Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 405-408

RAFFAELE SCAPELLATO (*)

Sulla regolarità dei sistemi di Steiner distributivi (**)

Introduzione

In [**7**] vengono individuati tutti i sistemi di terne di Steiner distributivi di ordine minore od eguale a 3^5 (1).

Scopo del presente lavoro è la dimostrazione del fatto che ciascuno di tali sistemi è *regolare*, ossia dotato di un gruppo transitivo e regolare di automorfismi.

1 - Ricordiamo che un sistema (di terne) di Steiner è una struttura di incidenza, costituita da punti e da rette, tale che per due punti distinti passi una ed una sola retta ed ogni retta contenga esattamente tre punti. Un tale sistema può essere visto come quasigruppo idempotente totalmente simmetrico e viceversa.

In accordo con [**3**], [**8**], si dirà *iperpiano* (*affine*) di un sistema di Steiner S un suo sottoinsieme A, tale che, per ogni $x \in S \setminus A$, detta B_x l'unione insiemistica di tutte le rette per x disgiunte da A, (1) ogni retta che interseca A ma non è contenuta in A intersechi B_x, (2) B_x sia un sottosistema di S.

Un sistema di Steiner si dice *distributivo* se, visto come quasigruppo, verifica l'identità $a(bc) = (ab)(ac)$. I sistemi di Steiner distributivi formano pertanto una *varietà*: ha quindi senso parlare del sistema di Steiner distributivo *libero* su un dato sistema di generatori, la cui cardinalità si dirà *rango* del sistema libero (cfr. ad es. [**2**], pag. 58).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 2-VI-1980.
(1) Ricordiamo che l'ordine di un tale sistema deve essere una potenza di 3, come si deduce subito, per esempio, da [**5**] e da fatti elementari ricordati in [**4**].

I sistemi distributivi (cfr. ad es. [4]) sono esattamente quelli in cui ogni triangolo (cioè ogni terna di punti non allineati) genera un piano affine di nove punti.

Dati un sistema di Steiner S ed un punto a di S, diremo, con [**4**], *simmetria (centrale) di centro* a la funzione $\varphi_a\colon x \to ax$; diremo *traslazione* ogni prodotto di due simmetrie centrali. È subito visto che le simmetrie centrali sono tutte automorfismi di S se, e solo se, S è distributivo.

Nel seguito indicheremo con H il sistema di Hall $S(81)$ (cfr. [**6**]) (²), con $A(S)$ l'automorfo del sistema di Steiner S.

Infine, dato un gruppo di permutazioni G su un insieme X, per ogni $x \in X$ indicheremo con xG la traiettoria di G rappresentata da x.

2 – Iniziamo con la

Osservazione 1. *Sia S un sistema distributivo, sia π una partizione di S costituita da tre elementi. Se ogni simmetria centrale di S manda elementi di π in elementi di π, allora π è costituita da iperpiani.*

Sia A un elemento di π. Dall'ipotesi si ha che, per $a \in A$, $Aa \in \pi$. Poichè $a = aa \in Aa$, si ha $Aa = A$. Ciò prova che *gli elementi di π sono sottosistemi di S.*

Dati un elemento A di π e una retta r, se r interseca A in un punto a e se $r \not\subseteq A$, sia $b \in r \setminus \{a\}$ e sia B l'elemento di π cui appartiene b. Poichè A è un sottosistema, da $ab \in A$ seguirebbe $b \in A$, assurdo; analogamente non può essere $ab \in B$, quindi ab appartiene all'elemento di π diverso da A, B. Da quanto detto segue che *una retta che interseca un elemento di π senza esservi contenuta interseca anche tutti gli altri elementi di π.*

Dati ora $A \in \pi$, $b \in S \setminus A$, per provare che A è un iperpiano basterà mostrare che l'unione U delle rette per b che non intersecano A è un sottosistema di S. Detto B l'elemento di π che contiene b, congiungendo b con un punto di B si ottiene una retta che non interseca tutti gli elementi di π e quindi è contenuta in B, perciò $B \subseteq U$; viceversa, una retta per b che non interseca A dev'essere contenuta in B, in base a quanto sopra visto. Di qui $U \subseteq B$ e poi la tesi.

Lemma 2. *Sia S un sistema distributivo libero di rango maggiore di 3, sia N un sottogruppo normale di $A(S)$. Le traiettorie di N non possono essere in numero di tre.*

Se infatti le traiettorie di N fossero 3, poichè ogni $g \in A(S)$, e quindi ogni

(²) In [**7**] è indicato con $T(4)$.

simmetria centrale, manda traiettorie di N in traiettorie di N, queste formerebbero una partizione π di S costituita da iperpiani (Oss. 1).

Ora un sistema di generatori libero G di S non è contenuto in alcun elemento di π e $|G| > 3$: esiste allora un $A \in \pi$ che contiene dei suoi elementi a, b, mentre un terzo elemento c di G non appartiene ad A.

Sia φ l'automorfismo di S che scambia b con c e tiene fissi gli altri elementi del sistema di generatori G (φ esiste perchè per ipotesi S è libero su G). Si ha allora $A\varphi \neq A$ perchè $b\varphi = c \notin A$, mentre $A\varphi \cap A \neq \emptyset$ perchè $a\varphi = a$. Pertanto φ non manda A in un elemento di π, contro quanto prima osservato, il che è assurdo. Segue la tesi.

Introduciamo ora le seguenti *notazioni, che manterremo nel seguito.* Detto S un sistema distributivo, indichiamo con K il gruppo generato dalle sue simmetrie centrali, con K^0 quello generato dalle sue traslazioni, con Z il centro di K^0.

Osservazione 3. *Per ogni sistema distributivo S la catena $Z \lhd K^0 \lhd K \lhd A(S)$ è costituita da sottogruppi normali in $A(S)$. Inoltre K^0 ha indice 2 in K.*

Com'è subito visto, le simmetrie centrali sono esattamente gli elementi di $A(S)$ che hanno un solo punto fisso: formano dunque un complesso normale in $A(S)$, perchè questo è transitivo. Dunque K è normale in $A(S)$. Per la stessa ragione K^0 è normale in $A(S)$, quindi lo è anche Z.

È poi facile vedere che un elemento di K sta in K^0 se, e solo se, è prodotto di un numero pari di simmetrie centrali: di qui segue subito che K^0 ha indice 2 in K.

Lemma 4. *Se S è il sistema di Hall H, il centro Z di K^0 è un gruppo di automorfismi transitivo e regolare di H.*

Dati $h \in Z$, $b \in B$, supponiamo che a sia un punto fisso per h, cioè che sia $ah = a$. La $g: x \to a(bx)$ è prodotto delle simmetrie di centri a, b e quindi $g \in K^0$: si ha perciò $hg = gh$. Essendo $ag = b$, segue $bh = agh = ahg = ag = b$. Per l'arbitrarietà di b, l'automorfismo h risulta essere l'identità. Ne segue che *ogni elemento non identico di Z è privo di punti fissi.*

Ora Z è normale in $A(H)$ (Oss. 3) e quindi, essendo H libero di rango 4 (cfr. [**7**]), non ha tre traiettorie (Lemma 2): pertanto, poichè ogni elemento non identico di Z è privo di punti fissi, si ha $|Z| \neq 3^3$. Inoltre Z ha un sottogruppo abeliano elementare di ordine 3^3 (3), quindi $|Z| \geqslant 3^3$.

(3) Come visto in [**6**]; possiamo dire, usando la notazione e la numerazione di [**6**], che si tratta del gruppo generato da w_1, w_2, w_3. Infatti dopo le (4.23) si mostra che tali elementi stanno in Z, dopo le (4.25) si nota che generano un gruppo abeliano elementare di ordine 3^3.

Poichè in [**6**] si è visto che K ha ordine 2.3^{10}, dall'Oss. 3 segue che K^0 è un 3-gruppo; quindi anche Z è un 3-gruppo e le diseguaglianze sopra dimostrate permettono di concludere che Z ha ordine multiplo di 3^4; di qui $|Z| = 3^4$ e quindi la tesi.

Siamo ora in grado di dimostrare il

Teorema 5. *Ogni sistema di Steiner distributivo S di ordine minore od eguale a 3^5 è regolare.*

Confrontando il lemma 4.2 di [**6**] con il th. 5.3 di [**7**], si può notare che il sistema $T(4)$ di [**7**] è isomorfo ad H. Pertanto, in base al th. 5.3. di [**7**], il sistema S è isomorfo ad un prodotto diretto di sistemi di Steiner, ciascuno dei quali è H o uno spazio affine su $GF(3)$. Poichè questi ultimi sono notoriamente regolari, per il lemma 4 il sistema S è prodotto diretto di sistemi regolari e quindi è regolare ([**1**], pagg. 94-96). Segue la tesi.

Bibliografia

[**1**] R. H. Bruck, *What is a loop?*, M.A.A. Studies in Mathematics **2** (1963), 59-99.

[**2**] P. M. Cohn, *Universal algebra*, Harper and Row, New York 1965.

[**3**] J. Doyen, X. Hubaut e M. Vandensavel, *Ranks od Incidence Matrices of Steiner Triple Systems*, Math. Z. **163** (1978), 251-258.

[**4**] G. Ferrero, *Gruppi di Steiner e sistemi fini*, Matematiche (Catania) (1) **27** (1972), 167-190.

[**5**] V. M. Galkin, *Finite distributive quasigroups*, Math. Zametki **24** (1978), 39-41 (in russo).

[**6**] M. Hall jr., *Automorphisms of Steiner triple systems*, IBM J. Res. Develop. **4** (1960), 460-472.

[**7**] T. Kepka, *Distributive Steiner quasigroups of order* 3^5, Comm. Math. Univ. Carolinae (2) **19** (1978), 309-401.

[**8**] L. Teirlinck, *Planes and hyperplanes of 2-coverings*, Bull. Soc. Math. Belg. **29** (1978), 73-81.

Summary

We show that all distributive Steiner triple systems of order less or equal to 3^5 are regular.

* * *