Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981), 453-460

Loris Molinari (*)

Sulle omografie caratteristiche di una trasformazione puntuale fra due piani affini (**)

1 – È noto [**2**] che, data una trasformazione puntuale T fra due piani proiettivi e una coppia regolare (A, B) di punti corrispondenti in T, ad ogni retta caratteristica r per A si può sempre associare una e una sola omografia K, tangente in (A, B) alla T, tale che r sia una retta totalmente K-linearizzante. La K risulta poi essere l'*omografia caratteristica relativa ad* r ([**5**], [**6**]).

In questa Nota ci si pone, e lo si risolve (col metodo del riferimento mobile), il problema di classificare e determinare le trasformazioni fra due piani affini per le quali una (e necessariamente una sola) omografia caratteristica in ogni coppia regolare è un'affinità.

Va notato (si veda **3**) che il suddetto problema è equivalente, salvo un caso peraltro notevole, al problema, risolto in [**3**], di classificare e determinare le trasformazioni (fra due piani affini) le cui proiettività caratteristiche in ogni coppia regolare sono similitudini.

2 – Sia T una trasformazione puntuale fra due piani affini π, $\bar{\pi}$. Ad ogni coppia regolare (A, B) di punti corrispondenti associamo due riferimenti affini mobili $(A, \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2)$ e $(B, \boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2)$, con $\boldsymbol{J}_i = \Omega(\boldsymbol{I}_i)$ essendo Ω l'affinità tangente alla T in (A, B). Le equazioni di T si scrivono allora

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega_1 \boldsymbol{I}_1 + \omega_2 \boldsymbol{I}_2\,, & \mathrm{d}\boldsymbol{I}_i &= \omega_{i1} \boldsymbol{I}_1 + \omega_{i2} \boldsymbol{I}_2\,,\\ \mathrm{d}B &= \tau_1 \boldsymbol{J}_1 + \tau_2 \boldsymbol{J}_2\,, & \mathrm{d}\boldsymbol{J}_i &= \tau_{i1} \boldsymbol{J}_1 + \tau_{i2} \boldsymbol{J}_2\,, \end{aligned} \qquad (2)\qquad \tau_i = \omega_i \quad (i = 1, 2)\,,$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Applicata, Università, Via Vallescura, 2 40136 Bologna, Italy.

(**) Ricevuto: 2-IX-1980.

essendo le ω_i forme di Pfaff nei due parametri principali e le ω_{ik}, τ_{ik} ancora forme di Pfaff nei due parametri principali e in quelli secondari.

Dalla differenziazione esterna delle (2) si perviene a due forme quadratiche in ω_1, ω_2: $\Omega_1 = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\omega_i\omega_j$, $\Omega_2 = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\omega_i\omega_j$ $(a_{ij} = a_{ji},\, b_{ij} = b_{ji})$, tali che

$$\tau_{jk} - \omega_{jk} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_k}{\partial \omega_j} \qquad (j, k = 1, 2)\,. \tag{3}$$

Le rette caratteristiche r_i di T relative ad A, che supporremo non indeterminate, sono rappresentate dall'equazione

$$\omega_2 \Omega_1 - \omega_1 \Omega_2 = 0\,. \tag{4}$$

Gli sviluppi locali della T, fino all'intorno del 2° ordine, sono

$$\bar{x} = x + \tfrac{1}{2}\Omega_1(x, y) + [3]\,, \qquad \bar{y} = y + \tfrac{1}{2}\Omega_2(x, y) + [3]\,.$$

Infine, la corrispondeza K-linearizzante relativa alla T ad un'omografia K tangente alla T in (A, B), è la mappa del fascio di rette di centro A in sè definita da

$$\omega_i \mapsto \Omega_i(\omega_1, \omega_2) - \omega_i(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) \qquad (i = 1, 2)\,, \tag{5}$$

essendo λ_1 e λ_2 i parametri da cui dipende K.

Fra l'omografia caratteristica K_i $(i = 1, 2, 3)$ e la proiettività caratteristica $\mathscr{P}_j$: $r_j \mapsto \Omega(r_j)$, $(j = 1, 2, 3)$, esistono le seguenti relazioni:

T è di 1ª specie: K_i subordina $\mathscr{P}_j$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$;

T è di 2ª specie $(r_1 \neq r_2 = r_3)$: K_1 subordina $\mathscr{P}_2$ ma non $\mathscr{P}_1$, K_2 subordina $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$;

T è di 3ª specie $(r_1 = r_2 = r_3)$: $K = K_1$ subordina $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1$.

3 – Consideriamo ora le trasformazioni, che indicheremo con T', fra due piani affini per le quali una delle K_i in ogni coppia regolare è un'affinità. Si vede subito che

Una e una sola delle omografie caratteristiche può essere un'affinità.

Il problema dello studio e della determinazione delle T' è, salvo un caso, equivalente al problema trattato in [**3**]. In tale Nota infatti sono state studiate e determinate:

le trasformazioni di 1ª specie per le quali due delle proiettività $\mathscr{P}_j$ in ogni coppia regolare, sono similitudini, cioè *tutte e sole le T' di 1ª specie*;

le trasformazione di 2ª specie per le quali $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ in ogni coppia regolare, sono similitudini, cioè *tutte e sole le T' di 2ª specie per le quali è un'affinità l'omografia K_2 relativa alla retta caratteristica doppia*;

le trasformazioni di 3ª specie per le quali $\mathscr{P}$ è una similitudine, in ogni coppia regolare, cioè *tutte e sole le T' di 3ª specie.*

Restano quindi da studiare, fra le T', quelle trasformazioni, che indicheremo con T^*, che sono di 2ª specie e per le quali è un'affinità, in ogni coppia regolare, l'omografia caratteristica K_1 relativa alla retta caratteristica semplice.

4 – Sia T^* una trasformazione del tipo precedentemente descritto. Se assumiamo le rette caratteristiche doppia e semplice come rette $\omega_2 = 0$, $\omega_1 = 0$ si ha $a_{11} = a_{12} = a_{22} = b_{11} = b_{12} = 0$, $b_{22} \neq 0$. Le (3) divengono, posto $b_{22} = a$,

$$(6) \qquad \tau_{11} - \omega_{11} = 0 \,, \quad \tau_{21} - \omega_{21} = 0 \,, \quad \tau_{12} - \omega_{12} = 0 \,, \quad \tau_{22} - \omega_{22} = a\omega_2 \,.$$

Per differenziazione esterna delle (6), si perviene a due forme cubiche in ω_1, ω_2

$$\Theta_1 = q_{03}\,\omega_2^3 \,, \qquad \Theta_2 = 3q_{21}\,\omega_1\,\omega_2^2 + q_{03}\,\omega_2^3 \,,$$

tali che

$$(7) \qquad a\omega_{21} = \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\omega_2^2} \,, \quad -a\omega_{12} = \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\omega_1\,\partial\omega_2} \,, \quad \mathrm{d}a - a\omega_{22} = \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\omega_2^2} \,.$$

Indicando poi, al solito, con δ un simbolo di differenziazione esterna rispetto ai soli parametri secondari e posto $e_i = \omega_i(\delta)$, $t_i = \tau_i(\delta)$, $e_{ik} = \omega_{ik}(\delta)$, $t_{ik} = \tau_{ik}(\delta)$, si ha (per definizione) $e_i = 0$ e dalle (2), (6): $t_i = 0$, $t_{ik} = e_{ik}$ $(i, k = 1, 2)$. Il riferimento affine su $\bar{\pi}$ è così legato a quello su π.

Dalle (7) si deduce poi $e_{21} = e_{12} = 0$, $\delta a = ae_{22}$, per cui a risulta un invariante relativo che, essendo $\neq 0$, possiamo porre uguale ad 1. Le (7) si scrivono allora, dopo ovvie posizioni,

$$(8) \qquad \omega_{21} = p\omega_2 \,, \qquad \omega_{12} = q\omega_2 \,, \qquad \omega_{22} = q\omega_1 + r\omega_2 \,.$$

I tre coefficienti p, q ed r che figurano nelle (8) costituiscono un sistema di invarianti affini fondamentali per le T^*. Si hanno per essi le condizioni di integrabilità

$$(9) \qquad \begin{gathered} [(\mathrm{d}p + p\omega_{11})\,\omega_2] - pq[\omega_1\,\omega_2] = 0 \,, \qquad [(\mathrm{d}q - q\omega_{11})\,\omega_2] + q^2[\omega_1\,\omega_2] = 0 \,, \\ [(\mathrm{d}q - q\omega_{11})\,\omega_1] + [\mathrm{d}r\;\omega_2] = 0 \,, \end{gathered}$$

dalle quali segue che *il sistema* (8) *è in involuzione* e che *la sua soluzione generale dipende da tre funzioni arbitrarie di una variabile.*

Infine gli sviluppi locali di una T^*, fino all'intorno del 3° ordine, sono

$$\bar{x} = x + \tfrac{1}{6}py^3 + [4]\,, \qquad \bar{y} = y + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{6}\,qxy^2 - \tfrac{1}{6}\,(r-1)\,y^3 + [4]\,.$$

Da questi si deduce che la retta caratteristica doppia è iperinflessionale, mentre quella semplice lo è se e solo se $p = 0$. Inoltre la proiettività caratteristica $\mathscr{P}_2$, relativa a due rette caratteristiche doppie corrispondente in Ω, iperoscula in (A, B) la corrispondenza subordinata fra tali rette da una T^*.

5 – Una prima proprietà comune a tutte le T^* è:

Le curve caratteristiche doppie sono rette (in entrambi i piani). Ciò implica che la corrispondenza $\mathscr{S}^*$ indotta fra due di tali rette corrispondenti è una similitudine.

Infatti dai sistemi (6), (8) si deduce

$$\omega_{12} = \tau_{12} = 0 \qquad \text{per } \omega_2 = 0\,, \tag{10}$$

da cui segue che le curve caratteristiche doppie sono rette (in entrambi i piani).

D'altronde la corrispondenza $\mathscr{S}^*$ ha le equazioni

$$\mathrm{d}A = \omega_1 \boldsymbol{I}_1\,, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{I}_1 = \omega_{11}\boldsymbol{I}_1 + \omega_{12}\boldsymbol{I}_2\,, \quad \mathrm{d}B = \omega_1 \boldsymbol{J}_1\,, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{J}_1 = \omega_{11}\boldsymbol{J}_1 + \tau_{12}\boldsymbol{J}_2\,.$$

Segue subito, ove si tenga conto delle (10), che la $\mathscr{S}^*$ è una similitudine.

6 – Studiamo ora in dettaglio le T^*. Dalle (9) segue

$$\delta p = -\,p e_{11}\,, \qquad \delta q = q e_{11}\,, \qquad \delta r = 0\,, \tag{11}$$

da cui risulta che *p e q sono invarianti relativi*. Inoltre, come mostrano le (8), *le curve caratteristiche doppie sono rette di due fasci impropri (in entrambi i piani) se e solo se $q = 0$, mentre le caratteristiche semplici sono rette, necessariamente appartenenti a due fasci impropri, se e solo se $p = 0$.*

Le T^* si possono allora così classificare

1° *tipo*: *Trasformazioni* T_1^* $(q = 0)$; 2° *tipo*: *Trasformazioni* T_2^* $(q \neq 0)$.

A loro volta le T_1^* possono essere classificate nei due sottotipi

sottotipo $T_{1,1}^*$ *se* $p = 0$, *sottotipo* $T_{1,2}^*$ *se* $p \neq 0$.

7 – Sussistono i seguenti risultati.

(a) *Le* $T^*_{1,1}$ *sono tutte e sole le trasformazioni di* 2ª *specie* (*fra piani affini*) *tali che*:

(i) *le curve caratteristiche doppie sono rette di due fasci impropri* $\mathcal{F}^*$, $\overline{\mathcal{F}}^*$ *fra i quali è subordinata una corrispondenza* $\mathcal{C}^*$ *che non è mai proiettiva e in cui si corrispondono le rette improprie dei due piani*,

(ii) *le curve caratteristiche semplici sono rette di due fasci impropri fra i quali è subordinata una proiettività in cui si corrispondono le rette improprie dei due piani*.

(b) *Le* $T^*_{1,2}$ *sono tutte e sole le trasformazioni di* 2ª *specie* (*fra piani affini*) *tali che*:

(i) *le curve caratteristiche doppie godono delle stesse proprietà di quelle delle* $T^*_{1,1}$,

(ii) *il rapporto della similitudine* $\mathcal{S}^*$ *subordinata fra due rette* $r \in \mathcal{F}^*$, $\bar{r} \in \overline{\mathcal{F}}^*$ *è una costante arbitraria*.

D i m o s t r a z i o n e d e l l a (a). Consideriamo una $T_{1,1}$ e osserviamo che, poichè per una tale trasformazione ω_{11} è un differenziale esatto, si può far sì che sia $\omega_{11}=0$. Il riferimento è allora fissato e le (1) si scrivono

$$\mathrm{d}A=\omega_1 \boldsymbol{I}_1+\omega_2 \boldsymbol{I}_2\,, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{I}_1=0\,, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{I}_2=r\omega_2 \boldsymbol{I}_2\,,$$

$$\mathrm{d}B=\omega_1 \boldsymbol{J}_1+\omega_2 \boldsymbol{J}_2\,, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{J}_1=0\,, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{J}_2=(r+1)\omega_2 \boldsymbol{J}_2\,,$$

essendo $[\mathrm{d}r\,\omega_2]=0$.

Per dimostrare la (i) osserviamo anzitutto che i fasci $\mathcal{F}^*$, $\overline{\mathcal{F}}^*$ sono costituiti dalle rette parallele rispettivamente alle rette $A\boldsymbol{I}_1$, $B\boldsymbol{J}_1$. Consideriamo quindi in π ($\bar{\pi}$) il riferimento $(a, a_1, a_2)\big((b, b_1, b_2)\big)$, essendo a, a_1 le rette $A\boldsymbol{I}_1$, $A\boldsymbol{I}_2$ ed a_2 la retta impropria di π (b, b_1, b_2 le analoghe rette di $\bar{\pi}$). Rispetto a tali riferimenti le equazioni della corrispondenza $\mathcal{C}^*$ sono ([**1**])

$$\mathrm{d}a=-\,\omega_{22}a-\omega_2 a_2\,, \qquad \mathrm{d}a_2=0\,, \qquad \mathrm{d}b=-\,\tau_{22}b-\omega_2 b_2\,, \qquad \mathrm{d}b_2=0\,.$$

Segue che in $\mathcal{C}^*$ si corrispondono le rette improprie di π, $\bar{\pi}$. Inoltre, essendo $\omega_{22}\neq\tau_{22}$, la $\mathcal{C}^*$ non può mai essere proiettiva.

La (ii) si dimostra osservando che in questo caso i fasci sono costituiti dalle rette parallele rispettivamente alle rette $A\boldsymbol{I}_2$, $B\boldsymbol{J}_2$ e che la corrispondenza $\mathcal{T}^*$ subordinata fra due rette caratteristiche semplici fra loro corrispondenti ha le equazioni

$$\mathrm{d}a_1=-\,\omega_1 a_2\,, \qquad \mathrm{d}a_2=0\,, \qquad \mathrm{d}b_1=-\,\omega_1 b_2\,, \qquad \mathrm{d}b_2=0\,.$$

La $\mathscr{T}^*$ è allora una proiettività in cui si corrispondono le rette improprie di π, $\bar{\pi}$.

Si è così dimostrato che una $T^*_{1,1}$ verifica le (i), (ii) di (a).

Sia viceversa T una trasformazione di 2ª specie (fra piani affini) che goda della proprietà (i) di (a). Assumiamo i centri dei due fasci come punti impropri delle rette $A\boldsymbol{I}_1$, $B\boldsymbol{J}_1$ dei riferimenti mobili affini associati alla generica coppia regolare (A, B). Quindi particolarizziamo i riferimenti come in **2** e assumiamo come retta $\omega_1 = 0$ la retta caratteristica semplice. Si ottengono così per la T le equazioni (1), (2) con

$$\tau_{11} - \omega_{11} = a_{12}\omega_2 , \qquad \tau_{21} - \omega_{21} = a_{12}\omega_1 ,$$

$$\tau_{12} = \omega_{12} = 0 , \qquad \tau_{22} - \omega_{22} = b_{22}\omega_2 ,$$

$$(b_{22} \neq 2a_{12},\ b_{22} \neq 0) .$$

Se poi la T verifica la (ii) sempre di (a) risulta $\omega_{21} = \tau_{21}$ e quindi $\omega_{11} = \tau_{11} = 0$. La T è allora una $T^*_{1,1}$.

Dimostrazione della (b). Consideriamo una $T^*_{1,2}$ e osserviamo che, essendo $p \neq 0$, si può porre $p = 1$. Il riferimento è allora fissato, e si ha

$$\omega_{11} = \alpha\omega_2 , \qquad \omega_{12} = 0 , \qquad \omega_{22} = r\omega_2 , \qquad [\mathrm{d}\alpha\,\omega_2] = 0 , \qquad [\mathrm{d}r\,\omega_2] = 0 .$$

Si verifica facilmente che anche per una $T^*_{1,2}$ è verificata la proprietà (i) di (a). Consideriamo poi la similitudine $\mathscr{S}^*$ subordinata fra due rette caratteristiche doppie corrispondenti. Essa ha le equazioni

$$\mathrm{d}A = \omega_1 \boldsymbol{I}_1 , \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{I}_1 = \alpha\omega_2 \boldsymbol{I}_1 , \qquad \mathrm{d}B = \omega_1 \boldsymbol{J}_1 , \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{J}_1 = \alpha\omega_2 \boldsymbol{J}_1 ,$$

e pertanto il suo rapporto è una costante arbitraria.

Si verifica poi, con un procedimento analogo a quello seguito precedentemente, che se una trasformazione di 2ª specie gode delle proprietà (i) e (ii) di (b) essa è una $T^*_{1,2}$.

L'asserto è così dimostrato.

Dalle proposizioni (a) e (b) segue che, a meno di affinità, le equazioni delle $T^*_{1,1}$ sono

$$\bar{x} = x , \qquad \bar{y} = f(y) ,$$

(con f funzione arbitraria di y non costante nè lineare), mentre quelle delle $T^*_{1,2}$ sono

$$\bar{x} = x\varphi(y) , \qquad \bar{y} = \psi(y) ,$$

(con φ e ψ funzioni arbitrarie di y non costanti nè lineari e tali che $\varphi^2 \neq \psi'$).

La costruzione geometrica di queste trasformazioni è immediata.

8 – Passiamo infine allo studio delle T_2^* $(q \neq 0)$. Dalle (11) risulta che in questo caso si può porre $q = 1$ e così il riferimento è completamente fissato. Le T_2^* sono allora le trasformazioni definite dalle (1) con

$$(12)_1 \quad \omega_{11} = \omega_1 - h\omega_2\,, \qquad \omega_{21} = p\omega_2\,, \qquad \omega_{12} = \omega_2\,, \qquad \omega_{22} = \omega_1 + r\omega_2\,,$$

$$(12)_2 \quad \tau_{11} = \omega_1 - h\omega_2\,, \qquad \tau_{21} = p\omega_2\,, \qquad \tau_{12} = \omega_2\,, \qquad \tau_{22} = \omega_1 + (r+1)\,\omega_2\,,$$

$$(12)_3 \quad \mathrm{d}r = h\omega_1 + k\omega_2\,.$$

Si hanno poi le tre condizioni di integrabilità

$$[\mathrm{d}h\,\omega_2] + h[\omega_1\omega_2] = 0\,, \qquad [\mathrm{d}h\,\omega_1] + [\mathrm{d}k\,\omega_2] - h[\omega_1\omega_2]\,, \qquad [\mathrm{d}p\,\omega_2] = 0\,,$$

dalle quali si deduce che *le T_2^* dipendono da tre funzioni arbitrarie di una variabile.*

Poichè al punto $P = A - \boldsymbol{I}_1$ comune a due rette caratteristiche doppie di π infinitamente vicine corrisponde, nell'affinità Ω, il punto $Q = B - \boldsymbol{J}_1$, e risulta

$$(13) \qquad \mathrm{d}P = \mathrm{d}A - \mathrm{d}\boldsymbol{I}_1 = h\omega_2\boldsymbol{I}_1\,, \qquad \mathrm{d}Q = \mathrm{d}B - \mathrm{d}\boldsymbol{J}_1 = h\omega_2\boldsymbol{J}_1\,,$$

possiamo classificare le T_2^* nei due sottotipi: *sottotipo $T_{2,1}^*$ se $h = 0$, sottotipo $T_{2,2}^*$ se $h \neq 0$.*

Dalle (13) si deduce subito che

Le $T_{2,1}^*$ sono tutte e sole le trasformazioni di 2ª specie (fra piani affini) tali che:

(i) *le curve caratteristiche doppie sono rette di due fasci impropri (in entrambi i piani) fra i quali è subordinata una arbitraria corrispondenza,*

(ii) *i centri dei due fasci si corrispondono nella similitudine subordinata fra ogni coppia di rette corrispondenti.*

Le equazioni delle $T_{2,1}^*$, a meno di affinità, sono $\bar{y}/\bar{x} = f(y/x)$, $\bar{x} = x + \varphi(y/x)$, con f e φ funzioni arbitrarie di y/x, la f non costante né lineare.

Notiamo che per $\varphi = \text{cost.}$ si ottengono le $T_{2,1}^*$ relative a $p = 0$; in tal caso le curve caratteristiche semplici sono rette di due fasci impropri fra i quali è subordinata una proiettività.

9 – Consideriamo infine le trasformazioni $T^*_{2,2}$. In questo caso, come si deduce dalle (13) le rette caratteristiche doppie di π inviluppano una curva e così quelle di $\bar{\pi}$. Inoltre, essendo

$$d^2P = \{d(h\omega_2) + h\omega_2(\omega_1 - h\omega_2)\}\,\boldsymbol{I}_1 + h\omega_2^2\,\boldsymbol{I}_2\,,$$

$$d^2Q = \{d(h\omega_2) + h\omega_2(\omega_1 - h\omega_2)\}\,\boldsymbol{J}_1 + h\omega_2^2\boldsymbol{J}_2\,,$$

risulta $\Omega P = Q$, $\Omega\, dP = dQ$, $\Omega\, d^2P = d^2Q$.

Una trasformazione $T^*_{2,2}$ si può allora costruire geometricamente nel seguente modo. *Fissiamo due curve arbitrarie γ e $\bar{\gamma}$ in π, $\bar{\pi}$ rispettivamente e assegniamo una corrispondenza Γ pure arbitraria fra γ e $\bar{\gamma}$. Siano poi P e Q due punti di γ e $\bar{\gamma}$ corrispondenti in Γ e sia $\mathscr{A}$ (che esiste sempre ed è unica) l'affinità fra π e $\bar{\pi}$ tale che $\mathscr{A}(\gamma)$ e $\bar{\gamma}$ abbiano un contatto analitico del 3° ordine in Q. Se allora A è un punto della tangente in P a γ e B è il suo corrispondente in $\mathscr{A}$, (A, B) è una coppia di punti corrispondenti in una $T^*_{2,2}$.*

Bibliografia

[1] E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continues et la Géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*, Gauthier-Villars, Paris 1951.

[2] E. Čech, *Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces*, I, Casopis Pěst. Math. **74** (1950), 32-48.

[3] L. Molinari, *Sulle trasformazioni (fra piani affini) le cui proiettività caratteristiche in ogni coppia regolare sono similitudini*, Boll. Un. Mat. Ital. (IV) **3** (1970), 919-934.

[4] L. Muracchini, *Sulle trasformazioni puntuali di seconda e terza specie fra piani proiettivi*, Mem. Accad. Sci. Torino (III) **1** (1953), 25-44.

[5] G. Vaona, *Sulla trasformazione linearizzante di una corrispondenza puntuale fra spazi lineari*, Boll. Un. Mat. Ital. (III) **6** (1951), 293-299.

[6] M. Villa, *Sulle trasformazioni puntuali con direzioni caratteristiche coincidenti*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A (V) **78** (1944-45), 321-328.

Summary

In this paper we determine some classes of point-transformations between two affine planes such that only one characteristic collineation is an affine transformation at every regular pair of corresponding points.

* * *