Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 195-211

SANDRA FORTE (*)

# Sulla termomeccanica dei fili (**)

## Introduzione

I profondi studi rivolti negli ultimi venti e più anni ad affrontare il problema della deformazione di un continuo generale, tenendo conto di effetti termici, hanno portato ad una sistemazione concettualmente soddisfacente della materia, anche se restano ancora da affrontare gravi e ardui problemi, specialmente riguardanti la trattazione assiomatica.

Nell'intento di portare un qualche contributo all'argomento, si esamina qui, nel caso semplice termoelastico, il moto di un filo perfetto, facendo anche intervenire l'ambiente esterno attraverso un possibile flusso di calore.

Si determinano, innanzi tutto, e senza limitazioni sull'ampiezza delle trasformazioni, le condizioni per la propagazione di onde ordinarie di accelerazione. Si riescono addirittura a determinare i valori delle velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali, mentre si dimostra che non sono possibili onde per le quali le derivate prime della temperatura sono discontinue. Nell'ultima parte ci si occupa di onde infinitesime, scrivendo e discutendo ampiamente la relativa equazione di dispersione.

In appendice si dà un teorema di unicità per i piccoli moti attorno ad una configurazione forzata di equilibrio.

## 1 - Notazioni

Sia $\mathscr{F}$ un filo, $\zeta_R$ un suo piazzamento. Identificheremo $\mathscr{F}$ con $\zeta_R$. Un punto $X$ di $\zeta_R$ è individuato dalla sua ascissa curvilinea $\sigma$, $\sigma \in [0, L]$

$$X = X(\sigma) . \tag{1.1}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematiche Applicate, Facoltà di Ingegneria, Università, Via Diotisalvi 2, 56100 Pisa, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 23-IX-1980.

(dove si è identificato $X$ con il vettore posizione di $X$ rispetto ad una origine prefissata 0). Con $\boldsymbol{T}$ si denota la tangente a $\zeta_R$ in $X$

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\sigma} . \tag{1.2}$$

Sia $[0, \bar{\tau})$ un intervallo di tempo anche illimitato. Con $\zeta_\tau$ si denota il piazzamento di $\mathscr{F}$ all'istante $\tau$ di ascissa curvilinea $s$, $s \in [0, l]$. Con $\boldsymbol{x}$ si denota un punto di $\zeta_\tau$ (identificato con il suo vettore posizione rispetto ad 0)

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}(s, \tau) , \tag{1.3}$$

e con $\boldsymbol{t}$ il versore tangente a $\zeta_\tau$ in $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(s, \tau) = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}}{\partial s} . \tag{1.4}$$

Una deformazione $s$ è una applicazione $s \in C^2$: $[0, L] \times [0, \bar{\tau}) \to \mathbb{R}^+$ tale che: (i) è invertibile per ogni fissato $\tau$, (ii) $s(0, \tau) = 0$, (iii) $\partial s / \partial \sigma > 0$ $\forall \sigma, \tau$.

Una trasformazione $\boldsymbol{x}$ di $\zeta_R$ è un campo vettoriale $\boldsymbol{x} \in C^2$: $[0, L] \times [0, \bar{\tau}) \to V$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\sigma, \tau) = \tilde{\boldsymbol{x}}(s(\sigma, \tau), \tau) . \tag{1.5}$$

Si definisce lo spostamento $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\sigma, \tau) = \boldsymbol{x}(\sigma, \tau) - \boldsymbol{X}(\sigma) , \tag{1.6}$$

la velocità di $X$, $\dot{\boldsymbol{x}}$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\sigma, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \boldsymbol{x}(\sigma, \tau) , \tag{1.7}$$

l'accelerazione di $X$, $\ddot{\boldsymbol{x}}$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(\sigma, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \boldsymbol{x}(\sigma, \tau) . \tag{1.8}$$

Si definisce allungamento unitario

$$\delta = \lambda - 1 , \tag{1.9}$$

ove

$$\lambda = \frac{\partial s}{\partial \sigma} . \tag{1.10}$$

Tra $\lambda$ e $\boldsymbol{u}$ sussiste la seguente relazione

$$\lambda = \sqrt{1 + 2\boldsymbol{T}\cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \sigma}}\,. \tag{1.11}$$

## 2 - Leggi di bilancio

(a) Si denoti con $\varrho = \varrho(s, \tau)$ la densità materiale, per unità di lunghezza, di $\zeta_\tau$ e con $\varrho_0 = \varrho_0(\sigma)$ la densità di $\zeta_R$. Siano $\varrho$ e $\varrho_0$ funzioni continue nelle loro variabili.

Vale la legge di conservazione della massa

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \varrho_0\,\mathrm{d}\sigma = \int_{s_0}^{s_1} \varrho\,\mathrm{d}s \qquad \forall[\sigma_0, \sigma_1] \subseteq [0, L]\,, \tag{2.1}$$

dove $[s_0, s_1]$ è l'immagine di $[\sigma_0, \sigma_1]$, tramite la deformazione, all'istante $\tau$. Con il cambiamento di variabili $s = s(\sigma, \tau)$, per l'arbitrarietà di $\sigma_0$, $\sigma_1$ si giunge alla forma locale di (2.1)

$$\varrho\lambda = \varrho_0\,. \tag{2.2}$$

(b) Siano $\boldsymbol{v}$ ed $\boldsymbol{a}$ le espressioni spaziali (euleriane) della velocità e della accelerazione rispettivamente. È assegnata una coppia di applicazioni, sistema di forze, $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{b})$ tali che: (i) $\boldsymbol{S}\colon [0, l]\times[0, \bar{\tau}) \to V$ con $s \to S(s, \tau)$, $C^1$ su $[0, l]$; (ii) $\boldsymbol{b}\colon V\times[0, l]\times[0, \bar{\tau}) \to V$, con $s \mapsto b(v, s, \tau)$ continua su $[0, l]$; $\boldsymbol{S}$ rappresenta la tensione nel filo, $\boldsymbol{b}$ la densità lineare delle azioni esercitate sul filo dall'ambiente esterno; $\boldsymbol{b}$ può anche dipendere dalla velocità dei punti di $\mathscr{F}$, non volendo escludere che il moto possa avvenire in un mezzo resistente.

Vale la seguente legge di bilancio (della quantità di moto)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_{s_0}^{s_1} \varrho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}s = \int_{s_0}^{s_1} \boldsymbol{b}\,\mathrm{d}s + \boldsymbol{S}(s_1) - \boldsymbol{S}(s_0)\,, \tag{2.3}$$

per ogni $[s_0, s_1] \subset [0, l]$.

Da (2.2), per le ipotesi di regolarità fatte sugli integrandi e l'arbitrarietà di $[s_0, s_1]$ si giunge alla forma locale di (2.3)

$$\varrho\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial s}\,. \tag{2.4}$$

In forma materiale (lagrangiana)

$$(2.4)' \qquad \varrho_0\,\ddot{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{b}} + \frac{\partial}{\partial\sigma}\overline{\boldsymbol{S}}\,, \qquad \text{oppure} \qquad \varrho_0\,\ddot{\boldsymbol{u}} = \overline{\boldsymbol{b}} + \frac{\partial}{\partial\sigma}\overline{\boldsymbol{S}},$$

dove $\overline{\boldsymbol{b}} = \lambda\boldsymbol{b}(v\,;\, s(\sigma,\tau),\,\tau)$ e $\overline{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}(s(\sigma,\tau),\,\tau)$ .

(c) Se i momenti sono generati solo dal sistema di forza $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{b}$, il filo è perfettamente flessibile. In questo caso vale la legge di bilancio (del momento della quantità di moto)

$$(2.5) \qquad \frac{d}{d\tau}\int_{s_0}^{s_1}(x-0)\wedge\boldsymbol{v}\varrho\,ds = \int_{s_0}^{s_1}(x-0)\wedge\boldsymbol{b}\,ds + (x_1-0)\wedge\boldsymbol{S}(s_1) - (x_0-0)\wedge\boldsymbol{S}(s_0)\,,$$

$\forall \boldsymbol{x}_0,\, \boldsymbol{x}_1$ di $\zeta_\tau$ di ascissa $s_0,\, s_1$ rispettivamente, con $s_0 < s_1$.

Utilizzando (2.1) e (2.4) per l'arbitrarietà di $(s_0, s_1)$ e la continuità dell'integrando, si ottiene la forma locale di (2.5)

$$(2.6) \qquad \boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{S} = 0\,, \qquad \text{da cui} \qquad (2.7) \qquad \boldsymbol{S} = \alpha\boldsymbol{t}\,, \qquad \alpha\in\mathbb{R}\,.$$

Un filo è caratterizzato da

$$(2.8) \qquad \alpha > 0\,.$$

In forma materiale (2.7)

$$(2.9) \qquad \overline{\boldsymbol{S}} = \frac{\alpha}{\lambda}\,\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\sigma}\,.$$

(d) Sia $\vartheta$ la temperatura assoluta del filo: $\vartheta = \vartheta(s,\tau)$, $\vartheta\colon [0, l] \times [0, \bar{\tau}) \to \mathbb{R}^+$, funzione $C^2$ dei suoi argomenti. $\vartheta_R$ sarà la temperatura, omogenea, del filo nella configurazione di riferimento $\zeta_R$. Con $\vartheta_e$ indicheremo la temperatura, omogenea, dell'ambiente esterno, $\vartheta_e$ funzione nota del tempo.

Si postula l'esistenza di una energia interna $\mathscr{E}$ dipendente da una densità lineare di energia $\varepsilon$: $\mathscr{E} = \int_{s_0}^{s_1}\varrho\varepsilon\,ds$, e di una potenza termica $Q$: $Q = \int_{s_0}^{s_1} h\,ds + q(s_1,\tau) - q(s_0,\tau)$, con $q = q(s,\tau)$ funzione $C^1$ di $s$ e $h = h(s,\tau)$ funzione continua di $s$; $h$ rappresenta la quantità di calore assorbita dal filo per unità di tempo e $q(s_1,\tau) - q(s_0,\tau)$ è il flusso di calore attraverso gli estremi $x_1$ e $x_0$ della porzione di filo in esame.

Vale la seguente legge di bilancio dell'energia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big[\int_{s_0}^{s_1}\tfrac{1}{2}\varrho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}s+\int_{s_0}^{s_1}\varrho\varepsilon\,\mathrm{d}s\Big] \tag{2.10}$$

$$=\int_{s_0}^{s_1}h\,\mathrm{d}s+\int_{s_0}^{s_1}\frac{\partial q}{\partial s}\,\mathrm{d}s+\int_{s_0}^{s_1}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}s+\boldsymbol{S}(s_1)\cdot v(s_1)-\boldsymbol{S}(s_0)\cdot v(s_0)\,,$$

$$=\int_{s_0}^{s_1}h\,\mathrm{d}s+\int_{s_0}^{s_1}\frac{\partial q}{\partial s}\,\mathrm{d}s+\int_{s_0}^{s_1}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}s+\int_{s_0}^{s_1}\frac{\partial}{\partial s}\big(\boldsymbol{S}(s)\cdot\boldsymbol{v}(s)\big)\,\mathrm{d}s\,.$$

Utilizzando il cambiamento di variabile $s=s(\sigma,\tau)$, per la arbitrarietà di $(s_0, s_1)$ e la continuità dell'integrando, si giunge alla forma locale di (2.10) semplificata con l'uso di (2.4)

$$\varrho_0\,\dot{\varepsilon}=h+\frac{\partial q}{\partial s}+\boldsymbol{S}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial s}\,. \tag{2.11}$$

L'espressione materiale di (2.11)

$$\varrho_0\,\dot{\varepsilon}=\overline{h}+\frac{\partial\overline{q}}{\partial\sigma}+\overline{S}\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}\,\dot{\boldsymbol{x}}\,, \tag{2.12}$$

dove $\overline{h}=\lambda h(s(\sigma,\tau),\tau)$ e $\overline{q}=q(s(\sigma,\tau),\tau)$.

(2.12) può essere riscritta utilizzando la relazione che si ottiene derivando rispetto al tempo l'identità $\lambda^2=|\partial\tilde{\boldsymbol{x}}/\partial\sigma|^2$

$$\varrho_0\,\dot{\varepsilon}=\overline{h}+\frac{\partial\overline{q}}{\partial\sigma}+\alpha\dot{\lambda}\,. \tag{2.13}$$

(e) Si postula l'esistenza di una funzione $\mathscr{H}$, l'entropia, dipendente da una densità lineare $\eta$, $\mathscr{H}=\int_{s_0}^{s_1}\varrho\eta\,\mathrm{d}s$. Per il secondo principio della Termodinamica

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_{s_0}^{s_1}\varrho\eta\,\mathrm{d}s-\int_{s_0}^{s_1}\frac{h}{\vartheta}\,\mathrm{d}s+\frac{q(s_0)}{\vartheta(s_0)}-\frac{q(s_1)}{\vartheta(s_1)}\geqslant 0\,, \tag{2.14}$$

che in forma locale

$$\varrho\dot{\eta}-\frac{h}{\vartheta}-\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{q}{\vartheta}\geqslant 0\,. \tag{2.15}$$

L'espressione molecolare (lagrangiana) di (2.15)

$$\varrho_0 \dot{\eta} - \frac{\bar{h}}{\bar{\vartheta}} - \frac{\partial}{\partial\sigma} \frac{\bar{q}}{\bar{\vartheta}} \geqslant 0 , \tag{2.16}$$

dove $\bar{\vartheta} = \vartheta(s(\sigma, \tau), \tau)$.

Moltiplicando ambo i membri di (2.16) per $\bar{\vartheta}$ e utilizzando (2.13)

$$\varrho_0 \bar{\vartheta} \dot{\eta} - \varrho_0 \dot{\varepsilon} + \alpha\dot{\lambda} + \frac{\bar{q}}{\bar{\vartheta}} \frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\sigma} \geqslant 0 . \tag{2.17}$$

Facendo intervenire in (2.17) l'energia libera $\psi = \varepsilon - \eta\vartheta$ in luogo di $\varepsilon$, otteniamo la disequazione di Clausius-Duhem

$$\varrho_0(\dot{\psi} + \eta\dot{\bar{\vartheta}}) - \alpha\dot{\lambda} - \frac{\bar{q}}{\bar{\vartheta}} \frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\sigma} \leqslant 0 . \tag{2.18}$$

Definiamo *filo ideale* un filo perfettamente flessibile, tale che

$$\varrho_0(\dot{\psi} + \eta\dot{\bar{\vartheta}}) - \alpha\dot{\lambda} = 0 , \tag{2.19}$$

per ogni processo termodinamico a partire da $\zeta_R$.

Per un filo ideale quindi $\bar{q}(\partial\bar{\vartheta}/\partial\sigma) \geqslant 0$.

### 3 - Fili ideali termoelastici

Un filo ideale è detto *termoelastico* se

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\lambda, \bar{\vartheta}, \sigma) , \qquad \eta = \hat{\eta}(\lambda, \bar{\vartheta}, \sigma) , \qquad \psi = \hat{\psi}(\lambda, \bar{\vartheta}, \sigma) , \qquad \alpha = \hat{\alpha}(\lambda, \bar{\vartheta}, \sigma) . \tag{3.1}$$

Per un filo termoelastico

$$\varrho_0 \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\lambda} \dot{\lambda} + \varrho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\vartheta}} \dot{\bar{\vartheta}} + \varrho_0 \eta \dot{\bar{\vartheta}} - \alpha\dot{\lambda} = 0 .$$

Per l'arbitrarietà di $\dot{\lambda}$ e $\dot{\vartheta}$

$$\alpha = \varrho_0 \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\lambda} > 0 , \qquad \eta = -\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{\vartheta}} . \tag{3.2}$$

Per un filo termoelastico l'equazione di moto si riscrive

$$\varrho_0 \ddot{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{b}} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma}\right) = \overline{\boldsymbol{b}} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma} + \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial \sigma^2} \tag{3.3}$$

$$= \overline{\boldsymbol{b}} - \frac{1}{\lambda^2}\lambda_\sigma \hat{\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma}\left[\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \lambda}\lambda_\sigma + \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \vartheta}\vartheta_\sigma + \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \sigma}\right] + \frac{\hat{\alpha}}{\lambda}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial \sigma^2}\ (^1).$$

Osservazione. Dall'identità $\lambda^2 = |\partial \boldsymbol{x}/\partial \sigma|^2$ derivando rispetto a $\sigma$ si ottiene

$$\lambda_\sigma = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial \sigma^2} = \boldsymbol{t}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial \sigma^2}; \tag{3.4}$$

derivando rispetto a $\tau$

$$\lambda_\tau = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}{\partial \sigma} = \boldsymbol{t}\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}{\partial \sigma}. \tag{3.5}$$

Sostituendo (3.4) in (3.3)

$$\boldsymbol{x} - \frac{\hat{\alpha}}{\varrho_0 \lambda}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{\varrho_0 \lambda}\left(\frac{\hat{\alpha}}{\lambda} - \hat{\alpha}_\lambda\right)\left(\boldsymbol{t}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial \sigma^2}\right)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma} = \frac{\overline{\boldsymbol{b}}}{\varrho_0} + \frac{1}{\lambda \varrho_0}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma}[\hat{\alpha}_{\bar{\theta}}\bar{\theta}_\sigma + \hat{\alpha}_\sigma],$$

ovvero

$$\ddot{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{\varrho_0 \lambda}\left[\hat{\alpha}\mathbf{1} + \frac{1}{\lambda}\left(\hat{\alpha}_\lambda - \frac{\hat{\alpha}}{\lambda}\right)(\boldsymbol{x}_\sigma \otimes \boldsymbol{x}_\sigma)\right]\boldsymbol{x}_{\sigma\sigma} = \frac{\overline{\boldsymbol{b}}}{\varrho_0} + \frac{1}{\lambda \varrho_0}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma}[\hat{\alpha}_{\bar{\theta}}\bar{\theta}_\sigma + \hat{\alpha}_\sigma]. \tag{3.6}$$

Sia $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{\varrho_0 \lambda}\left[\hat{\alpha}\mathbf{1} + \frac{1}{\lambda}\left(\hat{\alpha}_\lambda - \frac{\hat{\alpha}}{\lambda}\right)(\boldsymbol{x}_\sigma \otimes \boldsymbol{x}_\sigma)\right];$$

---

(1) Talvolta conviene scrivere l'equazione del moto in termini dello spostamento anzichè della trasformazione $\varrho_0 \ddot{\boldsymbol{u}} = \overline{\boldsymbol{b}} + (\partial/\partial\sigma)[(\alpha/\lambda)(\partial \boldsymbol{u}/\partial \sigma + \boldsymbol{T})]$, ovvero, grazie alle equazioni costitutive (3.2),

$$\varrho_0 \ddot{\boldsymbol{u}} = \overline{\boldsymbol{b}} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{\varrho_0}{\lambda}\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \sigma} + \boldsymbol{T}\right)\right]. \tag{3.3'}$$

(3.6) diviene

$$x - Vx_{\sigma\sigma} = \frac{\overline{b}}{\varrho_0} + \frac{1}{\lambda\varrho_0}\frac{\partial x}{\partial\sigma}[\hat{\alpha}_{\bar{\vartheta}}\vartheta_\sigma + \hat{\alpha}_\sigma]\,. \tag{3.7}$$

Si osserva che $V$ è un tensore simmetrico e $x_\sigma$ è un suo autovettore, corrispondente all'autovalore $(\hat{\alpha}/\varrho_0)\,\lambda$; infatti

$$Vx_\sigma = \frac{1}{\varrho_0\lambda}[\hat{\alpha}x_\sigma + \frac{1}{\lambda}(\,\hat{\alpha}_\lambda - \frac{\hat{\alpha}}{\lambda})(x_\sigma\cdot x_\sigma)\,x_\sigma]$$

$$= \frac{1}{\varrho_0\lambda}[\hat{\alpha}x_\sigma + \lambda(\,\hat{\alpha}_\lambda - \frac{\hat{\alpha}}{\lambda})\;x_\sigma] = \frac{\hat{\alpha}}{\varrho_0}\,\lambda x_\sigma\,.$$

Inoltre un qualsiasi vettore ortogonale a $x_\sigma$ è autovettore di $V$ corrispondente all'autovalore $\hat{\alpha}/\varrho_0\lambda > 0$.

Riscriviamo l'equazione del calore per un filo termoelastico. Supponiamo $q = \hat{q}(\lambda, \bar{\vartheta}, \bar{\vartheta}_\sigma, \sigma)$, $\bar{h} = \bar{h}(\bar{\vartheta} - \vartheta_e, \sigma, \tau)$, con $h(0, \sigma)=0$, $h$ funzione decrescente di $\bar{\vartheta} - \vartheta_e$.

In queste ipotesi

$$\varrho_0\,\hat{\varepsilon}_\lambda\,\dot{\lambda} + \varrho_0\,\hat{\varepsilon}_{\bar{\vartheta}}\,\dot{\bar{\vartheta}} = \bar{h} + \hat{q}_\lambda\,\lambda_\sigma + \hat{q}_{\bar{\vartheta}}\bar{\vartheta}_\sigma + \hat{q}_{\bar{\vartheta}}\bar{\vartheta}_{\sigma\sigma} + \hat{q}_\sigma + \hat{\sigma}\dot{\lambda}\,,$$

$$\hat{\varepsilon}_{\bar{\vartheta}}\;\dot{\bar{\vartheta}} = (\frac{\hat{\alpha}}{\varrho_0} - \hat{\varepsilon}_\lambda)\;\dot{\lambda} + \frac{1}{\varrho_0}\,\hat{q}_\lambda\,\lambda_\sigma + \frac{1}{\varrho_0}\,\hat{q}_{\bar{\vartheta}}\bar{\vartheta}_\sigma + \frac{1}{\varrho_0}\,\hat{q}_{\bar{\vartheta}_\sigma}\,\bar{\vartheta}_{\sigma\sigma} + \frac{1}{\varrho_0}\,\hat{q}_\sigma + \frac{1}{\varrho_0}\,\bar{h}\,,$$

ovvero

$$\hat{\varepsilon}_{\bar{\vartheta}}\dot{\bar{\vartheta}} = (\frac{\hat{\alpha}}{\varrho_0} - \hat{\varepsilon}_\lambda)\,(t\cdot\frac{\partial\dot{x}}{\partial\sigma}) + \frac{1}{\varrho_0}\,\hat{q}_\lambda\,(t\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\sigma^2}) + \frac{1}{\varrho_0}\,\hat{q}_{\bar{\vartheta}}\,\bar{\vartheta}_\sigma + \frac{1}{\varrho_0}\,\hat{q}_{\bar{\vartheta}_\sigma}\bar{\vartheta}_{\sigma\sigma} + \frac{1}{\varrho_0}\,\hat{q}_\sigma + \frac{1}{\varrho_0}\,\bar{h}\,. \tag{3.8}$$

Una forma alternativa dell'equazione del calore si ottiene tenendo conto delle equazioni costitutive (3.2). Valgono le seguenti identità

$$\varepsilon = \hat{\psi} - \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\vartheta}}\,\bar{\vartheta}\,,\qquad \dot{\varepsilon} = \dot{\hat{\psi}} - \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{\vartheta}}\,\dot{\bar{\vartheta}} - (\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{\vartheta}})^{\cdot}\,\bar{\vartheta} = \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\lambda}\,\dot{\lambda} - (\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{\vartheta}})^{\cdot}\,\bar{\vartheta}\,. \tag{3.9}$$

Grazie a (3.9) possiamo riscrivere l'equazione del calore (2.13) nella forma

$$\varrho_0\,(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\lambda}\,\dot{\lambda} - (\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{\vartheta}})^{\cdot}\,\bar{\vartheta}) = \bar{h} + \frac{\partial\bar{q}}{\partial\sigma} + \varrho_0\,\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\lambda}\,\dot{\lambda}\,,$$

ovvero

$$-\varrho_0\,(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{\vartheta}})\cdot\bar{\vartheta}=\bar{h}+\frac{\partial\bar{q}}{\partial\sigma}\,. \tag{3.10}$$

Il sistema (3.7) e (3.10) costituisce un sistema differenziale per la trasformazione $\boldsymbol{x}$ e la temperatura $\bar{\vartheta}$ che va risolto con opportune condizioni iniziali e al contorno. La difficoltà che si incontra nella risoluzione di tale sistema sta nella sua natura non lineare.

## 4 - Propagazione di onde di discontinuità in un filo termoelastico

Supponiamo $\boldsymbol{x}$ e $\bar{\vartheta}$ continue con le loro derivate prime, ma con discontinuità di prima specie nelle derivate seconde in un punto $P$ di $\zeta_\tau$. Sia $P^*$ il corrispondente punto di $\zeta_R$ di ascissa curvilinea $\sigma^*$. In generale $\sigma^*$ sarà funzione di $\tau$.

Sia $U=\dot{\sigma}^*$ la velocità di propagazione della discontinuità. Inoltre sia $\boldsymbol{\Lambda}=[\partial^2\boldsymbol{x}/\partial\sigma^2]$ il vettore caratteristico della discontinuità di $\boldsymbol{x}$ attraverso $P^*$.

Per la relazione di compatibilità cinematica di Hugoniot-Hadamard è

$$[\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial\tau\,\partial\sigma}]=-U\boldsymbol{\Lambda}\,,\qquad [\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial\tau^2}]=U^2\boldsymbol{\Lambda}\,.$$

Dalla equazione (3.7)

$$U^2\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{0}\,, \tag{4.1}$$

essendo il secondo membro di (3.7) continuo.

Sia $\Lambda^\vartheta=[\partial^2\bar{\vartheta}/\partial\sigma^2]$ lo scalare caratteristico della discontinuità di $\bar{\vartheta}$ attraverso $P^*$.

Per la relazione di compatibilità cinematica di Hugoniot-Hadamard è

$$[\frac{\partial^2\bar{\vartheta}}{\partial\tau\,\partial\sigma}]=-U\Lambda^\vartheta,\qquad [\frac{\partial^2\bar{\vartheta}}{\partial\tau^2}]=U^2\Lambda^\vartheta.$$

Allora da (3.8)

$$\frac{1}{\varrho_0}\,\hat{q}_{\bar{\vartheta}_\sigma}\Lambda^\vartheta=[U\,(\frac{\hat{\alpha}}{\varrho_0}-\hat{\alpha}_\lambda)-\frac{1}{\varrho_0}\,\hat{q}_\lambda]\,(\boldsymbol{t}\cdot\Lambda)\,. \tag{4.2}$$

(4.1) insieme a (4.2)

$$(U^2\mathbf{\Lambda} - \boldsymbol{V})\mathbf{\Lambda} = 0\,, \qquad (4.3)$$

$$\frac{1}{\varrho_0}\,\hat{q}_{\bar{\vartheta}_\sigma}\,\Lambda^\vartheta = [U(\frac{\hat{\alpha}}{\varrho_0} - \hat{\alpha}_\lambda) - \frac{1}{\varrho_0}\,\hat{q}_\lambda]\,(\boldsymbol{t}\cdot\mathbf{\Lambda})\,;$$

da (4.3), segue che $\det(U^2\mathbf{\Lambda} - \boldsymbol{V}) = 0$ ovvero

$$U = \sqrt{\frac{\hat{\alpha}_\lambda}{\varrho_0}}\,, \qquad (4.4) \qquad \text{oppure} \qquad U = \sqrt{\frac{\hat{\alpha}}{\varrho_0\,\lambda}}\,. \qquad (4.5)$$

Nel primo caso $\mathbf{\Lambda}$ deve essere parallelo a $\boldsymbol{x}_\sigma$ (o che è lo stesso a $\boldsymbol{t}$). Nel secondo caso $\mathbf{\Lambda}$ è ortogonale a $\boldsymbol{x}_\sigma$. Si hanno così nel primo caso, onde longitudinali meccaniche con velocità di propagazione $U = \sqrt{(\hat{\alpha}_\lambda/\varrho_0)}$.

Lo scalare caratteristico delle onde termiche

$$\Lambda^\vartheta = \frac{1}{\hat{q}_{\bar{\vartheta}_\sigma}}\,[\sqrt{\frac{\hat{\alpha}_\lambda}{\varrho_0}}\,(\hat{\alpha} - \varrho_0\,\hat{\alpha}_\lambda) - \hat{q}_\lambda]\,|\mathbf{\Lambda}| \qquad (4.6)$$

è proporzionale al modulo del vettore caratteristico dell'onda meccanica.

Nel secondo caso si hanno onde trasversali puramente meccaniche con velocità $U = \sqrt{\hat{\alpha}/\varrho_0\,\lambda}$.

Osservazione. Si potrebbe pensare che un legame più complesso di (4.6) tra $\mathbf{\Lambda}$ e $\Lambda^\vartheta$ si possa ottenere in ipotesi meno restrittive sulla continuità delle derivate prime di $\bar{\vartheta}$. Si dimostra tuttavia che se il materiale è conduttore definito (ovvero $\partial\hat{q}/\partial\bar{\vartheta}_\sigma > 0$), $[\bar{\vartheta}_\sigma] = 0$ (²).

Innanzi tutto, si applichi la formula di Kotchine al bilancio dell'energia

$$-\tfrac{1}{2}\,U[\varrho_0\,|\dot{\boldsymbol{x}}|^2] - U[\varrho_0\,\varepsilon] = [q] + [\overline{\boldsymbol{S}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}]\,. \qquad (4.7)$$

Nelle ipotesi in cui ci si è posti $[\bar{\vartheta}] = 0$, $[\partial\boldsymbol{x}/\partial\sigma] = \mathbf{0}$ (quindi $[\lambda] = 0$), $[\dot{\boldsymbol{x}}] = 0$, $[\varrho_0] = 0$; $[\varepsilon] = 0$, $[\alpha] = 0$, essendo $\varepsilon$, $\alpha$ funzioni regolari di $\lambda$, $\bar{\vartheta}$, $\sigma$. Quindi da (4.7) $[q] = 0$.

Dimostriamo che se $[q] = 0$, necessariamente $[\bar{\vartheta}_\sigma] = 0$. Poichè $q$ è una funzione $C^1$ dei suoi argomenti

$$\begin{aligned}[q] = q^+ - q^- &= q(\bar{\vartheta}_\sigma{}^+) - q(\bar{\vartheta}_\sigma{}^-)\\ &= q(\bar{\vartheta}_\sigma{}^- + [\bar{\vartheta}_\sigma]) - q(\bar{\vartheta}_\sigma{}^-)\,.\end{aligned}$$

(²) Un teorema generale è stato dimostrato da Coleman e Gurtin [**1**].

Consideriamo la funzione $\varphi = \varphi(y)$

$$\varphi(y) = q(\bar{\vartheta}_\sigma^- + y) - q(\bar{\vartheta}_\sigma^-) , \qquad \varphi(0) = 0 .$$

Se per assurdo $[\bar{\vartheta}_\sigma] \neq 0$ per $y = [\bar{\vartheta}_\sigma] \neq 0$, $\varphi([\bar{\vartheta}_\sigma]) = 0$. Allora, per il teorema di Rolle, esiste $\xi$, $0 < \xi < [\bar{\vartheta}_\sigma]$ (oppure $[\bar{\vartheta}_\sigma] < \xi < 0$) tale che $\varphi'(\xi) = \partial\hat{q}/\partial\bar{\vartheta}_\sigma|_{\bar{\vartheta}_\sigma=\xi} = 0$, in contrasto con l'ipotesi che $q$ sia una funzione strettamente monotona di $\bar{\vartheta}_\sigma$.

## 5 - Piccoli moti attorno ad una configurazione di equilibrio

Supponiamo $\zeta_R$ configurazione di equilibrio, assegnata, sotto un sistema di forze $\boldsymbol{b}_R$, $\alpha_0 = \varrho_0(\partial\hat{\psi}/\partial\lambda)|_{\lambda=1,\ \bar{\vartheta}=\vartheta_R}$, $\boldsymbol{S}_0 = \alpha_0 \boldsymbol{T}$, con $\alpha_0$, $\boldsymbol{T}$ funzioni assegnate di $\sigma$, soddisfacenti l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}_0}{\mathrm{d}\sigma} + \boldsymbol{b}_R = 0 .$$

Si cercano soluzioni del sistema (3.3)', (3.10) del tipo

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\sigma, \tau; \xi) \doteq \boldsymbol{u}_1 \xi , \qquad \bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(\sigma, \tau; \xi) \doteq \vartheta_R + \vartheta_1 \xi$$

con $\xi$ conveniente parametro che misura la piccolezza della deformazione. In questa ipotesi

$$\lambda = \frac{\partial s}{\partial\sigma} = \sqrt{1 + 2\boldsymbol{T}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\sigma} + \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\sigma}} \doteq 1 + \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}_1\xi = 1 + \lambda_1\xi , \qquad s \doteq \sigma + s_1\xi ,$$

dove $\partial s_1/\partial\sigma = \lambda_1$. Inoltre

$$t = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\sigma} + \boldsymbol{T}\right) \doteq \boldsymbol{T} + \boldsymbol{t}_1\xi , \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{t}_1 = \frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial\sigma} - \lambda_1\boldsymbol{T} . \tag{5.1}$$

Da (5.1), moltiplicando scalarmente ambo i membri per $\boldsymbol{t}$ otteniamo

$$\lambda = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\sigma}\cdot\boldsymbol{t} + \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{t} .$$

Sostituendo a $\lambda$, $\partial\boldsymbol{u}/\partial\sigma$, $\boldsymbol{t}$ le rispettive espressioni linearizzate

$$\lambda_0 = 1 , \qquad \lambda_1 = \left(\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial\sigma} + \boldsymbol{t}_1\right)\cdot\boldsymbol{T} .$$

Si osservi che, essendo $\boldsymbol{t}$ di modulo unitario,

$$\boldsymbol{t}_1 \cdot \boldsymbol{T} = 0\,, \qquad \text{perciò} \qquad \lambda_1 = \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial \sigma} \cdot \boldsymbol{T}\,.$$

Poniamo $\alpha \doteq \alpha_0 + \alpha_1 \xi$. Allora

$$\boldsymbol{S} = \alpha \boldsymbol{t} \doteq \alpha_0 \boldsymbol{T} + [\alpha_0 (\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial \sigma} - \lambda_1 \boldsymbol{T}) + \alpha_1 \boldsymbol{T}]\xi\,.$$

Sia inoltre $\overline{\boldsymbol{b}} \doteq \boldsymbol{b}_R + \boldsymbol{b}_1 \xi$. Allora l'equazione (2.4)$'$ ha come approssimazione al primo ordine

$$\varrho_0 \ddot{\boldsymbol{u}}_1 = \boldsymbol{b}_1 + \frac{\partial}{\partial \sigma} \{\alpha_0 [\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial \sigma} - (\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial \sigma} \cdot \boldsymbol{T}) \boldsymbol{T}] + \alpha_1 \boldsymbol{T}\}\,.$$

Ricordiamo che $\alpha = \varrho_0 (\partial \hat{\psi} / \partial \lambda)$ è una funzione di $\xi$ tramite $\lambda$ e $\vartheta$. Allora

$$\alpha_0 = \varrho_0 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \lambda} \Big|_{(1, \vartheta_R, \sigma)}\,, \qquad \alpha_1 = \varrho_0 (\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \lambda^2} \Big|_{(1, \vartheta_R, \sigma)} \lambda_1 + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \bar{\vartheta} \partial \lambda} \Big|_{(1, \vartheta_R, \sigma)} \vartheta_1)\,.$$

Supponiamo che, come suggerito dall'esperienza, $\alpha$ sia una funzione crescente di $\lambda$

$$k = k(\sigma) := \varrho_0 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \lambda^2} \Big|_{(1, \vartheta_R, \sigma)} > 0\,, \tag{5.2}$$

e che $\alpha$ sia una funzione decrescente della temperatura

$$\nu = \nu(\sigma) := \varrho_0 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \bar{\vartheta} \partial \lambda} \Big|_{(1, \vartheta_R, \sigma)} < 0\,. \tag{5.3}$$

L'equazione dei piccoli moti diviene

$$\varrho_0 \ddot{\boldsymbol{u}}_1 = \boldsymbol{b}_1 + \frac{\partial}{\partial \sigma} \{\alpha_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial \sigma} + (k - \alpha_0)(\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial \sigma} \cdot \boldsymbol{T}) \boldsymbol{T} + \nu \vartheta_1 \boldsymbol{T}\}\,. \tag{5.4}$$

Troviamo la linearizzazione dell'equazione del calore (3.10).

Sia $c = -\varrho \bar{\vartheta} (\partial^2 \hat{\psi} / \partial \bar{\vartheta}^2)$ il calore specifico per unità di lunghezza. Si suppone $c > 0$. Sia $\vartheta_e \equiv \vartheta_R$, $h = \bar{h}(\vartheta - \vartheta_e, \sigma, \tau) \doteq h_1 \xi$, dove $h_1 = \partial \bar{h} / \partial (\vartheta - \vartheta_e)|_{\xi_R} \vartheta = -a\vartheta_1$. Per le ipotesi fatte su $\bar{h}$, $a$ risulta non negativo. Supponiamo inoltre, secondo l'ipotesi classica, $q = \gamma(\partial\bar{\vartheta}/\partial\sigma)$, $\gamma = \gamma(\sigma, \tau) > 0$. Allora

$$q = \bar{q}(\sigma, \tau) \doteq q_1 \xi = \gamma_0 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \sigma} \xi\,, \qquad \gamma_0 > 0\,. \tag{5.5}$$

In prima approssimazione il problema diviene

$$\begin{aligned} &\varrho_0 \ddot{\boldsymbol{u}}_1 = \boldsymbol{b}_1 + \frac{\partial}{\partial\sigma}\{\alpha_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial\sigma} + (k - \alpha_0)(\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial\sigma}\cdot \boldsymbol{T})\ \boldsymbol{T} + \nu\vartheta_1 \boldsymbol{T}\}\,, \\ &-\vartheta_R \nu \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial\tau\,\partial\sigma}\cdot \boldsymbol{T} + c\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\tau} = -a\vartheta_1 + \frac{\partial}{\partial\sigma}\gamma_0 \frac{\partial\vartheta_1}{\partial\sigma}\,, \end{aligned} \tag{5.6}$$

con le opportune approssimazioni lineari delle condizioni iniziali e al contorno. (5.6) costituisce un sistema di equazioni lineari in $\boldsymbol{u}_1$ e $\vartheta_1$.

Osservazione. Sia $\boldsymbol{Q}$ il tensore simmetrico: $\boldsymbol{Q} = \alpha_0 \mathbf{1} + (k - \alpha_0)\, \boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{T}$; $\boldsymbol{Q}$ è definito positivo. Infatti nel riferimento $\{X;\, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ della tangente, normale e binormale a $\zeta_R$ in $X$

$$\forall \boldsymbol{z} \in V \qquad \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z} = k z_1^2 + \alpha_0(z_2^2 + z_3^2) > 0\,.$$

Supponiamo $\boldsymbol{T} =$ cost, $\nu$, $\alpha_0$ costanti, forze di massa nulle. Proiettando l'equazione (5.6) secondo un vettore $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N} \perp \boldsymbol{T}$, la componente trasversale del moto $u_N$ secondo $\boldsymbol{N}$ soddisfa l'equazione

$$\varrho_0 \ddot{u}_N = \alpha_0 \frac{\partial^2 u_N}{\partial\sigma^2}\,.$$

Tale equazione, che non coinvolge la temperatura, è l'equazione delle onde di d'Alembert con velocità $v = \sqrt{\alpha_0/\varrho_0}$, in accordo con (4.5) ($\lambda = 1$ trattandosi di piccoli moti attorno alla configurazione di riferimento).

Proiettando $(5.6)_1$ secondo la tangente, la componente longitudinale del moto $\boldsymbol{u}$ secondo $\boldsymbol{T}$ deve soddisfare il sistema.

$$\begin{aligned} &\varrho_0 \ddot{u}_T = k_0 \frac{\partial^2 u_T}{\partial\sigma^2} + \nu \frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}\,, \\ &-\vartheta\ \nu \frac{\partial^2 u_T}{\partial\tau\,\partial\sigma} + c\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = -a\,\vartheta + \gamma \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\sigma^2}\,. \end{aligned} \tag{i}$$

Per quanto riguarda quindi la componente longitudinale del moto, se $\nu \neq 0$ le equazioni del sistema (i) sono accoppiate. Nel caso $\nu = 0$, cioè nel caso in cui gli sforzi siano indipendenti dalla temperatura, ritroviamo l'equazione delle onde di D'Alembert con velocità $v = \sqrt{k/\varrho_0}$, in accordo con (4.4) dove $k = \alpha_\lambda|_{\zeta_R}$.

Nel caso $\nu < 0$ cerchiamo una soluzione di (i) del tipo

$$u = U \exp[i(\omega\tau - p\sigma)]\,, \qquad \vartheta = \Theta \exp[i(\omega\tau - p\sigma)]\,,$$

con $U$, $\Theta$ costanti reali, $w$ costante reale, $p$ costante complessa.

Le soluzioni cercate debbono soddisfare il sistema

$$-\varrho_0 U\omega^2 = -kp^2 U - ip\Theta\nu\,, \qquad -\vartheta_R \nu p\omega U + c\Theta i\omega = -a\Theta - \gamma_0 p^2 \Theta\,,$$

ovvero

$$\text{(ii)} \qquad (kp^2 - \varrho_0\omega^2)\,U + ip\nu\Theta = 0\,, \qquad -\vartheta_R\nu p\omega U + (ic\omega + a + \gamma_0 p^2)\,\Theta = 0\,.$$

Affinchè (ii) abbia soluzioni $\Theta$, $U$ non nulle è necessario che

$$\text{(iii)} \qquad \det\begin{vmatrix} kp^2 - \varrho_0\omega^2 & ip\nu \\ -\vartheta_R\nu p\omega & ic\omega + a + \gamma_0 p^2 \end{vmatrix} = 0$$

equazione (di dispersione) biquadratica in $p$ e di terzo in $w$ che consente di determinare $p$ in funzione di $w$ (o viceversa).

(a) Cerchiamo una soluzione dell'equazione di dispersione con $w$ e $p$ reali (ovvero indaghiamo sulla possibilità di onde sinusoidali persistenti nello spazio e nel tempo con velocità $w/p$ e pulsazione reale $w$).

$$\text{(iv)} \qquad (a + \gamma_0 p^2)(kp^2 - \varrho_0\omega^2) = 0\,, \qquad \omega[c(kp^2 - \varrho_0\omega^2) + \vartheta_R\nu p^2] = 0\,.$$

Dalla prima equazione $kp^2 = \varrho_0\omega^2$, da cui $p = \pm\,\omega\sqrt{\varrho_0/k}$. Dalla seconda $\vartheta_R\nu^2 p^2 = 0$, da cui $p = 0$.

Una soluzione è dunque $p = 0$, $w = 0$, quindi $u$ e $\vartheta$ costanti.

(b) Cerchiamo una soluzione dell'equazione di dispersione con $p$ immaginario puro e $w$ reale (ovvero indaghiamo sulla possibilità di propagazione di onde con dissipazione spaziale di tipo esponenziale di coefficiente $\operatorname{Im} p$, pulsazione reale $w$).

Poniamo $p = \pi i$, $\pi \in \mathbb{R}$

(vii) $(a - \gamma_0 \pi)(- k^2 \pi^2 - \varrho_0 \omega^2) = 0$ , $\omega[c(- k\pi^2 - \varrho_0 \omega^2) - \vartheta_R \nu^2 \pi] = 0$ ,

da cui $w = 0$, $\pi = \pm \sqrt{a/\gamma_0}$. Si hanno dunque onde diffusive.

(c) Se $w$ è reale e $p$ complesso ($\operatorname{Re} p \neq 0$, $\operatorname{Im} p < 0$) l'onda si propaga con velocità $w/\operatorname{Re} p$, ha pulsazione reale $w$ e dissipazione di tipo spaziale con coefficiente $\operatorname{Im} p$.
In questo caso l'equazione di dispersione diventa

$$(5.7) \qquad p^4 + \Big(\frac{a}{\gamma_0} + \frac{ic\omega}{\gamma_0} - \varrho_0 \frac{\omega^2}{k} + i \frac{\omega \vartheta_R \nu^2}{k\gamma_0}\Big) p^2 - i\omega^3 \frac{\varrho_0 c}{k\gamma_0} - \varrho_0 a \frac{\omega^2}{k\gamma_0} = 0 .$$

Per $\nu = 0$, l'equazione di dispersione ha le seguenti soluzioni

$$(5.8) \qquad p = \pm \sqrt{- \frac{a}{\gamma_0} - ic \frac{\omega}{\gamma_0}} ,$$

ovvero ha per soluzione un'onda puramente termica, oppure

$$p = \pm \omega \sqrt{\frac{\varrho_0}{k}} ,$$

ovvero un'onda puramente meccanica con velocità $\sqrt{k/\varrho_0}$.

Studiamo il comportamento asintotico delle soluzioni di (5.7). Per $\omega \to 0$

$$p \to \pm i \sqrt{\frac{a}{\gamma_0}} , \qquad \text{oppure} \qquad p \to 0 ,$$

(confronta con il caso (a) e (b)).

Per $\omega \to \infty$, $p \to \infty$

$$p \simeq \pm \sqrt{\frac{\varrho_0}{k}}\, \omega \qquad \text{oppure} \qquad p \simeq \pm \sqrt{- \frac{a}{\gamma_0} + \frac{c \vartheta_R \gamma^2}{\varrho_0 \gamma_0^2} - i \frac{c\omega}{\gamma_0}} .$$

consistente con (5.8).

**Appendice**

Il sistema (5.6), con le assegnate condizioni iniziali e al contorno, ammette, se esiste, una unica soluzione.

Per la linearità delle equazioni è sufficiente considerare una soluzione $(\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\vartheta})$ di (5.6) corrispondente a dati iniziali e al contorno nulli e dimostrare che $\hat{\boldsymbol{u}} \equiv 0$ e $\hat{\vartheta} \equiv 0$.

Per tale soluzione, moltiplicando la prima di (5.6) scalarmente per $\dot{\hat{\boldsymbol{u}}}$ e integrando tra 0 e $L$

$$\int_0^L \varrho_0 \ddot{\hat{\boldsymbol{u}}} \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{u}}} \, \mathrm{d}\sigma = \int_0^L \dot{\hat{\boldsymbol{u}}} \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} [\boldsymbol{Q} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}{\partial \sigma} + \nu \hat{\vartheta} \boldsymbol{T}] \, \mathrm{d}\sigma \,,$$

ovvero

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \int_0^L \frac{1}{2} \varrho_0 |\dot{\hat{\boldsymbol{u}}}|^2 \, \mathrm{d}\sigma = \dot{\hat{\boldsymbol{u}}} \cdot \{\boldsymbol{Q} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}{\partial \sigma} + \nu \hat{\vartheta} \boldsymbol{T}\} |_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial \sigma} \dot{\hat{\boldsymbol{u}}} \cdot (\boldsymbol{Q} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}{\partial \sigma} + \nu \hat{\vartheta} \boldsymbol{T}) \, \mathrm{d}\sigma \,.$$

Il primo termine a secondo membro si annulla e per la simmetria di $\boldsymbol{Q}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \{ \int_0^L \frac{1}{2} \varrho_0 |\dot{\hat{\boldsymbol{u}}}|^2 \, \mathrm{d}\sigma + \int_0^L \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}{\partial \sigma} \cdot \boldsymbol{Q} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}{\partial \sigma} \, \mathrm{d}\sigma \} = - \int_0^L \nu \frac{\partial \dot{\hat{\boldsymbol{u}}}}{\partial \sigma} \cdot \hat{\vartheta} \boldsymbol{T} \, \mathrm{d}\sigma \,. \tag{A.1}$$

Analogamente, moltiplicando per $\hat{\vartheta}$ la seconda di (5.6) e integrando tra 0 e $L$

$$\begin{aligned} - \int_0^L \hat{\vartheta} \nu \frac{\partial \dot{\hat{\boldsymbol{u}}}}{\partial \sigma} \cdot \boldsymbol{T} \, \mathrm{d}\sigma &= - \int_0^L \frac{c_0}{\vartheta_R} \hat{\vartheta} \dot{\hat{\vartheta}} \, \mathrm{d}\sigma - \int_0^L \frac{a}{\vartheta_R} \hat{\vartheta}^2 \, \mathrm{d}\sigma + \int_0^L \frac{\hat{\vartheta}}{\vartheta_R} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\gamma_0 \frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial \sigma}) \, \mathrm{d}\sigma \\ &= - \frac{1}{2\vartheta_R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \int_0^L c_0 \hat{\vartheta}^2 \, \mathrm{d}\sigma - \frac{1}{\vartheta_R} \int_0^L [a \hat{\vartheta}^2 + \gamma_0 (\frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial \sigma})^2 \, \mathrm{d}\sigma \\ &\quad + \frac{1}{\vartheta_R} \gamma_0 \hat{\vartheta} \frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial \sigma} |_0^L \\ &= - \frac{1}{2\vartheta_R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \int_0^L c_0 \hat{\vartheta}^2 \, \mathrm{d}\sigma - \frac{1}{\vartheta_R} \int_0^L [a \hat{\vartheta}^2 + \gamma_0 (\frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial \sigma})^2 \, \mathrm{d}\sigma \,. \end{aligned}$$

Sostituendo in (A.1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \{ \frac{1}{2} \int_0^L (\varrho_0 |\dot{\hat{\boldsymbol{u}}}|^2 + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}{\partial \sigma} \cdot \boldsymbol{Q} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}{\partial \sigma} + c_0 \hat{\vartheta}^2) \, \mathrm{d}\sigma \} = - \frac{1}{\vartheta_R} \int_0^L [a \hat{\vartheta}^2 + \gamma_0 (\frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial \sigma})^2] \, \mathrm{d}\sigma \,. \tag{A.2}$$

Sia $E(\tau)$ la funzione in parentesi graffa, $E(\tau) \geqslant 0 \; \forall \tau$.

Il secondo membro di (A.2) risulta non positivo, per cui $(d/d\tau)E(\tau) \leqslant 0$. $E(\tau)$ è dunque una funzione decrescente di $\tau$, nulla per $\tau = 0$.

Risulta allora $E(\tau) \leqslant 0$ per $\tau \in [0, \bar{\tau})$, dunque $E(\tau) \equiv 0$, da cui $\hat{\vartheta} \equiv 0$, $\dot{\hat{\boldsymbol{u}}} \equiv 0$ su $[0, L] \times [0, \bar{\tau})$, ovvero $\hat{\vartheta} \equiv 0$, $\hat{\boldsymbol{u}} \equiv 0$.

## Bibliografia


[1] B. Coleman and M. J. Gurtin, *Waves in materials with memory* III. *Termodynamik influences on growth and decay of acceleration waves*, Arch. Rat. Mech. Anal. **19** (1965), 266.

[2] G. Dinca, *Grandes déformations des fils élastiques (le probleme thermique couplé)*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (3) **27** (1968), 41-64.

[3] M. E. Gurtin, *Modern continuum Thermodynamics - Mechanics Today*, Vol. I, Pergamon Press 1974.

[4] T. Manacorda: $[\bullet]_1$ *Introduzione alla termomeccanica dei continui*, Quaderni Un. Mat. Ital. 14 Pitagora, Bologna 1979; $[\bullet]_2$ *Sulla propagazione di onde ordinarie di discontinuità di un filo dotato di viscosità interna*, Riv. Mat. Univ. Parma (1) **9** (1958), 13-19.

[5] I. Müller, *Thermodynamik. Die Grundlagen der Matherialtheorie*, Bartelsmann, Düsseldorf 1973.

[6] W. Nowacki, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, Oxford 1962.

[7] C. Silli: $[\bullet]_1$ *Sulla propagazione di onde straordinarie di discontinuità in un filo termoelastico*, Atti Seminario Mat. Fis. Univ. Modena **16** (1967), 121-142; $[\bullet]_2$ *Ancora sulla propagazione di onde straordinarie di discontinuità in un filo termoelastico*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **2** (1968), 232-243; $[\bullet]_3$ *Sull'Ampiezza delle onde di discontinuità in un filo termoelastico*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **1** (1968), 717-725.

[8] C. Truesdell and R. A. Toupin, *The Classical Field Theories* H.d.P. vol. III/1 Springer Verlag, Berlin 1960.

[9] C. Truesdell and W. Noll, *Non-linear Field Theories of Mechanics* H.d.P. vol. III/3, Springer Verlag, Berlin 1965.


* * *