A}{}^{\sigma}}.$$

Dimostrazione. Indichiamo con x_i un generico elemento di S appartenente ad S_i $(i = 1, 2, 3)$. Per provare quanto detto basta mostrare che ogni $x_i \in \overset{\circ}{C}{}^{\sigma}$ è un elemento di $\overset{\circ\mathscr{T}}{\overline{A}{}^{\sigma}}$ per $i = 1, 2, 3$.

Abbiamo allora tre casi:

(1) Sia $x_3 \in C$. esiste allora $V_{x_3} \in \sigma$ e quindi $V_{x_3} \in \mathscr{T}$ (perchè gli intorni aperti di x_3 hanno la stessa base di intorni che avevano in $(S, \mathscr{T})$) tale che $x_3 \in V_{x_3} \subseteq C \subseteq A \subseteq \overline{A}{}^{\sigma}$. Essendo V_{x_3} un aperto di $(S, \mathscr{T})$ ne segue che $x_3 \in \overset{\circ\mathscr{T}}{\overline{A}{}^{\sigma}}$.

(2) Sia $x_2 \in \overset{\circ}{C}{}^{\sigma}$ esiste allora un $V_{x_2} \in \mathscr{T}$ con $x_2 \in V_{x_2}$ tale che $V_{x_2} \cap S_2 \subseteq C$ onde $\overline{V_{x_2} \cap S_2}^{\sigma} \subseteq C \subseteq \overline{A}{}^{\sigma}$. Per cui C e quindi $\overline{A}{}^{\sigma}$ contiene tutti gli $x_2 \in V_{x_2}$ e tutti gli $x_3 \in V_{x_2}$ (1).

---

(1) Supponiamo per assurdo che esista $x_3 \in V_{x_2}$ con $x_3 \notin C$; essendo C un chiuso di (S, σ) esiste un intorno V_{x_3} di x_3 in (S, σ) (non è restrittivo supporre V_{x_3} aperto di $(S, \mathscr{T})$) tale che $V_{x_3} \cap C = \emptyset$. Posto $V_{x_2} \cap V_{x_3} = H \neq \emptyset$ risulta $H \cap C = \emptyset$ ed $\emptyset \neq (H \cap S_2) \subseteq (V_{x_2} \cap S_2) \subseteq C$; e ciò è assurdo.

Proviamo ora che $\bar{A}^\sigma$ contiene anche tutti gli $x_1 \in V_{x_2}$. Supponiamo per assurdo che esista $x_1 \in V_{x_2}$ tale che $x_1 \notin \bar{A}^\sigma$, esiste allora $V_{x_1} \in \mathscr{T}$, con $x_1 \in V_{x_1}$, tale che $(V_{x_1} \cap S_1) \cap A = \emptyset$. Posto $H = V_{x_1} \cap V_{x_2} \neq \emptyset$, risulta anche $(H \cap S_1) \cap A = \emptyset$ con H intorno aperto di x_1 in (S, σ). Poichè S_3 è denso in $(S, \mathscr{T})$ risulta $H \cap S_3 \neq \emptyset$ (essendo $H \in \mathscr{T}$) e quindi esiste un $\bar{x}_3 \in H \subseteq V_{x_2}$, onde $\bar{x}_3 \in C \subseteq A \subseteq \bar{A}^\sigma$. Esiste allora un intorno aperto $L_{\bar{x}_3}$ di $\bar{x}_3$ in (S, σ) (non è restrittivo supporre $L_{\bar{x}_3}$ aperto anche in $(S, \mathscr{T})$) tale che $L_{\bar{x}_3} \subseteq A$ (essendo A aperto di (S, σ)).

Posto $R_{\bar{x}_3} = H \cap L_{\bar{x}_3} \neq \emptyset$, risulta $R_{\bar{x}_3}$ intorno aperto di $\bar{x}_3$ in $(S, \mathscr{T})$ onde $\emptyset \neq R_{\bar{x}_3} \cap S_1 \subseteq A \cap S_1$ e quindi $(R_{\bar{x}_3} \cap S_1) \cap A \neq \emptyset$.

Essendo $R_{\bar{x}_3} \subseteq H$ ne segue che $(H \cap S_1) \cap A \neq \emptyset$.

Il che è assurdo essendo $(H \cap S_1) \cap A = \emptyset$.

Risulta quindi che ogni $x_1 \in V_{x_2}$ appartiene ad A^σ. Pertanto abbiamo $V_{x_2} \cap S_2 \subseteq \bar{A}^\sigma$, $V_{x_2} \cap S_3 \subseteq \bar{A}^\sigma$, $V_{x_2} \cap S_1 \subseteq \bar{A}^\sigma$ e quindi $V_{x_2} \subseteq \bar{A}^\sigma$.

Essendo $x_2 \in V_{x_2} \in \mathscr{T}$ ne segue che $x_2 \in \overset{\circ \mathscr{T}}{\bar{A}^\sigma}$.

(3) Sia $x_1 \in \overset{\circ}{C}^{\mathscr{T}}$, ripetendo lo stesso ragionamento fatto nel caso (2), ne segue che $x_1 \in \overset{\circ \mathscr{T}}{\bar{A}^\sigma}$.

Da (1), (2) e (3) ne segue allora che $\overset{\circ}{C}^\sigma \subseteq \overset{\circ \mathscr{T}}{\bar{A}^\sigma}$.

Osservazione. Il Lemma precedente non è banale perchè mentre sono ovvie le inclusioni $\overset{\circ}{C}^{\mathscr{T}} \subseteq \overset{\circ \mathscr{T}}{\bar{A}^\sigma}$; $\overset{\circ}{C}^{\mathscr{T}} \subseteq \overset{\circ \mathscr{T}}{\bar{A}^{\mathscr{T}}}$ e $\overset{\circ \mathscr{T}}{\bar{A}^\sigma} \subseteq \overset{\circ \mathscr{T}}{\bar{A}^\sigma}$ (essendo $\sigma \leqslant \mathscr{T}$), non è detto che sia in generale $\overset{\circ}{C}^\sigma \subseteq \overset{\circ \mathscr{T}}{\bar{A}^\sigma}$.

In virtù di quanto detto, proviamo ora che lo spazio (S, σ) è uno spazio weakly-compact senza essere almost-compact.

Proviamo solo che (S, σ) è weakly-compact, visto che in [7] (Biespiel 5), è detto esplicitamente che (S, σ) non è almost-compact.

Sia allora $\{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento regolare di (S, σ); esiste allora, per ogni $i \in I$, un regolarmente chiuso C_i di (S, σ) tale che $\overset{\circ}{C}_i \subseteq C_i \subseteq A_i$ con $\bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{C}_i = S$.

Per il Lemma precedente risulta allora $\overset{\circ}{C}{}_i^\sigma \subseteq \overset{\circ \mathscr{T}}{\bar{A}{}_i^\sigma}$ per ogni $i \in I$, onde ne segue che $\{\overset{\circ \mathscr{T}}{\bar{A}{}_i^\sigma}\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di S formato da aperti di $\mathscr{T}$. Essendo $(S, \mathscr{T})$ compatto, esistono $i_1, i_2, \dots, i_n$ appartenenti ad I tali che $\overset{\circ \mathscr{T}}{\bar{A}{}_{i_1}^\sigma} \cup \overset{\circ \mathscr{T}}{\bar{A}{}_{i_2}^\sigma} \cup \dots \cup \overset{\circ \mathscr{T}}{\bar{A}{}_{i_n}^\sigma} = S$ e quindi $\bar{A}{}_{i_1}^\sigma \cup \bar{A}{}_{i_2}^\sigma \cup \dots \cup \bar{A}{}_{i_n}^\sigma = S$.

Lo spazio (S, σ) è quindi weakly-compact.

Al fine di dare alcune caratterizzazioni degli spazi weakly-compact in linea con quelle date per gli spazi almost-compact e nearly-compact da [**10**], [**6**] e [**4**], [**16**] rispettivamente, introduciamo una nuova classe di filtri (che generalizza quella dei filtri regolari [**1**]), i *filtri quasi-regolari* e generalizziamo il concetto di r-aderenza (r-convergenza) introducendo quello di γ-aderenza (γ-convergenza).

Definizione 1.6. *Diciamo che un filtro $\mathscr{F}$ su $(S, \mathscr{T})$ è quasi-regolare se esiste un filtro aperto $\mathscr{G}$ su S tale che $\mathscr{F} = \mathscr{U}(\overline{\mathscr{G}})$.*

Osservazione 5. Ogni filtro quasi-regolare è aperto, il viceversa in generale non è valido come risulta dal controesempio 5.

Definizione 1.7. *Diciamo che un filtro $\mathscr{F}$ su $(S, \mathscr{T})$ è regolare quando è aperto e chiuso (possiede cioè una base di aperti ed una base di chiusi,* cfr. [**1**]).

Osservazione 6. Ogni filtro regolare (sia $\mathscr{F}$ uno di essi) è quasi-regolare essendo ovviamente $\mathscr{F} = \mathscr{U}(\overline{\mathscr{F}})$. Il viceversa in generale non è valido come risulta dal seguente

Controesempio 4. Siano, $S = \{x, y, z, t\}$ e $\mathscr{T} = \{\emptyset, S, \{x\}, \{z, t\}, \{x, y, z\}, \{x, z, t\}, \{x, z\}, \{z\}\}$ il supporto e la famiglia di aperti rispettivamente dello spazio topologico $(S, \mathscr{T})$. Il filtro $\mathscr{G} = \mathscr{U}(\overline{\overbracket{\overline{\{x\}}}})$ è quasi-regolare senza essere regolare. Infatti $\mathscr{G} = \mathscr{U}(\overline{\overbracket{\overline{\{x\}}}}) = \mathscr{U}(\overbracket{\overline{\{x\}}}) = \mathscr{U}(\overline{\{x, y\}}) = \{\{x, y, z\}, S\}$ non è regolare, non essendo $\{x, y, z\}$ un chiuso di S.

Proprietà 1.1. *Siano $(S, \mathscr{T})$ uno spazio topologico T_4* (cfr. [**5**], vol. 2) *ed $\mathscr{F}$ un filtro su S; risulta allora: $\mathscr{F}$ è regolare se e solo se è quasi-regolare.*

Dimostrazione. Per l'Oss. 6, basta provare che se $\mathscr{F}$ è un filtro quasi-regolare su S allora è regolare su S.

Essendo $\mathscr{F}$ un filtro quasi-regolare su S, esiste un filtro aperto $\mathscr{G}$ su S tale che $\mathscr{F} = \mathscr{U}(\overline{\mathscr{G}})$. Per provare che $\mathscr{F}$ è un filtro regolare basta mostrare, per l'Oss. 5, che possiede una base formata da chiusi.

Sia $A_{\overline{G}} \in \mathscr{U}(\overline{\mathscr{G}})$ con $G \in \mathscr{G}$, ne segue che $A_{\overline{G}} \in \mathscr{U}_{\overline{G}}$ ($\mathscr{U}_{\overline{G}}$ filtro degli intorni del chiuso $\overline{G}$), per [**5**], prop. 5/2.5, esiste un intorno chiuso $C_{\overline{G}}$ di $\overline{G}$ tale che $C_{\overline{G}} \subseteq A_{\overline{G}}$. Essendo $C_{\overline{G}}$ un intorno chiuso di $\overline{G}$ risulta ovviamente $\overline{G} \subseteq \mathring{C}_{\overline{G}} \subseteq C_{\overline{G}} \subseteq A_{\overline{G}}$. Poichè $\mathring{C}_{\overline{G}} \in \mathscr{U}(\overline{\mathscr{G}})$ ne consegue che $C_{\overline{G}} \in \mathscr{U}(\overline{\mathscr{G}})$ e quindi per la genericità di $A_{\overline{G}}$ ne segue l'asserto.

Controesempio 5. Siano, $(R, \mathscr{T})$ la retta reale con la topologia standard ed $\mathscr{F} = \overline{\{(a, b)\}}$ un filtro aperto su R. $\mathscr{F}$ non è regolare in quanto $\mathscr{F}$ non è un filtro chiuso e quindi, essendo R uno spazio topologico T_4, per la Prop. 1.1 $\mathscr{F}$ non è quasi-regolare. Ciò prova che non tutti i filtri aperti sono quasi-regolari.

Definizione 1.8. *Siano, $\mathscr{G}$ un filtro su $(S,\mathscr{T})$ e x un punto di S; diciamo che x è un punto di γ-aderenza per $\mathscr{G}$ ($\mathscr{G}$ γ-converge a x)* se $\mathscr{G}\wedge\mathscr{U}(\overline{\mathscr{U}}_x)\neq 0$ $(\mathscr{G}\leqslant\mathscr{U}(\overline{\mathscr{U}}_x))$.

Osservazione 7. Ovviamente se x è un punto di uno spazio topologico S e $\mathscr{G}$ un filtro su S, valgono le seguenti implicazioni: x punto di aderenza (convergenza) per $\mathscr{G}\Rightarrow x$ punto di δ-aderenza (δ-convergenza) per $\mathscr{G}\Rightarrow x$ punto di r-aderenza (r-convergenza) per $\mathscr{G}\Rightarrow x$ punto di γ-aderenza (γ-convergenza) per $\mathscr{G}$. Il viceversa in generale non è valido come risulta da [**16**], [**6**] e dal seguente

Controesempio 6. Siano, $(S,\mathscr{T})$ lo spazio topologico di cui al Controesempio 4 e $\mathscr{G}=\overset{\sqcap}{\{x\}}$. L'elemento $z\in S$ è ovviamente un punto di γ-aderenza per $\mathscr{G}$ senza essere un punto di r-aderenza per $\mathscr{G}$. Notiamo inoltre che $\mathscr{G}$ γ-converge a z (essendo $\mathscr{G}$ un ultrafiltro su S) ma non r-converge a z.

Proprietà 1.2. *Siano, $(S,\mathscr{T})$ uno spazio topologico T_3, x un punto di S e $\mathscr{F}$ un filtro su S; le seguenti condizioni risultano equivalenti:*

(1) *x è un punto di aderenza (convergenza) per $\mathscr{F}$.*
(2) *x è un punto di δ-aderenza (δ-convergenza) per $\mathscr{F}$.*
(3) *x è un punto di r-aderenza (r-convergenza) per $\mathscr{F}$.*
(4) *x è un punto di γ-aderenza (γ-convergenza) per $\mathscr{F}$.*

Dimostrazione. Se S è T_3, per ogni $x\in S$ risulta ovviamente $\mathscr{U}_x=\mathring{\overline{\mathscr{U}}}_x=\overline{\mathscr{U}}_x=\mathscr{U}(\overline{\mathscr{U}}_x)$ onde l'asserto.

Proprietà 1.3. *Siano, $(S,\mathscr{T})$ uno spazio topologico, $\mathscr{G}$ un filtro aperto su S ed x un punto di S; le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *x è un punto di aderenza per $\mathscr{G}$.*
(2) *x è un punto di δ-aderenza per $\mathscr{G}$.*
(3) *x è un punto di r-aderenza per $\mathscr{G}$.*

Dimostrazione. Ovvia, essendo sempre $\mathscr{G}\wedge\mathscr{U}_x\neq\emptyset\Leftrightarrow\mathscr{G}\wedge\mathring{\overline{\mathscr{U}}}_x\neq\emptyset\Leftrightarrow\mathscr{G}\wedge\overline{\mathscr{U}}_x\neq\emptyset$ con $\mathscr{G}$ filtro aperto su S.

Proprietà 1.4. *Siano, $(S, \mathcal{T})$ uno spazio topologico, $\overline{\mathcal{F}}$ il filtro chiusura di un filtro aperto $\mathcal{F}$ su S ed x un punto di S, risulta allora: x è un punto di aderenza per $\mathcal{F}$ se e solo se lo è di δ-aderenza per $\overline{\mathcal{F}}$.*

Dimostrazione. Ovvia, essendo sempre $\overline{\mathcal{F}} \wedge \overline{\overset{\circ}{\mathcal{U}}}_x \neq 0 \Leftrightarrow \overline{\mathcal{F}} \wedge \overset{\circ}{\overline{\mathcal{U}}}_x \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{F} \wedge \mathcal{U}_x \neq 0 \Leftrightarrow \overline{\mathcal{F}} \wedge \mathcal{U}_x \neq 0$.

Controesempio 7. Proviamo che in generale se x è un punto di r-aderenza per un filtro $\overline{\mathcal{F}}$, chiusura di un filtro aperto $\mathcal{F}$, non è detto che x sia di aderenza per $\overline{\mathcal{F}}$.

A tal fine basta considerare uno spazio T_2 (di Hausdorff) non $T_{2\frac{1}{2}}$ (cfr. [**15**], ex. 60, 61, 74, 100). In tale spazio $(S, \mathcal{T})$ esistono opportuni $\bar{x}$, $\bar{y}$ con $\bar{x} \neq \bar{y}$ tali che $\overline{\mathcal{U}}_{\bar{x}} \wedge \overline{\mathcal{U}}_{\bar{y}} \neq 0$. Considerato il filtro aperto $\mathcal{U}_{\bar{x}}$ ne segue che $\bar{y}$ è un punto di r-aderenza per il filtro $\overline{\mathcal{U}}_{\bar{x}}$ chiusura di $\mathcal{U}_{\bar{x}}$ ma $\bar{y}$ non è ovviamente di aderenza per $\overline{\mathcal{U}}_{\bar{x}}$.

Controesempio 8. Proviamo che in generale, se x è un punto di δ-aderenza per un filtro chiuso $\mathcal{F}$ non è detto che x sia un punto di aderenza per $\mathcal{F}$.

Siano allora S un insieme, p un suo elemento e $\mathcal{T} = \{\emptyset \ \{A \cup \{p\}: A \subseteq S\}\}$; risulta ovviamente $(S, \mathcal{T})$ uno spazio topologico con topologia aperta. Sia a un punto di S distinto da p; risulta: $\mathcal{U}_p = \overbrace{\{p\}}$ e $\mathcal{U}_a = \overbrace{\{a, p\}}$, essendo $\mathcal{U}_p$ e $\mathcal{U}_a$ i filtri degli intorni di p ed a rispettivamente in S.

Il filtro $\mathcal{F} = \overbrace{\{S - \{a, p\}\}}$ è ovviamente, un filtro chiuso su S tale che

(1) $\mathcal{F} \wedge \mathcal{U}_a = 0$, quindi a non è un punto di aderenza per $\mathcal{F}$,

(2) $\mathcal{F} \wedge \overset{\circ}{\overline{\mathcal{U}}}_a \neq 0$, essendo $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{U}}}_a = S$ (2) e quindi a è un punto di δ-aderenza per $\mathcal{F}$.

Essendo anche $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{U}}}_a = S = \overline{\mathcal{U}}_a$ il punto a è anche un punto di r-aderenza per il filtro $\mathcal{F}$ senza essere un punto di aderenza per $\mathcal{F}$ e ciò a conferma di quanto detto nel controesempio precedente.

2 - Caratterizzazioni degli spazi weakly-compact

Allo scopo di caratterizzare gli spazi waekly-compact in termini di aderenza di filtri quasi-regolari ed in termini di γ-aderenza (γ-convergenza) per

---

(2) Ciò segue immediatamente dal fatto che ogni punto di S sta nella chiusura di $\{a, p\}$ in quanto tutti gli intorni di un generico punto di S contengono p e quindi hanno intersezione non vuota con $\{a, p\}$.

filtri aperti, premettiamo il seguente

Lemma 2.1. *Sia $(S, \mathscr{T})$ uno spazio topologico, le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti:*

(1) *Ogni filtro aperto e non nullo su S ha un punto di γ-aderenza.*

(2) *Ogni filtro $\overline{\mathscr{G}}$, con $\mathscr{G}$ filtro aperto e non nullo su S, ha un punto di r-aderenza.*

(3) *Ogni filtro quasi-regolare e non nullo su S ha un punto di aderenza.*

(4) *Ogni filtro quasi-regolare e non nullo su S ha un punto di δ-aderenza.*

(5) *Ogni filtro quasi-regolare e non nullo su S ha un punto di r-aderenza.*

(6) *Ogni filtro $\overline{\mathscr{G}}$, con $\mathscr{G}$ filtro quasi-regolare e non nullo su S, ha un punto di aderenza.*

(7) *Ogni filtro $\overline{\mathscr{G}}$, con $\mathscr{G}$ filtro quasi-regolare e non nullo su S, ha un punto di δ-aderenza.*

(8) *Ogni filtro $\overset{\circ}{\overline{\mathscr{G}}}$, con $\mathscr{G}$ filtro quasi-regolare e non nullo su S, ha un punto di δ-aderenza.*

(9) *Ogni filtro $\overset{\circ}{\overline{\mathscr{G}}}$, con $\mathscr{G}$ filtro quasi-regolare e non nullo su S, ha un punto di r-aderenza.*

(10) *Ogni filtro $\overset{\circ}{\overline{\mathscr{G}}}$, con $\mathscr{G}$ filtro quasi-regolare e non nullo su S, ha un punto di aderenza.*

(11) *Ogni ultra-filtro aperto su S γ-converge.*

Dimostrazione. Osserviamo subito che delle undici condizioni suddette, per l'Oss. 5 e per la Prop. 1.3, le condizioni (3), (4) e (5) sono tra di loro equivalenti come pure le condizioni (8), (9) e (10). Le condizioni (6) e (7) sono invece equivalenti tra di loro per la Prop. 1.4.

Per completare la dimostrazione del lemma basta allora provare la seguente catena di implicazioni

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (6) \Rightarrow (10) \Rightarrow (3) \Rightarrow (11) \Rightarrow (1).$$

(1) $\Rightarrow$ (2). Dato $\mathscr{G}$, filtro aperto e non nullo su S, proviamo che esiste un punto di r-aderenza per $\overline{\mathscr{G}}$.

Supponiamo per assurdo che sia $\overline{\mathscr{G}} \wedge \overline{\mathscr{U}}_x = \theta$, $\forall x \in S$. Esistono allora, $G \in \mathscr{G}$ e $U_x \in \mathscr{U}_x$ tali che $\overline{G} \cap \overline{U}_x = \emptyset$ e quindi $\overline{U}_x \subseteq (S - \overline{G}) \in \mathscr{U}(\overline{\mathscr{U}}_x)$. Essendo $G \cap (S - \overline{G}) = \emptyset$ ne segue che $\mathscr{G} \wedge \mathscr{U}(\overline{\mathscr{U}}_x) = \theta$, il che è assurdo essendo per ipotesi $\mathscr{G} \wedge \mathscr{U}(\overline{\mathscr{U}}_x) \neq \theta$ per qualche $x \in S$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Dato $\mathscr{F} = \mathscr{U}(\overline{\mathscr{G}})$ filtro quasi-regolare su S con $\mathscr{G}$ filtro aperto e non nullo, proviamo che esiste un punto di aderenza per $\mathscr{F}$.

Supponiamo per assurdo che sia $(\mathscr{U}\overline{\mathscr{G}}) \wedge \mathscr{U}_x = \theta$ $\forall x \in S$. Esistono allora

$A_{\bar{G}} \in \mathscr{U}(\bar{\mathscr{G}})$, con $G \subseteq \bar{G} \subseteq A_{\bar{G}}$ e $G \in \mathscr{G}$, e $U_x \in \mathscr{U}_x$ tali che $A_{\bar{G}} \cap U_x = \emptyset$, quindi $U_x \subseteq (S - A_{\bar{G}}) \in \bar{\mathscr{U}}_x$. Essendo $\bar{G} \cap (S - A_{\bar{G}}) = \emptyset$ ne segue che $\bar{\mathscr{G}} \wedge \bar{\mathscr{U}}_x = \theta$. Il che è assurdo essendo per ipotesi $\bar{\mathscr{G}} \wedge \bar{\mathscr{U}}_x \neq \theta$ per qualche $x \in S$.

(3) $\Rightarrow$ (6); (6) $\Rightarrow$ (10) e (10) $\Rightarrow$ (3). Sono ovvie essendo banalmente vere le seguenti implicazioni: $\mathscr{G} \wedge \mathscr{U}_x \neq \theta \Leftrightarrow \bar{\mathscr{G}} \wedge \mathscr{U}_x \neq \theta \Leftrightarrow \overset{\circ}{\bar{\mathscr{G}}} \wedge \mathscr{U}_x \neq \theta$ per ogni filtro aperto e non nullo $\mathscr{G}$.

(3) $\Rightarrow$ (11). Sia $\mathscr{G}$ un ultra-filtro aperto su S, proviamo che esiste $x \in S$ tale che $\mathscr{G} \leqslant \mathscr{U}(\bar{\mathscr{U}}_x)$.

Supponiamo per assurdo che $\mathscr{G} \nleqslant \mathscr{U}(\bar{\mathscr{U}}_x)$ per ogni $x \in S$. Esiste quindi $A_x \in \mathscr{U}(\bar{\mathscr{U}}_x)$ tale che $A_x \notin \mathscr{G}$, per ogni $x \in S$. Poichè $A_x \in \mathscr{U}(\bar{\mathscr{U}}_x)$, esiste $U_x \in \mathscr{U}_x$, U_x aperto di S, tale che $U_x \subseteq \bar{U}_x \subseteq A_x$. Essendo $\mathscr{G}$ ultra-filtro aperto di S, (cfr. [**4**], prop. 1.2), risulta $(S - A_x) \in \mathscr{G}$. E quindi essendo $\mathscr{G}$ un filtro aperto esiste $B \in \mathscr{G}$ tale che $B \subseteq S - A_x \subseteq S - \bar{U}_x$ per cui $(S - \bar{U}_x) \in \mathscr{U}(\bar{\mathscr{G}})$. Essendo $(S - \bar{U}_x) \cap U_x = \emptyset$ risulta $\mathscr{U}(\bar{\mathscr{G}}) \wedge \mathscr{U}_x = \theta$, per ogni $x \in S$. Assurdo, visto che $\mathscr{U}(\bar{\mathscr{G}})$ è un filtro quasi-regolare che per ipotesi ha almeno un punto di aderenza su S. Onde l'asserto.

(11) $\Rightarrow$ (1). Sia $\mathscr{G}$ un filtro aperto non nullo su S, esistono allora un ultra-filtro aperto $\mathscr{F}$ su S, cfr. [**3**]$_1$, e un elemento x di S tali che: $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{G}$ e $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{U}(\bar{\mathscr{U}}_x)$, per cui risulta $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{G} \wedge \mathscr{U}(\bar{\mathscr{U}}_x)$, onde l'asserto.

Teorema 2.1. *Sia $(S, \mathscr{T})$ uno spazio topologico, le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti:*

(1) *S è weakly-compact.*

(2) *Ogni filtro quasi-regolare e non nullo su S ha almeno un punto di aderenza.*

(3) *Ogni famiglia di chiusi $\{C_i\}_{i \in I}$ tale che per ogni indice $i \in I$ esiste un aperto A_i contenente C_i con $\bigcap_{i \in I} \bar{A}_i = \emptyset$, possiede un numero finito di elementi $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_n}$ tali che $\overset{\circ}{C}_{i_1} \cap \overset{\circ}{C}_{i_2} \cap \ldots \cap \overset{\circ}{C}_{i_n} = \emptyset$.*

Dimostrazione. Eseguiamo la dimostrazione seguendo la seguente catena di implicazioni (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2). Supponiamo per assurdo che esista un filtro quasi-regolare $\mathscr{F} = \mathscr{U}(\bar{\mathscr{G}})$ e non nullo (cioè $\mathscr{G} \neq \theta$) tale che $\mathscr{F} \wedge \mathscr{U}_x = \theta$, per ogni $x \in S$.

Essendo $\mathscr{G} \leqslant \bar{\mathscr{G}} \leqslant \mathscr{U}(\bar{\mathscr{G}}) = \mathscr{F}$ ne segue che è anche $\mathscr{G} \wedge \mathscr{U}_x = \theta$ e $\bar{\mathscr{G}} \wedge \mathscr{U}_x = \theta$ per ogni $x \in S$ e pertanto, per ogni $x \in S$, esistono $U_x \in \mathscr{U}_x$, $G_x \in \mathscr{G}$ e $A_{\bar{G}_x} \in \mathscr{U}(\bar{\mathscr{G}})$ con $G_x \subseteq \bar{G}_x \subseteq A_{\bar{G}_x}$ tali che: $G_x \cap U_x = \emptyset$; $\bar{G}_x \cap U_x = \emptyset$ e $A_{\bar{G}_x} \cap U_x = \emptyset$. Da quest'ultima condizione segue anche $A_{\bar{G}_x} \cap \bar{U}_x = \emptyset$ e quindi $\bar{G}_x \cap \bar{U}_x = \emptyset$. Posto $B_x = S - \bar{G}_x$, risulta $\bar{U}_x \subseteq B_x$ con $B_x \in \mathscr{U}(\bar{\mathscr{U}}_x)$.

Il ricoprimento aperto $\{B_x\}_{x\in S}$ è quindi un ricoprimento regolare essendo $\bigcup_{x\in S} U_x = S$. Essendo S uno spazio weakly-compact, esistono allora un numero finito di elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di S tali che $\overline{B}_{x_1} \cup \overline{B}_{x_2} \cup \ldots \cup \overline{B}_{x_n} = S$ e quindi

$$(*) \qquad (S - \overline{B}_{x_1}) \cap (S - \overline{B}_{x_2}) \cap \ldots \cap (S - \overline{B}_{x_n}) = \emptyset .$$

Poichè, per ogni $x \in S$, risulta $G_x \subseteq \overset{\circ}{\overline{G}}_x \subseteq \overline{G}_x = S - B_x$ ne consegue che $S - \overline{B}_x = S \overset{\circ}{-} B_x = \overset{\circ}{\overline{G}}_x$ è un elemento di $\mathscr{G}$ e quindi da $(*)$ segue che $\mathscr{G} = 0$, il che è assurdo essendo $\mathscr{G}$ un filtro aperto e non nullo su S.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sia $\{C_i\}_{i\in I}$ una famiglia di chiusi tale che, per ogni $i \in I$, esiste A_i, aperto di S, tale che $A_i \supseteq C_i$ e $\bigcap_{i\in I} \overline{A}_i = \emptyset$ e supponiamo per assurdo che per ogni $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ risulti

$$\overset{\circ}{C}_{i_1} \cap \overset{\circ}{C}_{i_2} \cap \ldots \cap \overset{\circ}{C}_{i_n} \neq \emptyset .$$

Consideriamo adesso i seguenti filtri

$$\mathscr{F} = \overline{\{\overset{\circ}{C}_i\}^*_{i\in I}} \neq 0 , \qquad \mathscr{G} = \overline{\{C_i\}^*_{i\in I}} \neq 0 , \qquad \mathscr{L} = \overline{\{A_i\}^*_{i\in I}} \neq 0$$

(cioè i filtri di sottobase [3] $\{\overset{\circ}{C}_i\}_{i\in I}$, $\{C_i\}_{i\in I}$ e $\{A_i\}_{i\in I}$ rispettivamente). Essendo, per ogni $i \in I$, $\overset{\circ}{C}_i \subseteq C_i \subseteq A_i \subseteq \overline{A}_i$ risulta ovviamente che $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{G} \leqslant \mathscr{L}$ e quindi, essendo $\mathscr{G}$ filtro chiuso diverso dal filtro nullo 0 e $\mathscr{L}$ filtro aperto $(\neq 0)$ su S risulta $\mathscr{U}(\overline{\mathscr{F}}) \leqslant \mathscr{L}$.

Poichè $\mathscr{U}(\overline{\mathscr{F}})$ è un filtro quasi-regolare su S, esiste $x \in S$ tale che $\mathscr{U}(\overline{\mathscr{F}}) \wedge \mathscr{U}_x \neq 0$ per cui risulta $\mathscr{L} \wedge \mathscr{U}_x \neq 0$; ne consegue che $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i$ e quindi $x \in \overline{A}_i$, per ogni $i \in I$, il che è assurdo essendo $\bigcap_{i\in I} \overline{A}_i = \emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento regolare di S, esistono per ogni $i \in I$, dei regolarmente chiusi C_i di S tali che $\overset{\circ}{C}_i \subseteq C_i \subseteq A_i$ e $\bigcup_{i\in I} \overset{\circ}{C}_i = S$.

La famiglia dei chiusi $\{S - A_i\}_{i\in I}$ è tale che, per ogni $i \in I$, esiste un aperto $S - C_i$ contenente $S - A_i$ e tale che $\bigcap_{i\in I} \overline{S - C_i} = \bigcap_{i\in I} (S - \overset{\circ}{C}_i) = S - \bigcup_{i\in I} \overset{\circ}{C}_i = S - S = \emptyset$. Per l'ipotesi, esistono un numero finito di indice $i_1, i_2, \ldots, i_n$ tali che $(S \overset{\circ}{-} A_{i_1}) \cap (S \overset{\circ}{-} A_{i_2}) \cap \ldots \cap (S \overset{\circ}{-} A_{i_n}) = \emptyset$ e quindi $(S - \overline{A}_{i_1}) \cap (S - \overline{A}_{i_2}) \cap \ldots \cap (S - \overline{A}_{i_n}) = \emptyset$, onde $S - (\overline{A}_{i_1} \cup \overline{A}_{i_2} \cup \ldots \cup \overline{A}_{i_n}) = \emptyset$ da cui $\overline{A}_{i_1} \cup \overline{A}_{i_2} \cup \ldots \cup \overline{A}_{i_n} = S$. Onde l'asserto.

---

[3] Cfr. [5].

Corollario 2.1. *Sia* $(S, \mathcal{T})$ *uno spazio topologico, esso è weakly-compact se e solo se è verificata una delle condizioni di cui al Lemma* 2.1 *e al Teor.* 2.1.

Dimostrazione. Conseguenza immediata del Lemma 2.1 e del Teor. 3.1.

Corollario 2.2. *Uno spazio topologico* $(S, \mathcal{T})$ *weakly-compact di Hausdorff è compatto se e solo se è* T_3.

Dimostrazione. Un verso della dimostrazione è ovvia. Proviamo il viceversa. Se lo spazio è weakly-compact, per il Cor. 2.1 e per la (1) del Lemma 2.1 ne segue che ogni filtro aperto e non nullo, sia $\mathcal{G}$ uno di essi, ha un punto di γ-aderenza e quindi per la Prop. 1.2, essendo $(S, \mathcal{T})T_3$, ne segue che $\mathcal{G}$ ha un punto di aderenza su S e per il teor. 1 di [**10**] $(S, \mathcal{T})$ è almost-compact e quindi compatto per [**10**], teor. 2.

Osservazione 8. Il risultato precedente migliora il seguente: « Uno spazio topologico $(S, \mathcal{T})$ di Hausdorff è compatto se e solo se è almost-compact e T_3 » (cfr. [**10**], teor. 2).

Corollario 2.3. *Uno spazio topologico* $(S, \mathcal{T})$ *di Hausdorff è nearly-compact se e solo se è weakly-compact e almost-regular.*

Dimostrazione. Un verso della dimostrazione è ovvia per il teor. 2.4 di [**12**]. Viceversa, per il teor. 2.3 di [**12**] basta provare che lo spazio S è almost-compact cioè che ogni filtro aperto non nullo su S possiede almeno un punto di aderenza, teor. 1 [**10**]. Per il Cor. 2.1 e la (1) del Lemma 2.1 risulta $\mathcal{G} \wedge \mathcal{U}(\overline{\mathcal{U}}_x) \neq \theta$ per ogni filtro aperto e non nullo $\mathcal{G}$ e per qualche x di S. Essendo S almost-regular risulta $\mathcal{U}(\overline{\mathcal{U}}_x) = \overset{\circ}{\overline{\mathcal{U}}}_x$, per ogni $x \in S$ e quindi $\mathcal{G} \wedge \overset{\circ}{\overline{\mathcal{U}}}_x \neq \theta$ onde, per la Prop. 1.3, è anche $\mathcal{G} \wedge \mathcal{U}_x \neq \theta$ e quindi l'asserto.

Osservazione 9. Il risultato precedente migliora il seguente: « Uno spazio topologico T_2 è nearly-compact se e solo se è almost-compact e almost-regular » (cfr. [**12**]).

Bibliografia

[1] M. P. Berri and R. H. Sorgenfrey, *Minimal regular spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 454-458.

[2] N. Bourbaki, *Topologie générale* (3rd ed.) Actualités Sci. Indust. n. 1142, Hermann, Paris 1965.

[3] F. Cammaroto: [•]$_1$ *Filtri particolarmente chiusi e filtri particolarmente aperti,* Matematiche (Catania) **32** (1977), 343-358; [•]$_2$ *T_2-chiusura di uno spazio topologico completamente regolare e legami con la compattificazione di Stone-Čech,* Boll. Un. Mat. Ital. (5) **17**-B (1980).

[4] F. Cammaroto e G. Lo Faro, *Proprietà dei filtri particolarmente chiusi e nuove caratterizzazioni degli spazi nearly-compact,* Bull. Un. Mat. Ital. (5) **15**-B (1978), 638-648.

[5] C. D. Demaria, *Topologia generale* (3^a ed.), Editrice Tirrenia, Torino 1974.

[6] L. L. Herrington and P. E. Long, *A characterization of H-closed spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1975), 469-475.

[7] H. Herrlich, *T_ν-Abgeschlossenheit und T_ν-Minimalität,* Math. Z. **88** (1965), 285-294.

[8] H. J. Kowalshy, *Topological spaces,* Academic Press, New York 1964.

[9] C. T. Liu, *Absolutely closed spaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 86-104.

[10] G. Marchisa, *Spazi compatti e spazi T_2-chiusi,* Atti Acc. Sci. Torino **108** (1973-1974), 1-7.

[11] J. I. Nagata, *Modern general topology,* North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1968.

[12] M. K. Singal and A. Mathur, *On nearly-compact spaces,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **2** (1969), 702-710.

[13] M. K. Singal and A. Rani, *On almost-m-compact spaces,* Annales de la Societé Scientifique de Bruxelles **82** (1968), 233-242.

[14] M. K. Singal and Shashi Prabla Arya, *On almost-regular spaces,* Blasnik Mat. (24) **4** (1969), 89-99.

[15] L. A. Steen and J. A. Seebach jr. *Counterexamples in topology,* Rinehart and Winston, New York 1970.

[16] N. V. Veličko, *H-closed topological spaces,* Mat. Sb. (112) **70** (1966), 98-112.

[17] P. Urysohn, *Über die Machtigkeit der züsammenhangenden Mengen,* Math. Ann. **94** (1925), 266-295.

Summary

Weakly-compact spaces are introduced as generalization of almost-compact spaces and are characterized by means of almost-regular filters and by means of γ-aderence (γ-convergence) for open filters.

* * *