Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 431-441

VITTORIO MANGIONE (*)

Sulle connessioni che conservano la divergenza dei campi vettoriali covarianti (**)

1 - Introduzione

Nei lavori $[3]_{1,2}$ è stata considerata, su una varietà riemanniana V, la classe $\mathscr{D}$ delle connessioni per le quali la divergenza generalizzata dei campi vettoriali contravarianti coincide con la divergenza classica.

Per i campi covarianti appaiono naturali due diverse generalizzazioni. Mentre la prima risulta legata alla definizione data nel caso contravariante, la seconda è essenzialmente nuova e conduce alla considerazione della classe di connessioni $\overline{\mathscr{D}}$, del tutto analoga a $\mathscr{D}$. Interessante è anche la classe $\tilde{\overline{\mathscr{D}}}$ delle connessioni per le quali le due generalizzazioni di cui sopra coincidono.

Viene anche introdotta la classe $\Delta = \mathscr{D} \cap \overline{\mathscr{D}}$ delle connessioni che conservano la divergenza di un qualunque campo vettoriale, sia nella forma controvariante che covariante e, nel secondo caso, indipendentemente dal tipo di generalizzazione scelta.

La nota relazione, che lega una connessione arbitraria $\mathbf{\Lambda}$ alla connessione di Levi-Civita (n. 2), consente di pervenire a caratterizzazioni delle classi $\overline{\mathscr{D}}$, $\tilde{\overline{\mathscr{D}}}$, Δ, (Teoremi $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$, n. 4). Viene inoltre osservato come alcune classi di connessioni, note nella letteratura, siano contenute nelle classi qui introdotte (Corollario $\mathbf{C}_2$).

I risultati del n. **5** mettono in luce le relazioni tra le classi $\overline{\mathscr{D}}$, $\tilde{\overline{\mathscr{D}}}$, Δ e le classi delle connessioni semi-metriche (metriche), semisimmetriche (simmetriche), di H. Weyl, di Levi-Civita generalizzate nel senso di G. B. Rizza.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G. N. S. A. G. A. (C. N. R.). — Ricevuto: 1-VII-1980.

La considerazione di opportuni omomorfismi dello spazio $\mathscr{T}^1_2$ dei campi di tensori di tipo $(1, 2)$, alcuni già noti ($\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$, lavoro [**3**]$_2$), altri qui introdotti per la prima volta ($\overline{\boldsymbol{\omega}}$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ n. **6**), consente di ottenere forme generali di rappresentazione per le connessioni delle classi $\overline{\mathscr{D}}$, $\tilde{\mathscr{D}}$, $\boldsymbol{\Delta}$ (Teorema $\mathbf{T}_{10}$, n. **7**). Da queste derivano, sempre al n. **7**, altri teoremi di rappresentazione, relativi ad alcune sottoclassi notevoli.

Il lavoro termina con un altro teorema di rappresentazione, di struttura un po' diversa (Teorema $\mathbf{T}_{11}$), e con varie osservazioni.

In conclusione, con la presente nota le ricerche nella linea iniziata nel lavoro [**3**]$_1$ possono ormai ritenersi complete.

2 - Struttura riemanniana e connessioni

Sia V una varietà riemanniana di dimensione $n \geqslant 2$ e classe C^t, $t \geqslant 2$ (1).

Indicato con $\mathscr{T}^r_s$ lo spazio vettoriale dei campi tensoriali di tipo (r, s), sia g il campo simmetrico di $\mathscr{T}^0_2$ di classe C^1 che determina la struttura riemanniana di V e G il campo simmetrico di $\mathscr{T}^2_0$, definito dalla

$$c^1_1(g \otimes G) = \delta \ (^2) . \tag{1}$$

Siano poi $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ gli *omomorfismi di simmetrizzazione, emisimmetrizzazione* di $\mathscr{T}^1_2$ ed $\boldsymbol{\alpha}$ l'*isomorfismo involutorio* dato dalla $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}$ (3). Interviene nel seguito anche l'isomorfismo $\boldsymbol{\gamma}$ di $\mathscr{T}^1_2$, definito da $\boldsymbol{\gamma} L = c^2_2\big(c^1_1(g \otimes L) \otimes G\big)$ ([**4**]$_1$, p. 165).

Come è noto, ad ogni connessione $\boldsymbol{\Lambda}$ di V corrispondono biunivocamente due campi di $\mathscr{T}^1_2$. Il primo, simmetrico, indicato con Σ si ottiene per differenza fra la connessione simmetrica associata a $\boldsymbol{\Lambda}$ e la connessione di Levi-Civita $\overset{\circ}{\Gamma}$; il secondo, emisimmetrico, indicato con T è la *torsione* di $\boldsymbol{\Lambda}$ ([**3**]$_1$, n. **3**). Conviene indicare con D, $\overset{\circ}{D}$ gli ordinari operatori di derivazione covariante relativi, rispettivamente, ad una arbitraria connessione $\boldsymbol{\Lambda}$, alla connessione di Levi-Civita $\overset{\circ}{\Gamma}$.

Ciò premesso, la accennata decomposizione di una connessione arbitraria $\boldsymbol{\Lambda}$ conduce alla *relazione*

$$c^1_1 DG = c^1_1\big(c^1_1(\Sigma + T) \otimes G\big) + c^1_1 c^1_1(G \otimes \Sigma) . \tag{2}$$

---

(1) Per le generalità sulle varietà riemanniane, ved. p. es. [**2**], [**5**], [**6**], [**7**].

(2) Il simbolo c^i_j indica contrazione ([**1**]$_1$, p. 45; [**2**], p. 22) e δ è il classico campo di Kronecker di $\mathscr{T}^1_1$.

(3) Indotti in $\mathscr{T}^1_2$ dagli analoghi omomorfismi di $\mathscr{T}^0_2$.

Ne segue l'*osservazione*

O$_1$. *Due qualunque delle condizioni*

$$\text{(i)}\ c_1^1 DG = 0\,, \qquad \text{(ii)}\ c_1^1(\Sigma + T) = 0\,, \qquad \text{(iii)}\ c_1^1 c_1^1(G \otimes \Sigma) = 0\,,$$

implicano la rimanente.

Intervengono nel seguito connessioni *semi-metriche* (in particolare *metriche*), connessioni *semisimmetriche* (in particolare *simmetriche*) e connessioni *della classe* $\mathscr{L}$ (4).

Si osservi che, per le connessioni $\mathbf{\Lambda}$ semi-metriche, della classe $\mathscr{L}$, sussistono, rispettivamente, le *relazioni*

$$c_1^1 c_1^1(G \otimes \Sigma) = -2c_1^1(G \otimes c_1^1 T) + \frac{2-n}{2}\, c_1^1(G \otimes \boldsymbol{u})\,, \tag{3}$$

$$c_1^1 c_1^1(G \otimes \Sigma) = 0\,, \tag{4}$$

essendo $\boldsymbol{u}$ il campo covariante della connessione semi-metrica.

Alle (3) si perviene tenendo presente la (10) di [**3**]$_1$; la (4) è immediata conseguenza della definizione.

Intervengono anche le connessioni della *classe* $\mathscr{N}$, caratterizzate da $c_1^1 T = 0$ ([**3**]$_3$, p. 149) e le connessioni della *classe* $\mathscr{D}$, caratterizzate da $c_1^1(\Sigma + T) = 0$ ([**3**]$_{1,2}$).

3 - Divergenze generalizzate. Classi $\mathscr{D}$, $\bar{\mathscr{D}}$, $\tilde{\mathscr{D}}$, Δ

Sia $\boldsymbol{v}$ un campo di $\mathscr{T}_1^0$, di classe C^1. Si considerino gli invarianti

$$\operatorname{div}_{\mathbf{\Lambda}} \boldsymbol{v} = c_1^1 c_1^1 D(G \otimes \boldsymbol{v})\,, \qquad \overline{\operatorname{div}}_{\mathbf{\Lambda}} \boldsymbol{v} = c_1^1 c_1^1(G \otimes D\boldsymbol{v})\,. \tag{5}$$

Si tratta di due diverse « divergenze generalizzate ». Infatti risulta $\operatorname{div}_{\overset{\circ}{\Gamma}} \boldsymbol{v} = \overline{\operatorname{div}}_{\overset{\circ}{\Gamma}} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \boldsymbol{v}$, l'ultimo simbolo denotando la divergenza di $\boldsymbol{v}$ in senso classico ([**6**], p. 7).

Nel lavoro [**3**]$_1$ è stata introdotta una « divergenza generalizzata » (Λ-diver-

---

(4) Per le definizioni e le proprietà delle classi di connessioni accennate, si veda p. es. [**5**], pp. 133-134; [**4**]$_{1,2}$, [**3**]$_1$.

genza) per i campi di vettori contraviarianti di V (5). Posto $\boldsymbol{v}^* = c_1^1(G \otimes \boldsymbol{v}) \in \mathscr{T}_0^1$, risulta subito

$$\operatorname{div}_{\Lambda} \boldsymbol{v} = \operatorname{div}_{\Lambda} \boldsymbol{v}^*. \tag{6}$$

Essenzialmente nuova è invece la nozione di divergenza definita dalla $(5)_2$ come dimostrano le *relazioni*

$$\overline{\operatorname{div}}_{\Lambda} \boldsymbol{v} - \operatorname{div} \boldsymbol{v} = - c_1^1 c_1^1 c_1^1 (G \otimes \Sigma \otimes \boldsymbol{v}) , \tag{7}$$

$$\overline{\operatorname{div}}_{\Lambda} \boldsymbol{v} - \operatorname{div}_{\Lambda} \boldsymbol{v} = - c_1^1 c_1^1 (DG \otimes \boldsymbol{v}) , \tag{8}$$

alle quali si perviene facilmente, tenendo conto della (10) di $[\mathbf{3}]_2$.

Ciò premesso, si osservi che, in virtù della (6), la classe delle connessioni per le quali la divergenza di un arbitrario campo di vettori covarianti, secondo la definizione $(5)_1$, coincide con la divergenza classica, è precisamente la *classe* $\mathscr{D}$ del lavoro $[\mathbf{3}]_1$.

A questo punto, con riferimento alla definizione $(5)_2$, è naturale introdurre la *classe* $\overline{\mathscr{D}}$ delle connessioni per le quali risulti, per un qualunque campo di vettori covarianti $\boldsymbol{v}$ su V, $\overline{\operatorname{div}}_{\Lambda} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \boldsymbol{v}$.

È anche interessante introdurre la *classe* $\tilde{\mathscr{D}}$ delle connessioni, per le quali, le due divergenze generalizzate, definite dalle (5) in relazione ai campi covarianti, coincidono ($\overline{\operatorname{div}}_{\Lambda} \boldsymbol{v} = \operatorname{div}_{\Lambda} \boldsymbol{v}$).

Infine, le connessioni che conservano la divergenza dei campi vettoriali, sia nella forma contravariante che covariante, in quest'ultimo caso indipendentemente dal tipo di divergenza generalizzata scelto, costituiscono la *classe* $\Delta = \mathscr{D} \cap \overline{\mathscr{D}}$.

4 - Teoremi di caratterizzazione

Una caratterizzazione delle connessioni della classe $\mathscr{D}$ è stata ricordata al n. **2**; per le altri classi sussistono i *teoremi*

$\mathbf{T}_1$. *Se* Λ *appartiene a* $\overline{\mathscr{D}}$, *allora è* $c_1^1 c_1^1 (G \otimes \Sigma) = 0$; *e viceversa.*

$\mathbf{T}_2$. *Se* Λ *appartiene a* $\tilde{\mathscr{D}}$, *allora è* $c_1^1 DG = 0$; *e viceversa.*

$\mathbf{T}_3$. *Se* Λ *appartiene a* Δ, *allora sussistono due qualunque delle condizioni* (i), (ii), (iii) *del* n. **2**; *e viceversa.*

---

(5) Ved. $[\mathbf{3}]_1$, p. 103.

Le dimostrazioni sono immediata conseguenza delle (7), (8) e dell'osservazione $\mathbf{O}_1$ del n. **2**.

Dai teoremi $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$ discendono alcuni corollari.

$\mathbf{C}_1$. *Sussiste la relazione* $\Delta = \mathscr{D} \cap \overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D} \cap \widetilde{\mathscr{D}} = \overline{\mathscr{D}} \cap \widetilde{\mathscr{D}}$.

$\mathbf{C}_2$. *Le connessioni metriche appartengono alla classe* $\widetilde{\mathscr{D}}$; *le connessioni della classe* $\mathscr{L}$ *appartengono alla classe* $\overline{\mathscr{D}}$. *Le connessioni metriche della classe* $\mathscr{L}$ *appartengono alla classe* Δ.

$\mathbf{C}_3$. *Se* Λ *appartiene a* Δ, *i campi di vettori* Λ*-solenoidali di* V *coincidono con i campi di vettori solenoidali. In particolare, se* Λ *è anche simmetrica, i campi di vettori* Λ*-armonici di* V *coincidono con i campi di vettori armonici.*

$\mathbf{C}_1$ è immediato. Per $\mathbf{C}_2$ si noti che, se Λ è una connessione metrica, risulta $DG = 0$, e viceversa. L'ultima affermazione di $\mathbf{C}_2$ è immediata conseguenza di $\mathbf{C}_1$. Per stabilire $\mathbf{C}_3$ basta ricordare che i campi armonici sono i campi solenoidali ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) e irrotazionali ($\boldsymbol{\varepsilon} \mathring{D} \boldsymbol{v} = 0$) e tener conto del teorema $\mathbf{T}_1$ del lavoro [**3**]$_1$.

5 - Altri risultati

I risultati che seguono mettono in relazione alcune classi di connessioni, note nella letteratura, con le classi $\overline{\mathscr{D}}$, $\widetilde{\mathscr{D}}$, Δ, introdotte al n. **3**.

$\mathbf{T}_4$. *La classe delle connessioni metriche coincide con la classe delle connessioni semi-metriche che appartengono a* $\widetilde{\mathscr{D}}$.

$\mathbf{T}_5$. *La classe delle connessioni metriche che appartengono a* Δ *coincide con la classe delle connessioni metriche che appartengono ad* $\mathscr{N}$.

$\mathbf{T}_6$. *In ciascuna delle classi* $\mathscr{D}$, $\widetilde{\mathscr{D}}$, *l'unica connessione di Weyl è la connessione di Levi-Civita. Lo stesso accade per la classe* $\overline{\mathscr{D}}$, *purchè* $n \neq 2$.

$\mathbf{T}_7$. *La classe* $\mathscr{L} \cap \Delta$ *è contenuta nella classe* $\mathscr{N} \cap \Delta$.

$\mathbf{T}_8$. *Le condizioni equivalenti*

$$4c_1^1 \Sigma = (2 + n)\, \boldsymbol{u}\,, \qquad 4c_1^1 T = (2 - n)\, \boldsymbol{u} \tag{9}$$

sono necessarie e sufficienti perchè una connessione semi-metrica (relativamente al campo $\boldsymbol{u}$*) appartenga alla classe* $\overline{\mathscr{D}}$.

$\mathbf{T}_9$. *Le condizioni*

$$c_2^1(1 + \gamma)\, \Sigma = \tfrac{1}{2}\,(n - 1)\, \boldsymbol{u}, \qquad c_2^1(1 + \gamma)\Sigma = 0 \tag{10}$$

sono necessarie e sufficienti perchè, rispettivamente, una connessione semisim-

metrica (relativamente al campo $\boldsymbol{u}$), una connessione di $\mathscr{N}$, appartengano alla classe $\tilde{\mathscr{D}}$.

Per stabilire il teorema $\mathbf{T}_4$ conviene notare che, se $\boldsymbol{\Lambda}$ è semi-metrica, relativamente al campo $\boldsymbol{u}$, si ha $DG = \boldsymbol{u} \otimes G$; e viceversa (6). Pertanto, se $\boldsymbol{\Lambda}$ è semi-metrica e appartiene a $\tilde{\mathscr{D}}$, in virtù del teorema $\mathbf{T}_2$ segue $\boldsymbol{u} = 0$; e cioè $\boldsymbol{\Lambda}$ è una connessione metrica. La parte inversa è immediata a causa del corollario $\mathbf{C}_2$.

Il teorema $\mathbf{T}_5$ si stabilisce senza difficoltà tenendo conto della (16) del lavoro $[\mathbf{3}]_1$, delle condizioni che caratterizzano le classi $\mathscr{D}$ ed $\mathscr{N}$ (n. **2**) e dei corollari $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$.

È bene ora ricordare che le *connessioni di Weyl* sono precisamente le connessioni semi-metriche e simmetriche ([**5**], p. 133) e che la *connessione di Levi-Civita* $\mathring{\Gamma}$ è l'unica connessione metrica e simmetrica. A questo punto è facile pervenire al teorema $\mathbf{T}_6$, utilizzando nel primo caso la (29) di $[\mathbf{3}]_1$, nel secondo caso il teorema $\mathbf{T}_4$ e nel terzo caso la relazione (3) ed il teorema $\mathbf{T}_1$.

Il teorema $\mathbf{T}_7$ è immediata conseguenza delle condizioni che caratterizzano le classi $\mathscr{L}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{N}$.

Per il teorema $\mathbf{T}_8$, si noti anzitutto che, in virtù della (15) di $[\mathbf{3}]_1$, per una connessione semi-metrica (relativamente ad un campo $\boldsymbol{u}$) le condizioni (9) sono equivalenti. Ciò premesso, la relazione (3) ed il teorema $\mathbf{T}_1$ conducono subito all'asserto.

Infine il teorema $\mathbf{T}_9$ segue subito dalla (2) tenendo presenti le condizioni che caratterizzano le classi che intervengono e la definizione dell'isomorfismo $\boldsymbol{\gamma}$ (n. **2**).

6 - Omomorfismi $\overline{\boldsymbol{\omega}}$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$

Al fine di ottenere formule di rappresentazione per le connessioni delle classi introdotte al n. **3**, conviene considerare alcuni omomorfismi dello spazio vettoriale $\mathscr{T}^1_2$.

Siano $\overline{\boldsymbol{\omega}}$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ gli omomorfismi definiti, per un qualunque campo L di $\mathscr{T}^1_2$, da

$$\overline{\boldsymbol{\omega}} L = \frac{1}{n}\, g \otimes c^1_1 c^1_1 (G \otimes L)\,; \qquad \tilde{\boldsymbol{\omega}} L = \frac{1}{n}\, g \otimes c^1_1 (c^1_1 L \otimes G)\,. \tag{11}$$

Si riconosce subito che $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ *e* $n\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ *sono omomorfismi idempotenti.*

---

(6) Basta derivare covariantemente la (1).

Dalle (11) seguono subito le *relazioni*

$$\sigma\bar{\omega} = \bar{\omega}\sigma = \bar{\omega}\,, \qquad \sigma\tilde{\omega} = \tilde{\omega}\,, \tag{12}$$

$$n\tilde{\omega}\,\bar{\omega} = \bar{\omega}\,, \qquad \bar{\omega}\,\tilde{\omega} = \tilde{\omega}\,. \tag{13}$$

Dalla (13) segue che l'*omomorfismo* $(n/(n+1))(\tilde{\omega}+\bar{\omega})$ *è idempotente.*

Tenuto poi conto delle definizioni e delle proprietà degli omomorfismi $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$ ([**3**]$_2$, n. **3**) si stabiliscono senza difficoltà le *relazioni*

$$\bar{\omega}\omega\bar{\omega} = \frac{1}{n^2}\,\bar{\omega}\,, \tag{14}$$

$$\bar{\omega}\omega^*\bar{\omega} = \frac{n^2-1}{n^2}\,\bar{\omega}\,, \qquad \bar{\omega}\Omega\bar{\omega} = \frac{(n-1)(n+2)}{n}\,\bar{\omega}\ (^7)\,. \tag{15}$$

Si considerino infine gli *omomorfismi*

$$\varphi = \frac{n^2}{n^2-1}\,\bar{\omega}\omega^*, \qquad \psi = \frac{n}{(n-1)(n+2)}\,\bar{\omega}\Omega\ (^8)\,. \tag{16}$$

Dalle (15) segue subito che $\boldsymbol{\varphi}$ *e* $\boldsymbol{\psi}$ *sono omomorfismi idempotenti di* $\mathscr{T}^1_2$; *inoltre* $\boldsymbol{\psi}$ *è permutabile con* $\boldsymbol{\sigma}$ [9].

7 - Teoremi di rappresentazione

In questo numero C, S, E indicano arbitrari campi di $\mathscr{T}^1_2$, simmetrico il secondo, emisimmetrico il terzo, $\boldsymbol{u}$ denota un arbitrario campo di vettori covarianti ed $\boldsymbol{u}^* = c^1_1(G\otimes \boldsymbol{u})$.

Ciò premesso, sussistono questi risultati.

T$_{10}$. *Le connessioni della classe* $\bar{\mathscr{D}}$, $\tilde{\mathscr{D}}$ *sono, tutte e sole, rappresentate da*

$$\Lambda = \overset{\circ}{\Gamma} + \bar{\omega}^* C\,, \qquad \Lambda = \overset{\circ}{\Gamma} + \Big(\frac{n}{n+1}\,(\bar{\omega}+\tilde{\omega})\Big)^* C \tag{17}$$

---

(7) In generale, se $\boldsymbol{\theta}$ è un omomorfismo di $\mathscr{T}^1_2$, si pone $\boldsymbol{\theta}^* = 1 - \boldsymbol{\theta}$.

(8) Per ipotesi è $n \neq 1$ (n. **2**).

(9) Per l'ultima affermazione basta tener conto della $(12)_1$ e della (6) di [**3**]$_2$.

rispettivamente. Le connessioni della classe $\boldsymbol{\Delta}$ *sono, tutte e sole, rappresentate da*

$$\boldsymbol{\Lambda} = \overset{\circ}{\Gamma} + \boldsymbol{\omega}^* \boldsymbol{\varphi}^* C \, . \tag{18}$$

$\mathbf{C}_4$. *Le connessioni della classe* $\mathscr{N}$, *le connessioni semisimmetriche (relativamente ad un campo* $\boldsymbol{u}$), *appartenenti alla classe* $\overline{\mathscr{D}}$, *alla classe* $\widetilde{\mathscr{D}}$, *ordinatamente, sono, tutte e sole, rappresentate da*

$$\boldsymbol{\Lambda} = \overset{\circ}{\Gamma} + \overline{\boldsymbol{\omega}}^* S + \boldsymbol{\Omega} E \, , \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \overset{\circ}{\Gamma} + \Big(\frac{n}{n+1} \, (\overline{\boldsymbol{\omega}} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}) \Big)^* S + \boldsymbol{\Omega} E \, , \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\Lambda} = \overset{\circ}{\Gamma} + \overline{\boldsymbol{\omega}}^* S + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u} \otimes \delta) \, , \\ \boldsymbol{\Lambda} = \overset{\circ}{\Gamma} + \Big(\frac{n}{n+1} \, (\overline{\boldsymbol{\omega}} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}) \Big)^* S + \frac{1}{2} \, \frac{n-1}{n+1} \, g \otimes \boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u} \otimes \delta) \, . \end{gathered} \tag{20}$$

In particolare, le connessioni simmetriche della classe $\overline{\mathscr{D}}$, *della classe* $\widetilde{\mathscr{D}}$ *sono rappresentate dalle* (20) *con* $\boldsymbol{u} = 0$.

$\mathbf{C}_5$. *Le connessioni della classe* $\mathscr{N}$ *appartenenti alla classe* $\boldsymbol{\Delta}$ *sono, tutte e sole, rappresentate da*

$$\boldsymbol{\Lambda} = \overset{\circ}{\Gamma} + \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\psi}^* S + \boldsymbol{\Omega} E \, . \tag{21}$$

In particolare, le connessioni simmetriche di $\boldsymbol{\Delta}$ *sono rappresentate dalla* (21) *con* $E = 0$.

$\mathbf{C}_6$. *Le connessioni semisimmetriche (relativamente ad un campo* $\boldsymbol{u}$) *appartenenti alla classe* $\boldsymbol{\Delta}$ *sono, tutte e sole, rappresentate dalla* $(20)_1$ *con*

$$\boldsymbol{u} = \frac{2}{n-1} \, c_2^1 (1 + \boldsymbol{\gamma}) \, \overline{\boldsymbol{\omega}}^* S \, .$$

Sussiste anche il teorema

$\mathbf{T}_{11}$. *Le connessioni semi-metriche (relativamente ad un campo* $\boldsymbol{u}$) *appartenenti a* $\mathscr{D}$ *sono, tutte e sole, rappresentate da*

$$\boldsymbol{\Lambda} = \overset{\circ}{\Gamma} + 2 \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\gamma} E + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u} \otimes \delta) - \tfrac{1}{2} c_1^1 (G \otimes \boldsymbol{u} \otimes g) + E \, , \tag{22}$$

con $\boldsymbol{u} = \big(4/(2-n)\big)\, c_1^1 E$, *se* $n \neq 2$. *Nel caso* $n = 2$ *la formula di rappresentazione è ancora la* (22) *con* $\boldsymbol{\Omega} E$ *in luogo di* E *ed* $\boldsymbol{u}$ *arbitrario.*

Infine, tenuto presente il corollario $\mathbf{C}_2$ del n. 4 è immediato riconoscere che *le connessioni metriche della classe* $\boldsymbol{\Delta}$ *coincidono con le connessioni metriche della classe* $\mathscr{D}$ *e pertanto sono rappresentate dalla* (15) *di* $[\mathbf{3}]_2$. Analogamente, *le connessioni della classe* $\mathscr{L}$ *appartenenti alla classe* $\boldsymbol{\Delta}$ *coincidono con le connessioni della classe* $\mathscr{L}$ *appartenenti alla classe* $\mathscr{D}$ *e pertanto sono rappresentate dalla* (14) *di* $[\mathbf{3}]_2$.

8 - Dimostrazioni

Per stabilire $\mathbf{T}_{10}$ si noti anzitutto che *se una connessione* $\boldsymbol{\Lambda}$ *appartiene alla classe* $\mathscr{D}$, $\overline{\mathscr{D}}$, $\widetilde{\mathscr{D}}$ *si ha, rispettivamente,*

$$(23) \qquad \boldsymbol{\omega}(\Sigma + T) = 0\,, \qquad \overline{\boldsymbol{\omega}}(\Sigma + T) = 0\,, \qquad (\overline{\boldsymbol{\omega}} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}})(\Sigma + T) = 0\,,$$

e viceversa. Questo risultato discende subito tenendo presenti le definizioni degli omomorfismi $\boldsymbol{\omega}$, $\overline{\boldsymbol{\omega}}$, $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$, il n. **7** del lavoro $[\mathbf{3}]_1$, i teoremi $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ e la relazione (2).

Ciò premesso, se $\boldsymbol{\Lambda}$ è data dalla $(17)_1$, si ha $\Sigma + T = \overline{\boldsymbol{\omega}}^* C$ e la $(23)_2$ è soddisfatta essendo $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ idempotente (n. **6**); dunque $\boldsymbol{\Lambda}$ appartiene a $\overline{\mathscr{D}}$. Inversamente, se $\boldsymbol{\Lambda}$ appartiene a $\overline{\mathscr{D}}$, dalla $(23)_2$, in virtù di un noto lemma algebrico relativo agli omomorfismi idempotenti, si perviene a $\Sigma + T = \overline{\boldsymbol{\omega}}^* C$ con C arbitrario e cioè alla $(17)_1$. In modo del tutto analogo si prova la proposizione relativa alle connessioni di $\widetilde{\mathscr{D}}$, sfruttando la $(23)_3$ e l'idempotenza di $\big(n(n+1)\big)(\overline{\boldsymbol{\omega}} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}})$ (n. **6**).

Se $\boldsymbol{\Lambda}$ è della forma (18), si ha $\Sigma + T = \boldsymbol{\omega}^* \boldsymbol{\varphi}^* C$ e la $(23)_1$ è soddisfatta, essendo $\boldsymbol{\omega}$ idempotente $\big([\mathbf{3}]_2$, n. **3**$\big)$; dunque $\boldsymbol{\Lambda}$ appartiene a $\mathscr{D}$. Ma, in virtù dell'idempotenza di $\boldsymbol{\varphi}$ (n. **6**), è soddisfatta anche la $(23)_2$. Infatti

$$\overline{\boldsymbol{\omega}}(\Sigma + T) = \overline{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega}^* \boldsymbol{\varphi}^* C = \frac{n}{n-1}\, \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^* C = 0\,.$$

Dunque $\boldsymbol{\Lambda}$ appartiene anche a $\overline{\mathscr{D}}$ e quindi a $\boldsymbol{\Delta} = \mathscr{D} \cap \overline{\mathscr{D}}$. Inversamente, se $\boldsymbol{\Lambda}$ appartiene a $\boldsymbol{\Delta}$, appartiene a $\mathscr{D}$ e, in virtù del lemma accennato, dalla $(23)_1$ si trae $\Sigma + T = \boldsymbol{\omega}^* \overline{C}$, con $\overline{C}$ arbitrario campo di $\mathscr{T}_2^1$. Ma poichè $\boldsymbol{\Lambda}$ appartiene anche a $\overline{\mathscr{D}}$ deve essere soddisfatta la $(23)_2$ e quindi $\overline{C}$ deve soddisfare alla condizione $\overline{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega}^* \overline{C} = 0$, cioè alla $\boldsymbol{\varphi}\overline{C} = 0$. Utilizzando ancora il lemma in relazione all'omomorfismo idempotente $\boldsymbol{\varphi}$ (n. **6**), si perviene alla (18).

Per dimostrare il corollario $\mathbf{C}_4$ conviene osservare che, posto $C = S + E$ e tenuta presente la (12) del n. **6**, dalla (17) segue rispettivamente

$$(24) \qquad \Sigma = \overline{\boldsymbol{\omega}}^* S\,, \qquad \Sigma = \Big(\frac{n}{n+1}\,(\overline{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}})\Big)^* S - \frac{n}{n+1}\,\tilde{\boldsymbol{\omega}} E\,,$$

mentre in entrambi i casi risulta $T = E$. Si ricordi poi che per le connessioni della classe $\mathscr{N}$ e per quelle semisimmetriche la torsione è, rispettivamente della forma $\boldsymbol{\Omega} E$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u} \otimes \delta)$. È ormai facile pervenire alle (19), (20). Inversamente, tenuta presente la (24), si riconosce subito che le connessioni (19), (20) appartengono alle classi volute. Infine, il caso particolare delle connessioni simmetriche è immediato.

Per stabilire il corollario $\mathbf{C}_5$ si noti anzitutto che se $\boldsymbol{\Lambda}$ è della forma (21), si ha $\Sigma = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\psi}^* S$ e $T = \boldsymbol{\Omega} E$, onde $\boldsymbol{\Lambda}$ appartiene alla classe $\mathscr{N}$ ($[\mathbf{3}]_3$, teorema $\mathbf{T}_1$). Poichè $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Omega} = 0$ ($[\mathbf{3}]_2$, (7)) è soddisfatta la $(23)_1$, onde $\boldsymbol{\Lambda}$ appartiene a $\mathscr{D}$. Infine tenendo presente la relazione $\overline{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ (n. **6**), la definizione di $\boldsymbol{\psi}$ e la sua idempotenza, si riconosce che anche la $(23)_2$ è soddisfatta, onde $\boldsymbol{\Lambda}$ appartiene a $\overline{\mathscr{D}}$. In conclusione, $\boldsymbol{\Lambda}$ appartiene ad $\mathscr{N}$ e a $\boldsymbol{\Delta}$. Inversamente, poichè $\boldsymbol{\Lambda}$ appartiene ad $\mathscr{N}$, la sua torsione è necessariamente della forma $\boldsymbol{\Omega} E$. Ma $\boldsymbol{\Lambda}$ appartiene anche a $\mathscr{D}$, onde è soddisfatta la $(23)_1$, che si riduce a $\boldsymbol{\omega}\Sigma = 0$, da cui, per il lemma algebrico precedentemente ricordato $\Sigma = \boldsymbol{\omega}^* C' = \boldsymbol{\Omega} S'$ ($[\mathbf{3}]_2$, teorema $\mathbf{T}_1$). Infine dato che $\boldsymbol{\Lambda}$ appartiene anche a $\overline{\mathscr{D}}$ è soddisfatta la $(23)_2$, che, essendo $\overline{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ si riduce a $\overline{\boldsymbol{\omega}}\Sigma = \overline{\boldsymbol{\omega}} S' = 0$, cioè a $\boldsymbol{\psi} S' = 0$. Ora, applicando il lemma accennato all'operatore idempotente $\boldsymbol{\psi}$, che è permutabile con $\boldsymbol{\sigma}$, si deduce $S' = \boldsymbol{\psi}^* S$ e $\Sigma = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\psi}^* S$. In conclusione si perviene alla (21). Poichè l'osservazione concernente le connessioni simmetriche è immediata, il corollario $\mathbf{C}_5$ è dimostrato.

La dimostrazione di $\mathbf{C}_6$ si ottiene subito tenendo conto che le connessioni semisimmetriche di $\overline{\mathscr{D}}$ sono rappresentate dalla $(20)_1$ e che, in questo ambito, quelle che appartengono anche a $\tilde{\overline{\mathscr{D}}}$ sono caratterizzate dalla $(10)_1$ del teorema $\mathbf{T}_9$.

Infine, per dimostrare il teorema $\mathbf{T}_{11}$ conviene osservare che, in base alla (10) del lavoro $[\mathbf{3}]_1$, le connessioni semi-metriche $\boldsymbol{\Lambda}$, relativamente ad un campo $\boldsymbol{u}$, sono, tutte e sole, rappresentate dalla (22) e che E è la torsione di $\boldsymbol{\Lambda}$. Se $n \neq 2$, in virtù della $(9)_2$ del teorema $\mathbf{T}_8$ (n. **5**) quando $\boldsymbol{u}$ è della forma indicata, $\boldsymbol{\Lambda}$ appartiene alla classe $\overline{\mathscr{D}}$, e viceversa. Se invece $n = 2$ la condizione $(9)_2$ diviene $c_1^1 T = 0$, e cioè $\boldsymbol{\omega} T = 0$. Quindi $T = \boldsymbol{\omega}^* C' = \boldsymbol{\Omega} E$ ($[\mathbf{3}]_2$, teorema $\mathbf{T}_1$) e non vi sono vincoli su $\boldsymbol{u}$.

Bibliografia

[1] N. BOURBAKI: [•]$_1$ *Algebre* 3, Hermann, Paris 1958; [•]$_2$ *Algebre* 8, Hermann, Paris 1958.

[2] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, *Foundations of differential Geometry*, (I), (II), Interscience Publishers, New York 1963.

[3] V. MANGIONE e A. VEZZANI: [•]$_1$ *Due classi di connessioni sulle varietà riemanniane e quasi hermitiane*, Rend. Sem. Mat. Univ. e Polit. Torino **34** (1975-76), 97-110; [•]$_2$ *Teoremi di rappresentazione per le connessioni della classe $\mathscr{D}$ e di alcune sue sottoclassi notevoli*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **2** (1976), 277-285; [•]$_3$ *Sulle connessioni a vettore torsione nullo*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 143-155.

[4] G. B. RIZZA: [•]$_1$ *Connessioni metriche sulle varietà quasi hermitiane*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **1** (1969), 163-181; [•]$_2$ *A set of affine connections of Riemannian and almost Hermitian manifolds*, Simon Stevin **51** (1977), 79-91.

[5] J. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus*, Springer, Berlin 1954.

[6] K. YANO, *Differential Geometry on complex and almost complex spaces*, Clarendon Press, Oxford 1961.

[7] K. YANO and S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*, Princeton Univ. Press, Princeton 1953.

Summary

Let V be a Riemannian manifold and Λ be an affine connection of V. Two different definitions of Λ-divergence for covariant vector fields of V are introduced. Comparing the Λ-divergences with the classical divergence we are led to consider two sets of connections, denoted by $\mathscr{D}$, $\overline{\mathscr{D}}$. The set $\tilde{\mathscr{D}}$ of the connections, such that the two Λ-divergences coincide and the set $\Delta = \mathscr{D} \cap \overline{\mathscr{D}} = \overline{\mathscr{D}} \cap \tilde{\mathscr{D}} = \tilde{\mathscr{D}} \cap \mathscr{D}$ are also studied.

The set $\mathscr{D}$ coincide with a set of connections, studied in a previous paper, where an analogous problem for contravariant vector fields was considered. Characterization and representation theorems for the classes $\overline{\mathscr{D}}$, $\tilde{\mathscr{D}}$, Δ and for some remarkable subsets of those are obtained.

* * *