Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 107-113

GIOVANNI PINTO (*)

Sui grafi orientati autocomplementari (**)

R. C. Read [4] ha determinato formule per calcolare il numero dei grafi orientati e non orientati autocomplementari. H. Whitney [5] ha studiato vari tipi di grafi orientati connessi e fra loro isomorfi. In questa nota si dà una condizione necessaria e una condizione sufficiente affinchè un grafo orientato di ordine pari o dispari sia autocomplementare, seguendo la stessa linea di sviluppo di un lavoro dell'autore della medesima sui grafi non orientati autocomplementari [3].

Si assume come definizione di grafo orientato quella di F. Harary [2] e cioè un grafo orientato di ordine n è una coppia $G=(V, X)$ dove V è un insieme di n elementi, detti vertici e X è un insieme di coppie ordinate di elementi distinti di V, dette archi.

Si chiama semigrado d'uscita di un vertice v_i di G e, usando la stessa notazione del Berge [1], si denota con $dg_G^+(v_i)$ il numero degli archi di G che hanno v_i come primo estremo, si chiama semigrado d'ingresso di v_i e si denota con $dg_G^-(v_i)$ il numero degli archi di G che hanno v_i come secondo estremo.

Si chiama isomorfismo di un grafo $G=(V, X)$ su di un grafo $G'=(V', X')$ la coppia $\varphi=(f, g)$ di bigezioni $f\colon V\to V'$ e $g\colon X\to X'$ tali che per ogni arco $x=(v_i, v_j)\in X$ risulti $g(x)=\big(f(v_i), f(v_j)\big)\in X'$. Se $G=(V, X)$ è un grafo orientato di ordine n, si dice complementare di G il grafo $\bar{G}=(V, \bar{X})$ che ha lo stesso insieme di vertici V di G ed in cui $\bar{X}=V^2-X$. Un grafo orientato si dice autocomplementare se esso è isomorfo al suo complementare. Per tutte le altre definizioni che s'incontreranno in questo lavoro si farà sempre riferimento a [2]. Si provano immediatamente le seguenti proposizioni.

Proposizione 1. Se $G=(V, X)$ è un grafo orientato autocomplementare di ordine n, l'ordine di X è $n(n-1)/2$.

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Università, Via Nicolai 2, 70121 Bari, Italy.
(**) Ricevuto: 17-VII-1980.

Proposizione 2. Se $G = (V, X)$ è un grafo orientato autocomplementare di ordine n, la somma dei semigradi d'uscita e d'ingresso dei suoi vertici è data dalla formula: $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}g_G^+(v_i) + \mathrm{d}g_G^-(v_i) = n(n-1)$.

Si prova ora la seguente

Proposizione 3. Se $G = (V, X)$ è un grafo orientato autocomplementare di ordine n e se $\varphi = (f, g)$ è un isomorfismo di G sul suo complementare $\bar{G}$, sia la somma dei semigradi d'uscita che la somma dei semigradi d'ingresso di due vertici corrispondenti in φ, considerati come vertici di G o di $\bar{G}$, è $n-1$.

Dim. Siano v_i e v_j due vertici di V corrispondenti in φ. Ora v_j deve avere in $\bar{G}$ gli stessi semigradi di v_i in G; poichè per ogni vertice v_j di V risulta

$$\mathrm{d}g_G^+(v_j) + \mathrm{d}g_{\bar{G}}^+(v_j) = n-1\,, \qquad \mathrm{d}g_G^-(v_j) + \mathrm{d}g_{\bar{G}}^-(v_j) = n-1\,; \tag{1}$$

sostituendo nelle (1) $\mathrm{d}g_{\bar{G}}^+(v_j)$ con $\mathrm{d}g_G^+(v_i)$ e $\mathrm{d}g_{\bar{G}}^-(v_j)$ con $\mathrm{d}g_G^-(v_i)$ si ottiene

$$\mathrm{d}g_G^+(v_i) + \mathrm{d}g_G^+(v_j) = n-1\,, \qquad \mathrm{d}g_G^-(v_i) + \mathrm{d}g_G^-(v_j) = n-1\,.$$

Analoghe uguaglianze valgono in $\bar{G}$.

Dalla Proposizione 3 si deduce immediatamente la seguente

Proposizione 4. Se $G = (V, X)$ è un grafo orientato autocomplementare di ordine $2k$, in ogni isomorfismo $\varphi = (f, g)$ di G su $\bar{G}$ non esiste alcun vertice unito.

Dim. Se u fosse unito in f, in virtù della Proposizione 3, risulterebbe

$$\mathrm{d}g_G^+(u) + \mathrm{d}g_G^+(f(u)) = 2\,\mathrm{d}g_G^+(u) = 2k-1,\ \mathrm{d}g_G^-(u) + \mathrm{d}g_G^-(f(u)) = 2\,\mathrm{d}g_G^-(u) = 2k-1,$$

il che è ovviamente assurdo, perchè $2k-1$ non è divisibile per 2.

Si prova ora una proprietà dei grafi orientati autocomplementari di ordine pari.

Proposizione 5. Se $G = (V, X)$ è un grafo orientato autocomplementare di ordine $2k$, l'insieme V si può ripartire in sottoinsiemi disgiunti, ciascuno costituito dai vertici che hanno in G gli stessi semigradi; inoltre se $\varphi = (f, g)$ è un isomorfismo di G sul suo complementare $\overline{G}$ e se A_{pq}, formato dai vertici che hanno semigradi (p, q), è uno qualunque dei sottoinsiemi suddetti, la permutazione f di V si decompone in un prodotto di cicli disgiunti di lunghezza pari, ognuno operante sui vertici di $A'_{p,q} \cup f(A'_{p,q})$ con $A'_{p,q} \subseteq A_{p,q}$.

Dim. Sia m l'ordine di f, ossia il più piccolo intero positivo tale che $f^m = i_V$. Si vede ora che m è necessariamente pari. Per provarlo, basterà dimostrare che f non contiene alcun ciclo di lunghezza dispari. Infatti, giacchè per la Proposizione 4, f non ammette alcun vertice unito, essa non può contenere alcun ciclo di lunghezza 1. Inoltre, supposto che f contenga il ciclo $(v_r v_s v_t)$, se v_r avesse in G i semigradi (p, q), $f(v_r) = v_s$ avrebbe in G i semigradi $(2k - p - 1, 2k - q - 1)$; di conseguenza $f(v_s) = v_t$ avrebbe in G i semigradi (p, q) e quindi infine $f(v_t) = v_r$ avrebbe sempre in G i semigradi $(2k - p - 1, 2k - q - 1)$ in contraddizione con l'ipotesi che v_r abbia i semigradi (p, q). In modo analogo si prova che f non può contenere alcun ciclo di lunghezza dispari maggiore di 3.

Ne segue che f si decompone in un prodotto di cicli disgiunti di lunghezza pari e quindi che l'ordine m di f, essendo m il minimo comune multiplo delle lunghezze dei suoi cicli disgiunti, è necessariamente un intero pari.

Posto $A_{p,q} = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_h}\}$ con $h \leqslant k$ e $f(A_{p,q}) = A_{2k-p-1, 2k-q-1}$ e denotato con $2h'$ con $1 \leqslant h' \leqslant m/2$ il periodo rispetto a f di un qualunque elemento di $A_{p,q}$, che senza ledere la generalità si può scegliere uguale a v_{i_1}, si consideri il ciclo generato da v_{i_1} mediante le successive potenze di f

$$c(v_{i_1}) = (v_{i_1} f(v_{i_1}) f^2(v_{i_1}) f^3(v_{i_1}) \ldots f^{2h'-1}(v_{i_1})) .$$

Si prova subito che $f(v_{i_1}) \neq v_{i_1}$ e $f^{2s+1}(v_{i_1}) \neq f^{2s}(v_{i_1})$ con $1 \leqslant s \leqslant h' - 1$, perchè la f non ha alcun elemento unito ed inoltre che le immagini di v_{i_1} mediante le potenze di esponente pari della f sono vertici di $A_{p,q}$, mentre quelle mediante esponente dispari sono vertici di $A_{2k-p-1, 2k-q-1}$. Supposto di aver ordinato gli elementi di $A_{p,q}$ in modo tale che $f^{2s}(v_{i_1}) = v_{i_{s+1}}$ si ha che

$$c(v_{i_1}) = (v_{i_1} f(v_{i_1}) v_{i_2} f(v_{i_2}) \ldots v_{i_{h'}} f(v_{i_{h'}})) .$$

In conclusione f si decompone in un prodotto di cicli disgiunti di lunghezza pari, ciascuno operante sui vertici di $A'_{p,q} \cup f(A'_{p,q})$, dove $A'_{p,q}$ è il sottoinsieme di ordine h' di $A_{p,q}$ generato dalle immagini di v_{i_1} mediante le prime h' potenze di esponente pari della f.

La Proposizione 5 fornisce una condizione necessaria affinchè un grafo orientato di ordine pari sia autocomplementare. Si prova ora una condizione sufficiente affinchè ciò si verifichi.

Proposizione 6. Se $G = (V, X)$ e $\overline{G} = (V, \overline{X})$ sono due grafi orientati complementari di ordine $2k$ e se esiste una bigezione $g: X \to \overline{X}$ che conserva le adiacenze insieme alla sua inversa g^{-1}, allora esiste un isomorfismo $\varphi = (f, g)$ di G su $\overline{G}$.

Dim. Se v_i è un vertice di V di semigradi (p, q) in G, esistono in G p archi x_r che hanno v_i come primo estremo e q archi x_s che hanno v_i come secondo estremo e ognuno degli archi x_s è adiacente ai p archi x_r. Poichè la bigezione g conserva le adiacenze, esiste un vertice v_j di semigradi (p, q) in $\overline{G}$, che è il primo estremo dei p archi $g(x_r)$ e il secondo estremo dei q archi $g(x_s)$, per i quali risulta che ognuno dei q archi $g(x_s)$ è adiacente ai p archi $g(x_r)$.

Si definisce così un'applicazione $f: V \to V$ che ad ogni vertice $v_i \in V$ di semigradi (p, q) in G associa il vertice $v_j \in V$ di semigradi (p, q) in $\overline{G}$ e quindi di semigradi $(2k - p - 1, 2k - q - 1)$ in G.

L'applicazione f è bigettiva. Infatti, se v_j è un vertice di V di semigradi (p, q) in $\overline{G}$, poichè anche la g^{-1} conserva le adiacenze, si vede subito, ragionando come sopra, che esiste un unico vertice v_i di semigradi (p, q) in G tale che $f(v_i) = v_j$. Giacchè per ogni arco $x = (v_i, v_j) \in X$, risulta $g(x) = \big(f(v_i), f(v_j)\big) \in \overline{X}$, la coppia $\varphi = (f, g)$ è un isomorfismo del grafo orientato G sul suo complementare $\overline{G}$.

Sussiste ora la seguente proprietà dei grafi orientati autocomplementari di ordine dispari.

Proposizione 7. Se $G = (V, X)$ è un grafo orientato autocomplementare di ordine $2k + 1$, per ogni isomorfismo $\varphi = (f, g)$ di G sul suo complementare $\overline{G}$, esiste un unico vertice unito u di semigradi (k, k) e la permutazione f si decompone nel prodotto di un unico ciclo di lunghezza 1 e di cicli di lunghezza pari.

Dim. Si prova inizialmente che se esiste in f un vertice unito u, esso è unico. Se infatti ne esistesse un altro w, l'arco (u, w) sarebbe unito, il che è assurdo perchè G e $\overline{G}$ sono complementari.

Si prova ora che la permutazione f contiene un ciclo di lunghezza 1. Infatti essendo V di ordine $2k + 1$, la f deve contenere necessariamente almeno un ciclo di lunghezza dispari. Si supponga per assurdo che esso abbia lunghezza maggiore di 1 e sia per semplicità il ciclo $(v_r v_s v_t)$. Allora detta h la bigezione di V^2, prolungamento di g a V^2, che ad ogni arco $x = (v_i, v_j) \in V^2$ associa l'arco $h(x) = \big(f(v_i), f(v_j)\big) \in V^2$, sia $l: \overline{X} \to X$ la ridotta della restrizione di h a $\overline{X}$. Pertanto, nell'ipotesi che l'arco $(v_r, v_s) \in X$ si ha $h(v_r, v_s) = g(v_r, v_s) = (v_s, v_t) \in \overline{X}$, $h(v_s, v_t) = l(v_s, v_t) = (v_t, v_r) \in X$, $h(v_t, v_r) = g(v_t, v_r) = (v_r, v_s) \in \overline{X}$, il che è ovviamente assurdo, perchè l'arco (v_r, v_s) non può appartenere ai due grafi complementari G e $\overline{G}$. In modo analogo si perviene allo stesso assurdo, supponendo l'arco $(v_r, v_s) \in \overline{X}$.

Ne segue che f si decompone nel prodotto di un unico ciclo di lunghezza 1 e di cicli di lunghezza pari. In corrispondenza del ciclo di lunghezza 1, esiste un unico vertice unito u e per la Proposizione 3 risulta

$$\mathrm{d}g_G^+(u) + \mathrm{d}g_G^+(f(u)) = 2\,\mathrm{d}g_G^+(u) = 2k\,, \quad \mathrm{d}g_G^-(u) + \mathrm{d}g_G^-(f(u)) = 2\,\mathrm{d}g_G^-(u) = 2k\,,$$

da cui segue che u è di semigradi (k, k).

In conseguenza di quanto si è già detto, l'insieme V si può ripartire in sottoinsiemi disgiunti $A_{p,q}$ costituiti dai vertici che hanno in G gli stessi semigradi (p, q) fra i quali il sottoinsieme $A_{k,k} = f(A_{k,k})$ che risulta di ordine dispari, perchè ogni ciclo che opera sui vertici di $A_{k,k}$ diversi dal vertice unito è di lunghezza pari. In conclusione l'ordine di f è intero positivo pari ed inoltre la f è il prodotto di un unico ciclo di lunghezza 1 per cicli disgiunti di lunghezza pari, ognuno operante sui vertici di $A'_{p,q} \cup f(A'_{p,q})$ con $A'_{p,q} \subseteq A_{p,q}$.

Si provano ora le seguenti proposizioni che caratterizzano i grafi orientati autocomplementari di ordine $2k+1$.

P r o p o s i z i o n e 8. Se $G = (V, X)$ è un grafo orientato autocomplementare di ordine $2k+1$ e se u è il suo vertice unito in un isomorfismo $\varphi = (f, g)$ di G sul suo complementare $\overline{G} = (V, \overline{X})$, posto $V_0 = V - \{u\}$ e X_0 l'insieme degli archi di X privato degli archi per u, il sottografo $H = (V_0, X_0)$ di G è un grafo orientato autocomplementare di ordine $2k$.

D i m. La permutazione f di V, essendo u unito in f, si decompone nel prodotto $f_0(u)$, dove f_0 è la permutazione che opera su V_0 e (u) é il ciclo che muta in sè il vertice unito. Inoltre, se X_u e $\overline{X}_u$ sono i sottoinsiemi degli archi rispettivamente di X e di $\overline{X}$ che hanno un estremo in V_0 e l'altro in (u), risulta $g(X_u) = \overline{X}_u$. Allora si vede subito, posto $\overline{X}_0 = \overline{X} - \overline{X}_u$, che il sottografo $H = (V_0, X_0)$ di G e il sottografo $\overline{H} = (V_0, \overline{X}_0)$ di $\overline{G}$ sono complementari e si ha $g(X_0) = \overline{X}_0$. Segue di qui che, indicata con g_0 la ridotta della restrizione di g a X_0, la coppia $\psi = (f_0, g_0)$ è un isomorfismo di H su $\overline{H}$, ossia che H è un grafo orientato autocomplementare di ordine $2k$.

P r o p o s i z i o n e 9. Se $G = (V, X)$ è un grafo orientato autocomplementare di ordine $2k+1$, detti W il sottoinsieme dei vertici di V di semigradi (k, k) e Y il sottoinsieme degli archi che hanno gli estremi in W, allora il sottografo $F = (W, Y)$ di G è un grafo orientato autocomplementare di ordine dispari.

Dim. Sia $\varphi = (f, g)$ un isomorfismo di G sul suo complementare $\bar{G}=(V, \bar{V})$. Si osserva immediatamente che la permutazione f di V si decompone nel prodotto $h \circ p$ dove h è la permutazione che opera su $V - W$ e p è quella che opera su W, che è un insieme di ordine dispari, per ciò che si è detto nella dimostrazione della Proposizione 7.

Inoltre, detto $\bar{Y}$ il sottoinsieme di $\bar{X}$ che contiene gli archi i cui estremi sono in W, si vede subito che il sottografo $F = (W, Y)$ di G e il sottografo $\bar{F} = (W, \bar{Y})$ di $\bar{G}$ sono complementari. Si verifica poi che $g(Y) = \bar{Y}$, giacchè per ogni arco $x = (v_i, v_j) \in Y$, risulta $g(x) = (p(v_i), p(v_j)) \in \bar{Y}$.

Indicata infine con k la ridotta della restrizione di g a Y, risulta che $\psi = (p, k)$ è un isomorfismo di F su $\bar{F}$ e quindi che il sottografo F di G è un grafo orientato autocomplementare di ordine dispari.

Proposizione 10. Se $G = (V, X)$ e $\bar{G} = (V, \bar{X})$ sono due grafi orientati complementari di ordine $2k + 1$, soddisfacenti alle seguenti condizioni:

(a) V contenga un vertice u di semigradi (k, k) tale che, posto $V_0 = V - \{u\}$ e detti X_0 e $\bar{X}_0$ rispettivamente i sottoinsiemi X e $\bar{X}$ privati degli archi per u, i sottografi $G_0 = (V_0, X_0)$ di G e $\bar{G}_0 = (V_0, \bar{X}_0)$ di $\bar{G}$ siano isomorfi;

(b) se $\varphi_0 = (f_0, g_0)$ è un isomorfismo di G_0 su $\bar{G}_0$, per ogni arco (u, v_i) e (v_j, u) di $X - X_0$ risulti $(u, f(v_i))$ e $(f(v_j), u)$ di $\bar{X} - \bar{X}_0$,

allora esiste un isomorfismo di G su $\bar{G}$ che ammette u come vertice unito.

Dim. Indicata con f la permutazione $f_0(u)$, si può definire la bigezione $g\colon X \to \bar{X}$ in modo tale che la ridotta della restrizione di g a X_0 sia g_0 e che per ogni arco $x = (u, v_i) \in X - X_0$ risulti $g(x) = (u, f_0(v_i)) \in \bar{X} - \bar{X}_0$, mentre per ogni arco $y = (v_j, u) \in X - X_0$ risulti $g(y) = (f_0(v_j), u) \in \bar{X} - \bar{X}_0$.

Ne segue che $\varphi = (f, g)$ é un isomorfismo di G su $\bar{G}$ che ammette u come vertice unito.

Le Proposizioni 8 e 9 danno una condizione necessaria affinchè un grafo orientato G di ordine $2k + 1$ sia autocomplementare, mentre la Proposizione 10 fornisce una condizione sufficiente affinché un grafo orientato G dello stesso ordine sia autocomplementare.

Bibliografia

[1] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[2] F. HARARY and E. M. PALMER, *Graphical enumeration*, Academic Press, New York and London 1973.

[3] G. PINTO, *Sui grafi autocomplementari*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **7** (1981), 397-403.

[4] R. C. READ, *On the number of self-complementary graphs and digraphs*, Math. Soc. **38** (1963), 99-104.

[5] H. WHITNEY, *Congruent graphs and connectivity of graphs*, Amer. Math. J. **54** (1932), 150-168.

Summary

This paper gives a necessary condition and a sufficient condition for a directed graph of even or odd order to be self-complementary.

* * *