Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 443-452

EDOARDO BALLICO (*)

Rivestimenti di spazi complessi e q-completezza (**)

Introduzione

Nel primo paragrafo di questo lavoro si dimostra che un rivestimento, anche ad infiniti fogli, di uno spazio complesso q-completo è q-completo. Questo è un classico risultato di K. Stein per gli spazi di Stein, cioè gli spazi 0-completi. Il risultato di K. Stein è stato generalizzato da P. Le Barz in [**8**]. Qui viene adattata al caso q-completo la dimostrazione di [**8**]. Con questo teorema viene generalizzato un mio precedente risultato (vedi $[\mathbf{3}]_1$, teorema 2) sulla q-completezza dei fibrati principali con base q-completa e gruppo strutturale di Stein.

Nel secondo paragrafo si considera un'applicazione olomorfa e finita, cioè propria e a fibre finite, $f\colon X \to Y$ tra spazi complessi. Si dimostra che se Y è q-concavo o una q-corona, allora tale è X. Poi viene studiato un caso importante (f piatta e surgettiva) in cui se X è coomologicamente q-concavo, allora anche Y è coomologicamente q-concavo.

1 – Questo paragrafo è dedicato alla dimostrazione e ad una applicazione del seguente

Teorema 1. *Sia X uno spazio complesso, paracompatto e q-completo; sia $f\colon Z \to X$ un rivestimento non ramificato di X. Allora Z è q-completo.*

La dimostrazione è un adattamento di una dimostrazione di P. Le Barz [**8**] quando X è uno spazio di Stein.

Si può supporre che X e Z siano connessi. Sia p una funzione che definisce la q-completezza di X cioè sia $p \geqslant 0$ una funzione C^∞, strettamente q-convessa

(*) Indirizzo: Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri 7, 56100 Pisa, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 17-VII-1980.

e tale che gli insiemi $\{x \in X: p(x) < c\}$ siano relativamente compatti in X per ogni $c \in \mathbf{R}$. Lo spazio topologico soggiacente a X è metrizzabile; se d' è una metrica su X, allora la metrica $d(x, y) = d'(x, y) + |p(x) - p(y)|$ induce la stessa topologia perchè p è una funzione continua. Inoltre ogni d-palla $B(x, c) = \{y \in X: d(x, y) < c\}$ è relativamente compatta in X. Fissiamo una metrica d su X. Per $x \in X$, con $m(x)$ indichiamo l'estremo superiore dei $c \in \mathbf{R}$ tali che Z è un prodotto su $B(x, c)$ cioè tali che f applica biolomorficamente ogni componente connessa di $f^{-1}(B(x, c))$ su $B(x, c)$.

Se esiste $x \in X$ con $m(x) = +\infty$, f induce un isomorfismo tra X e Z perchè Z è connesso, f è un isomorfismo locale surgettivo e $m(x) = +\infty$ implica che f è iniettiva. Possiamo supporre quindi $0 < m(x) < +\infty$ per ogni punto x di X. Allora m è una funzione positiva e continua su X che, rispetto alla metrica d, è lipschitziana. La funzione m dipende monotonicamente dalla metrica d fissata.

Dimostriamo che esiste una metrica d per cui $\inf_{x \in X} m(x) = 6a > 0$.

Dimostriamolo dapprima quando X è una varietà complessa non singolare. Si può supporre che d sia maggiorata da una distanza su X indotta da una metrica hermitiana h sul fibrato tangente di X. Sia $0 < a(n) = \inf m(x)$ dove l'estremo inferiore è preso tra i punti x di X in cui $p(x) \leqslant n$ cioè su un sottoinsieme compatto di X. Sia $s: X \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile non negativa con $s(x) > 1/a(n+1)$ se $n - 1 \leqslant p(x) \leqslant n$. Per la distanza su X indotta dalla metrica hermitiana $e^s h$ sul fibrato tangente di X si ha $\inf_{x \in X} m(x) > 0$.

Consideriamo ora il caso generale in cui X è uno spazio complesso eventualmente con singolarità. La metrica che cerchiamo dipende solo dalla topologia di X e di Z: si cercano semplicemente aperti opportuni $B(x, 6a)$ tali che, per ogni componente connessa E di $f^{-1}(B(x, 6a))$, la restrizione di f a E sia iniettiva. Quindi possiamo supporre X ridotto. Allora ci si può ridurre al caso non singolare considerando una desingolarizzazione $g: X' \to X$ con g applicazione olomorfa, propria e surgettiva e X' varietà non singolare. Sia $f': Z' \to X'$ il prodotto fibrato di f per g. Allora Z' è un rivestimento di X'. Sia h una metrica hermitiana sul fibrato tangente di X'. Considerando invece di h la metrica $e^s h$ con s funzione differenziabile positiva opportuna, si può supporre che per ogni punto x di X, f' sia triviale su ogni insieme $\{y \in X': d(g^{-1}(x), y) < 6a\}$. Questo permette la costruzione di una distanza su X con la proprietà cercata.

Non è però necessario usare una desingolarizzazione. Sia X uno spazio complesso ridotto. In questo caso il luogo singolare S di X è un sottoinsieme analitico chiuso di X privo di parte interna. Ricordo che si è supposto che X sia connesso. Sia $T := V(\Omega_X^1)$ lo spazio lineare tangente di X e sia h una metrica hermitiana su T (vedi [**1**]). Definiamo una distanza su X nel seguente modo. Dati $x, y \in X$, un cammino regolare che congiunge x ed y è un'applicazione continua $u\colon [0,1] \to X$ tale che

(a) $u(0) = x$, $u(1) = y$;

(b) esistono un numero finito di punti t_i con $t_i < t_{i+1}$, $t_0 = 0$, $t_s = 1$ tali che $u(t) \notin S$ se $t \notin \{t_0, \ldots, t_s\}$;

(c) la restrizione di u all'intervallo aperto (t_i, t_{i+1}) è C^1 ed ha derivata prima limitata.

Definiamo $l(i) = \sup\limits_{b>0} l(u_{[t_i+b,\, t_{i+1}-b]})$ rispetto alla metrica h. $l(i)$ è finito perchè la metrica h è limitata nell'intorno di ogni punto di S. Poniamo $l(u) = \sum\limits_{i=0}^{s-1} l(i)$ e $d(x, y) = \inf l(u)$, dove l'estremo inferiore è preso nell'insieme dei cammini regolari che congiungono x ed y. È chiaro che la distanza d così definita induce su X la topologia naturale. Se consideriamo invece di h la metrica $e^s h$ con s funzione positiva e differenziabile opportuna su X è possibile, come nel caso non singolare, trovare una distanza d per cui $\inf\limits_{x\in X} m(x) > 0$.

Nel seguito fissiamo una distanza d su X che vi induca la topologia naturale, per cui i limitati siano relativamente compatti e per cui si abbia $\inf\limits_{x\in X} m(x) = 6a > 0$.

Definizione 1. *Un a-aperto di Z è una componente connessa di un aperto del tipo $f^{-1}(B(x, a))$.*

Definizione 2. *Siano $x, y \in Z$. Una a-catena tra x ed y è una successione finita $u = \{x = z_0, \ldots, z_i, \ldots, z_s = y\}$ con z_i e z_{i+1} nello stesso a-aperto. La lunghezza di u è per definizione $l(u) = \sum\limits_{i=0}^{s-1} d(f(z_i), f(z_{i+1}))$.*

Si definisce una distanza e su Z prendendo come $e(x, y)$ l'estremo inferiore di $l(u)$ quando u varia tra le a-catene che congiungono x ed y. In questo modo viene definita una distanza su Z con $e(x, y) \geqslant d(f(x), f(y))$. L'unica cosa da verificare è che se x ed y sono due punti distinti di Z con $f(x) = f(y)$, si ha $e(x, y) \neq 0$. Vale infatti il seguente

Lemma 1. *Siano $x, y \in Z$ con $d(f(x), f(y)) < a$ ma non in uno stesso a-aperto. Allora abbiamo $e(x, y) \geqslant 5a$.*

Dim. Se z è nella stessa componente connessa di $f^{-1}(B(f(x), 6a)))$ che contiene x, si ha $e(x, z) = d(f(x), f(y))$. Perciò x ed y sono contenuti in componenti connesse distinte di $f^{-1}(B(f(x), 6a))$. Sia $u = \{z_i\}$ una a-catena che congiunge x ed y. Allora esiste un punto z_i in u con $f(z_i) \notin B(f(x), 5a)$ e quindi si ha $l(u) \geqslant 5a$.

Sia b un punto di X. Definiamo una funzione non negativa $v\colon Z \to \boldsymbol{R}$ tramite $v(z) = e(b, z)$.

Proposizione 1. *La funzione v è tale che*

(a) *se $x, y \in Z$ sono nello stesso a-aperto, allora abbiamo $|v(x) - v(y)| \leq 2a$;*
(b) *per ogni $c \in \boldsymbol{R}$, $Z(c) = \{x \in Z\colon u(z) < c\}$ è relativamente compatto.*

Dim. Il punto (a) discende direttamente dalle proprietà della distanza e. Per verificare la seconda parte basta verificare che se $Z(c)$ è relativamente compatta, allora anche $Z(c + a)$ è relativamente compatto. Sia $t \in Z(c + a)$, $t \notin Z(c)$ e sia $u = \{z_i\}$ una a-catena tra b e t di lunghezza $< c + a$. Sia j l'ultimo indice i per cui $z_i \in Z(c)$. Si ha $d(f(t), f(z_{j+1})) < a$ poichè $e(b, z_{j+1}) > c$. Poichè la catena $\{z_i\}_{i>j}$ che congiunge z_{j+1} e t ha lunghezza $< a$, per il Lemma 1 z_{j+1} e t sono in uno stesso a-aperto e quindi $e(z_{j+1}, t) < a$. Poichè z_j e z_{j+1} sono nello stesso a-aperto, si ha $e(z_j, t) < 2a$. Quindi $Z(c + a)$ è contenuto nell'unione di $Z(c)$ e delle palle $E(z, 2a)$ per la distanza e di raggio $2a$ e di centro $z \in Z(c)$. Poichè $Z(c)$ è relativamente compatto, $Z(c + a)$ è contenuto nell'unione di un numero finito di palle $E(z, 4a)$. Ogni palla $E(z, 4a)$ è relativamente compatto perchè, per il Lemma 1, $E(z, 4a)$ è contenuta in una sola componente connessa di $f^{-1}(B(f(z), 6a))$.

Lemma 2. *Esiste su Z una funzione C^∞ e non negativa $h\colon Z \to \boldsymbol{R}$ tale che*

(a) *fissato un atlante di X e nell'atlante corrispondente di Z tramite f, la forma di Levi $L(h)$ è limitata sugli insiemi del tipo $f^{-1}(U)$ con U aperto relativamente compatto di X;*

(b) *f è propria.*

Dim. La dimostrazione è identica a quella del lemma 4 di [**8**]; viene riportata per comodità del lettore. Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento localmente finito di X con palle di raggio $< a$ e $\{W_i^m\}$, con $m \in M$ insieme al più numerabile, siano le componenti connesse di $f^{-1}(U_i)$. Sia $a_i^m \in W_i^m$. Su $f^{-1}(U_i)$ consideriamo la funzione localmente costante h_i definita da $h_i(z) = v(a_i^m)$ se $z \in W_i^m$. Sia $\{b_i\}$ una partizione C^∞ dell'unità associata al ricoprimento $\{U_i\}$. Poniamo $h = \sum (b_i \circ f) h_i$. Dimostriamo che h verifica la tesi del Lemma 2. Sia $x \in X$ e siano $U_1, \ldots, U_n$ gli elementi di $\{U_i\}$ che contengono x. Sia $U = U_1 \cap \ldots \cap U_n$ e sia W una componente connessa di $f^{-1}(U)$; sia $z_0 \in W$ con $f(z_0) = x$ e siano m_i gli indici tali che $W_i^{m_i} \cap W$ non è vuoto. Allora su W si ha

$$h(z) = \sum b_i(f(z))\, v(a_i^{m_i}) = \sum_{i=1}^{n} b_i(f(z))\big(v(a_i^{m_i}) - v(z_0)\big) + v(z_0)\,,$$

e poichè $|v(a_i^{m_i}) - v(z_0)| \leqslant 4a$ perchè $a_i^{m_i}$ e z_0 sono in uno stesso $2a$-aperto, si ottiene il punto (a).

Per verificare la seconda affermazione basta dimostrare che $|h - v| \leqslant 2a$ poichè per la Proposizione 1 (b) v è propria. Sia $z \in f^{-1}(U_i)$; si ha

$$|h_i(z) - v(z)| = |v(a_i^{m_i}) - v(z)| \qquad \text{se } z \in W_i^m \text{ e } |v(a_i^m) - v(z)| \leqslant 2a\,,$$

perchè a_i^m e z sono nello stesso a-aperto.

Per concludere la dimostrazione del Teorema 1 è sufficiente trovare $g\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, positiva, C^∞, crescente e tale che $g(p\circ f) + h$ sia strettamente q-convessa poichè $g(p\circ f) + h$ è certamente esaustiva. Questo è possibile con un metodo usato in [**2**] e in [**9**] e che verrà ripreso più dettagliatamente nell'ultima parte della dimostrazione del Teorema 3.

Perciò il Teorema 1 è dimostrato.

Come applicazione consideriamo il seguente

Teorema 2. *Sia X uno spazio complesso q-completo e G un gruppo di Stein. Ogni fibrato principale P di base X e gruppo strutturale G è q-completo.*

Questo teorema è stato dimostrato in [**3**]$_1$, teorema 2, quando G ha un numero finito di componenti connesse. Questa ipotesi interveniva nella parte (e) della dimostrazione del teorema 2 di [**3**]$_1$ quando si riduce la dimostrazione del teorema al caso in cui G è connesso. In generale la componente connessa dell'identità G_0 è un sottogruppo chiuso invariante di G. Per [**6**] (theorem 3.4.4, pag. 44) la fibrazione principale $P \to X$ si fattorizza tramite una fibrazione principale localmente banale $P \to H$ con gruppo strutturale G_0 ed una fibrazione principale localmente banale $H \to X$ con gruppo G/G_0, cioè un rivestimento non ramificato di X. Il Teorema 1 permette quindi la riduzione al caso in cui G è connesso e il Teorema 2 viene così dimostrato.

2 - Dimostriamo il seguente

Teorema 3. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione olomorfa finita tra spazi complessi con Y spazio q-concavo. Allora X è uno spazio q-concavo.*

Dim. La dimostrazione è un adattamento e una semplificazione del caso q-completo e q-concavo che ho trattato in [**3**]$_2$. Questa dimostrazione, con ovvi cambiamenti di segno, vale anche nel caso q-completo e q-convesso. La dimostrazione di [**3**]$_2$ non si estende, per quanto mi risulta, trivialmente al caso q-concavo.

Il fascio $f_*(O_X)$ è un O_Y-fascio coerente di algebre. Sia $E := \boldsymbol{V}(f_*(O_X))$

$:= \operatorname{Specan}\big(S(f_*(O_X))\big)$ lo spazio lineare su Y associato a $f_*(O_X)$. X è isomorfo a $\operatorname{Specan}(f_*(O_X))$. L'omomorfismo naturale di O_Y-algebre $S(f_*(O_X)) \to f_*(O_X)$ indotto dall'applicazione identica di $f_*(O_X)$ considerato come O_Y-modulo, è surgettivo e quindi induce un'immersione chiusa di X in E. Per tutti questi concetti e notazioni si può consultare [7].

Sia $p \geqslant 0$ una funzione C^∞ che definisce la q-concavità di Y cioè sia p strettamente q-convessa al di fuori di un compatto K e tale che gli insiemi $\{x \in Y: p(x) < c\}$ siano relativamente compatti in Y per ogni $c \in \boldsymbol{R}$. Su E indichiamo con x la coordinata lungo la base e sia z la coordinata lungo la fibra. Sia $g\colon E \to Y$ la proiezione.

Sia k una metrica hermitiana su E. La funzione $k = k(x, z)$ è allora definita su E e la sua forma di Levi è definita positiva lungo le fibre. Sia infatti (x_0, z_0) un punto di E. Sia V un intorno di x_0 in Y tale che

(a) $g^{-1}(V)$ sia un sottospazio chiuso di $V \times \boldsymbol{C}^m$;

(b) V è un sottospazio chiuso di una varietà non singolare U;

(c) su $L := U \times \boldsymbol{C}^m$ esiste una funzione ${}^t\bar{z}k(y)z$, con $k(y)$ matrice hermitiana di ordine m e definita positiva per ogni $y \in U$ e che estende $k(x, z)$.

Allora la restrizione della forma di Levi $L\big({}^t\bar{z}k(y)z\big)$ a $\{x_0\} \times \boldsymbol{C}^m$ è $k(x)$ che per ipotesi è definita positiva. Fissiamo un ricoprimento numerabile e localmente finito $\{V_i\}$ di Y in modo che esista un'immersione chiusa di V_i in una varietà non singolare U_i tale che su V_i lo spazio lineare E soddisfi alle condizioni (a), (b), (c) e verifichi anche la condizione

(d) esiste una funzione strettamente q-convessa su U_i che estende la restrizione di p a V.

Sia s una funzione strettamente positiva su Y. Allora $sk := s(x)\,k(x, z)$ è ancora una metrica hermitiana su E. Possiamo perciò supporre, se s tende a zero all'infinito abbastanza in fretta, che la funzione h su X definita dalla restrizione di sk a X sia limitata, sia $0 \leqslant h \leqslant 1$.

Prendiamo un ricoprimento $\{W_i\}$ di Y con W relativamente compatto in V. Sia $F_j = \{x \in Y: -j-1 \leqslant p(x) \leqslant -j\}$ con j numero naturale. Sia $a_n > 0$ una costante tale che la forma di Levi $L(h)$ di h abbia autovalori limitati in modulo da a_n su $f^{-1}(F_n)$. Sia d l'estremo superiore dei naturali j tali che $U_j \cap$ .. non è l'insieme vuoto. Sia, per $n > d$, $b_n > 0$ una costante tale che $L(p)$ ha in ogni punto di F_n al massimo q autovalori $< b_n$. Sia per ogni $j > d$ $c_j := \sup(a_n/b_n)$ dove l'estremo superiore è preso tra gli indici n per cui U_n intersechi F_j.

Sia $u\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ una funzione differenziabile tale che

(a) u è negativa, $u(t) = 0$ se $t \geqslant 1$, $u'(t) < 0$ se $t < 1$;

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,dt = -\infty$;

(c) $u(t) < -c_j$ per $j \leqslant t \leqslant j+1$ se $j > d$.

Poniamo $v\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ definita da $v(x) = \int\limits_x^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t$. La funzione $r = u(f^*(p)) + h$ determina la q-concavità di X. Infatti sia $c \in \boldsymbol{R}$; se si ha $r(x) > c$ allora si ha $v(f^*(p)) > c - 1$; possiamo supporre $c < 1$; sia a tale che $\int\limits_a^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t = c - 1$. Allora, poichè v è crescente, l'insieme in cui si ha $r(x) > c$ è contenuto in $f^{-1}(\{y \in Y\colon p(y) > a\})$ che è relativamente compatto in X perchè per ipotesi f è propria. Inoltre la forma di Levi di r ristretta alle fibre coincide con la forma di Levi di h e quindi è definita positiva. Se H è lo spazio tangente in (x, z) alla coordinata x in U_i, si ha

$$\begin{aligned}
L(r)_{IH} &= Lv(f^*(p))\ (x, z)_{IH} + L(h)_{IH} \\
&= v'(f^*(p))\, L(f^*(p))_{IH} + v''(f^*(p))\, |\mathrm{d}(f^*(p))|^2_{IH} + L(h)_{IH} \\
&= -u(f^*(p))\, L(f^*(p))_{IH} - u'(f^*(p))\, |\mathrm{d}(f^*(p))|^2_{IH} + L(h)_{IH} \\
&\geqslant -u(f^*(p))\, L(f^*(p))_{IH} + L(h)_{IH}\,.
\end{aligned}$$

Quindi $L(r)$ ha al più q autovalori non positivi e la dimostrazione del Teorema 3 è così conclusa.

La dimostrazione precedente può essere facilmente adattata al caso delle q-corone. Ricordo la seguente

Definizione 3. *Uno spazio complesso si dice q-corona se esiste una funzione C^∞ positiva su X che sia strettamente q-pseudoconvessa al di fuori di un compatto e per cui gli insiemi $\{x \in X\colon d < p(x) < c\}$ siano relativamente compatti in X per ogni $c > d > 0$.*

Vale infatti la seguente

Proposizione 2. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione olomorfa finita tra spazi complessi con Y q-corona. Allora anche X è una q-corona.*

Dim. Sia p una funzione differenziabile su X con le proprietà della definizione 3. Sia $K_n = \{x \in Y\colon 1/n \leqslant p(x) \leqslant n\}$. Come nella dimostrazione precedente sia $E = V(f_*(O_X))$ e k sia una metrica hermitiana su E. Prendendo opportunamente una funzione positiva s su Y possiamo supporre che per la metrica $h = sk$ si abbia $2h(x) \leqslant p(f(x))$ per ogni $x \in X$. La dimostrazione si conclude come nel teorema precedente.

Consideriamo la seguente

Definizione 4. *Uno spazio complesso X si dice coomologicamente q-corona se per ogni fascio analitico coerente $\mathscr{F}$ su X, $H^i(X, \mathscr{F})$ ha dimensione finita per $q < i < \operatorname{prof} \mathscr{F} - q - 1$.*

Vale allora la seguente

Proposizione 3. *Sia $f\colon X \to Y$ un morfismo finito tra spazi complessi. Se Y è coomologicamente una q-corona, allora anche X è coomologicamente una q-corona.*

Dim. Sia $\mathscr{F}$ un fascio analitico coerente su X. Allora $f_*\mathscr{F}$ è un fascio analitico coerente su Y e si ha $\operatorname{prof} \mathscr{F} = \operatorname{prof}(f_*(\mathscr{F}))$ ([**4**], prop. 4.19, cap. 1, pag. 57). La tesi segue dalla degenerazione della successione spettrale di Leray $H^p(Y, \mathscr{R}^q f_*(\mathscr{F}))$ che converge a $H^{p+q}(X, \mathscr{F})$.

La stessa dimostrazione vale ovviamente nel caso di spazi coomologicamente q-concavi (oppure q-completi o q-convessi (vedi [**9**]).

Consideriamo il problema inverso: data $f\colon X \to Y$ applicazione olomorfa, finita e surgettiva quali sono le proprietà di Y che discendono da corrispondenti proprietà di X. È ben noto che nell'ambito della geometria algebrica la q-completezza coomologica discende cioè le dimensioni coomologiche di X e Y coincidono. Ma per la semplice dimostrazione si usano proprietà di noetherianità e quasi compattezza che non sussistono nell'ambito della geometria analitica.

Vale la seguente

Proposizione 4. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione olomorfa, finita, surgettiva e piatta tra spazi complessi di dimensione limitata. Se X è coomologicamente q-completo o coomologicamente q-convesso o coomologicamente q-concavo oppure coomologicamente una q-corona, allora tale è Y.*

Dim. Consideriamo il caso in cui X è coomologicamente q-convesso cioè per ogni fascio analitico coerente $\mathscr{F}$ su X, $H^i(X, \mathscr{F})$ ha dimensione finita per $i > q$. Il caso di q-completezza coomologica è analogo.

Poniamo $F := f_*(O_X)$. Poichè f è piatta e surgettiva, F è un O_Y-fascio localmente libero (vedi [**5**], prop. 1, pag. 58). Sia $\mathscr{F}$ un fascio analitico coerente su Y. Allora $f^*\mathscr{F}$ è un fascio analitico coerente su X e abbiamo $f_*f^*\mathscr{F} = \mathscr{F} \otimes_{O_Y} F$ per la formula di proiezione. Dobbiamo dimostrare che $H^i(Y, \mathscr{F})$ ha dimensione finita per $i > q$. Dalla degenerazione della successione spettrale di Leray otteniamo che $H^i(Y, \mathscr{F} \otimes_{O_Y} F)$ è isomorfo a $H^i(X, f^*\mathscr{F})$ e quindi ha dimensione finita per $i > q$. Perciò la tesi vale per ogni facio coerente su Y del tipo $\mathscr{F} \otimes_{O_Y} F$ con $\mathscr{F}$ fascio analitico coerente su Y. In generale procediamo per induzione discendente su i. La tesi è vera per $i > \dim Y$. Indichiamo con $\mathscr{E}^v$ il duale di un O_Y-fascio $\mathscr{E}$ su Y. Poichè F è localmente libero, l'accoppiamento naturale $F \otimes_{O_h} F^v \to O_Y$ è surgettivo e tensorizzando per $\mathscr{F}$ otteniamo una successione esatta

$$0 \to \mathscr{H} \to \mathscr{F} \otimes_{O_y} F \otimes_{O_y} F^v \to \mathscr{F} \to 0 ,$$

da cui si ottiene che $H^i(Y, \mathscr{F})$ ha dimensione finita per l'ipotesi induttiva.

Consideriamo ora il caso della q-concavità coomologica. Sia $\mathscr{F}$ un fascio coerente su Y. Poichè f è piatta e surgettiva $F := f_*(O_x)$ è un O_Y-modulo localmente libero di tipo finito e si ha prof $\mathscr{F} =$ prof $f_*f^*\mathscr{F} =$ prof $f^*\mathscr{F}$ dove la seconda eguaglianza discende da [4] (prop. 4.19, cap. 1, pag. 57). Dalla degenerazione della successione spettrale di Leray si ottiene la tesi per i fasci del tipo $\mathscr{F} \otimes_{O_y} F$. Inoltre l'inclusione naturale i: $O_Y \to F \otimes_{O_y} F^v \cong \mathrm{Hom}\,(F, F)$ definita da $i(f)(g) = fg$ è un'iniezione di fibrati vettoriali e quindi Cocker (i) è localmente libero (o identicamente nullo). Tensorizzando per $\mathscr{F}$ si ottiene la successione esatta

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes_{O_y} F \otimes_{O_y} F^v \to F \otimes_{O_y} \mathrm{Coker}\,(i) \to 0 ,$$

da cui si ottiene per induzione crescente la tesi.

Il caso di una q-corona coomologica è l'unione del caso q-convesso e di quello q-concavo.

Osservazione. Questa proposizione è ragionevolmente fine nel caso q-concavo ma non nel caso q-convesso in cui l'ipotesi di piattezza non è essenziale e, almeno in geometria algebrica, superflua. Nella dimostrazione del caso q-completo e di quello q-convesso si è usato solo che l'applicazione naturale $F \otimes_{O_y} F^v \to O_Y$ è surgettiva e questo avviene, ad esempio, se per ogni punto $y \in Y$ esiste un punto $x \in X$ con $f(x) = y$ e tale che f sia un isomorfismo locale nel punto x.

Bibliografia

[1] V. Ancona, *Fasci metricamente pseudoconvessi sopra uno spazio complesso*, Ann. Univ. Ferrara **20** (1975), 49-52.

[2] A. Andreotti and R. Narasimhan, *Oka's heftungslemma and the Levi problem for complex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **111** (1964), 345-366.

[3] E. BALLICO: [•]$_1$ *Fibrati principali su spazi complessi q-completi,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **63** (1980), 1-4; [•]$_2$ *Morfismi finiti tra spazi complessi e q-convessità,* Ann. Univ. Ferrara. **24** (1980), 29-31.

[4] C. BANICA et O. STANASILA, *Méthodes algébriques dans la thèorie globale des espaces complexes,* Vol. 1, Gauthier-Villars, Paris 1977.

[5] A. DOUADY, *Flatness and Privilege,* L'Ensegnement Mathématique **14** (1968), 47-74.

[6] F. HIRZEBRUCH, *Topological methods in Algebraic Geometry,* Springer-Verlag, Berlin 1966.

[7] C. HOUZEL, *Seminaire H. Cartan* 1960-1961 Exp. 19.

[8] P. LE BARZ, *A propos des revêtements ramifiés d'espaces de Stein*, Math. Ann. **222** (1976), 63-69.

[9] V. VILLANI, *Fibrati vettoriali olomorfi su una varietà complessa q-completa,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **20** (1966), 15-23.

Summary

In this paper we prove that an unramified covering of a q-complete complex space is q-complete. We prove also that if $f: X \to Y$ is a finite, holomorphic map of complex spaces and Y is q-concave, then X is q-concave.

* * *