Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 251-268

A. Averna, A. Fiacca e C. Lodovici (*)

Sui teoremi di esistenza per l'integrale di Burkill (**)

1 - Introduzione

Molti Autori si sono occupati del problema della esistenza in $\boldsymbol{R}$ dell'integrale $\mathscr{B}(\psi, \tilde{I})$ di Burkill [7] su un intervallo $\tilde{I} \subset \boldsymbol{R}^n$, integrale definito a partire da una funzione di intervallo ψ. Tra questi Autori ricordiamo lo stesso J. C. Burkill [7], S. Saks [**15**], L. A. Ringenberg [**14**], T. Radó [**13**], H. Kober [**11**], L. Cesari $[\mathbf{9}]_1$, C. Vinti $[\mathbf{17}]_{1,2}$, A. Averna e C. Lodovici $[\mathbf{2}]_2$.

J. C. Burkill [7], dopo avere introdotto per funzioni di intervallo i concetti di *assoluta continuità* e di *crescenza per suddivisioni*, ha fornito per il predetto integrale un teorema di esistenza (1923) che assicura che questo integrale esiste (finito) in $\tilde{I}$ se la ψ: (i) è *crescente per suddivisioni*; (ii) è *assolutamente continua*.

Nel 1937 S. Saks [**15**] ha conseguito un nuovo teorema di esistenza per il predetto integrale che migliora quello di J. C. Burkill. Per S. Saks infatti la ψ è integrabile in $\tilde{I}$ se risulta: (h) ψ *continua*; (hh) ψ *sub-additiva*; (hhh) $\mathscr{B}^*(|\psi|, \tilde{I}) < +\infty$.

L. A. Ringenberg [**14**] nel 1948, nel suo teorema di esistenza, sostituisce all'ipotesi (hh) di S. Saks la seguente: (hh*) la ψ è *monotona crescente* o *monotona decrescente*.

Successivamente nel 1958 H. Kober [**11**] ha introdotto, sempre per funzioni di intervallo, il concetto di *infinitesimal additivity*: per H. Kober l'integrale $\mathscr{B}(\psi, \tilde{I})$ esiste finito se la ψ soddisfa alle ipotesi (hh) e (hhh) di S. Saks e inoltre: ($\tilde{\text{h}}$) ψ è *infinitesimally additive*.

(*) Indirizzi: Istituto Matematico, Università, Via Vanvitelli, 06100 Perugia, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 18-XI-1980.

Poiché la *continuità* della φ in $\tilde{I}$ implica la condizione ($\tilde{\text{h}}$) ed esistono funzioni che verificano la condizione ($\tilde{\text{h}}$) che *non* sono continue (cfr. [**11**], § 5, esempio), il teorema di esistenza di H. Kober costituisce un criterio piú stringente di quello fornito da S. Saks.

Piú recentemente C. Vinti (cfr. $[\mathbf{17}]_1$, 1968; $[\mathbf{17}]_2$, 1969) ha esteso alle funzioni di intervallo 2-dimensionale un'importante proposizione di L. Tonelli [**16**] valida per le funzioni di intervallo 1-dimensionale, conseguendo in tal modo un teorema di esistenza per l'integrale di Burkill (cfr. $[\mathbf{17}]_2$, pag. 303), che contiene quello di H. Kober (1) poiché l'ipotesi (hh) viene sostituita con l'ipotesi che la φ sia *approssimativamente sub-additiva*, mentre la ($\tilde{\text{h}}$) viene sostituita con una condizione piú debole (cfr. $[\mathbf{17}]_2$, Osservazione di pag. 307).

D'altra parte, nel 1962 L. Cesari $[\mathbf{9}]_{1,2}$ ha iniziato una suggestiva teoria assiomatica di integrazione non lineare per funzioni di insieme $\varphi: I \mapsto \varphi(I)$, a valori in $\boldsymbol{R}^k$, definite in una famiglia $\{I\}$ di sottoinsiemi di un insieme o spazio topologico $\tilde{I}$. Il citato Autore introduce poi il concetto di funzione di insieme *quasi additiva* rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ di sistemi finiti D e alla *mesh* $\delta: \mathscr{D} \to \boldsymbol{R}^+$, e stabilisce che se la φ è *quasi additiva* rispetto a $\mathscr{D}$ e a δ, allora esiste in $\boldsymbol{R}^k$ l'integrale di Burkill-Cesari $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\varphi, \tilde{I}) = \lim_{\delta(D)\to 0} \sum_{I\in D} \varphi(I)$, $D \in \mathscr{D}$.

L'integrale parametrico di Weierstrass-Burkill astratto, $W(p, \varphi, f) = \int_S f(p, \zeta)$, di una funzione integranda f continua, sopra una varietà parametrica S: $p = p(t)$, $t \in \tilde{I}$, è inquadrato nella teoria di cui sopra. Infatti è dimostrato in $[\mathbf{9}]_1$ che, se φ è *quasi additiva* e a variazione limitata, allora anche $\Phi(I) = f(p(\tau), \varphi(I))$, $\tau \in I$, è *quasi additiva*, cioè la *quasi-additività* è preservata dalla operazione non lineare f e $W(p, \varphi, f) = \mathscr{B}(\Phi, \tilde{I})$. Questa teoria di L. Cesari ha dato luogo ad un gran numero di lavori (per esempio: $[\mathbf{18}]_{1,2}$, [**6**], [**12**], [**1**], [**3**], [**4**], $[\mathbf{2}]_{1,2,3}$, [**10**], [**8**], $[\mathbf{5}]_{1,2}$, ecc. (2)) che hanno apportato aggiunte e modificazioni varie alla teoria, mostrando tra l'altro che vari processi di integrazione vi si inquadrano naturalmente.

In $[\mathbf{2}]_2$ A. Averna e C. Lodovici, mantenendosi nella generalità di L. Cesari, hanno fornito per funzioni di insieme una definizione di *quasi additività in senso debole*, mutuata dalla *quasi additività* di L. Cesari, provando che una funzione *quasi additiva* è *quasi additiva in senso debole*, mentre esistono funzioni *quasi additive in senso debole* che non sono *quasi additive* (cfr. osservazione I del § 2 di $[\mathbf{2}]_2$). La *quasi additività in senso debole* basta peraltro, come la *quasi additività*, ad assicurare l'esistenza in $\boldsymbol{R}^k$ dell'integrale $\mathscr{B}(\varphi, \tilde{I})$ (cfr. $[\mathbf{2}]_2$,

---

(1) È subito visto che il teorema di esistenza conseguito in $[\mathbf{17}]_2$ contiene anche quelli di J. C. Burkill [**7**], S. Saks [**15**], L. A. Ringenberg [**14**], T. Radó [**13**], C. Vinti $[\mathbf{17}]_1$.

(2) I teoremi di esistenza conseguiti in [**3**], [**4**], [**8**] sono tutti contenuti nel teorema di esistenza di L. Cesari (cfr. teorema (2.v) di $[\mathbf{9}]_1$) poiché ciascuna delle condizioni imposte implica la *quasi additività*.

§ 2, teorema I). Questo teorema di esistenza rappresenta quindi una estensione del già citato teorema di esistenza di cui in $[9]_1$. Nessun raffronto però era stato fin qui fatto tra gli altri teoremi di esistenza e quello dato in $[2]_2$.

Poiché il teorema di esistenza conseguito da C. Vinti in $[17]_2$ contiene quelli di J. C. Burkill [7], S. Saks [15], L. A. Ringenberg [14], T. Radó [13], H. Kober [11], C. Vinti $[17]_1$, abbiamo ritenuto opportuno mettere a confronto il già citato teorema di esistenza di L. Cesari, ricondotto però al caso particolare di funzioni di rettangolo, e il teorema di esistenza di cui in $[17]_2$. Abbiamo cosí provato che nessuno dei due teoremi è contenuto nell'altro: esistono infatti funzioni di rettangolo che verificano le ipotesi (α), (β), (γ) del teorema di esistenza di C. Vinti (cfr. qui **2**) che *non* sono *quasi additive* e, viceversa, esistono funzioni di rettangolo *quasi additive* che *non* verificano le ipotesi di C. Vinti (cfr. qui **3**).

È sorta allora in noi spontanea l'esigenza di indagare se il teorema di esistenza conseguito in $[2]_2$ nell'ambito della teoria di L. Cesari, ricondotto però al caso particolare di funzioni di rettangolo, contenesse oppure no anche il citato teorema di esistenza di C. Vinti. La risposta è stata affermativa. Abbiamo infatti provato (cfr. il Corollario di **4**) che una funzione soddisfacente alle ipotesi (α), (β), (γ) di C. Vinti è *quasi additiva in senso debole.* Ciò permette di affermare che il teorema di esistenza di cui in $[2]_2$ contiene anche il teorema di esistenza di C. Vinti: esso contiene quindi tutti i teoremi di esistenza per l'integrale di Burkill fin qui noti, ove si eccettui quello di G. Warner (³) $[18]_1$ con cui peraltro non è possibile fare un raffronto, nel senso che nessuno dei due teoremi contiene l'altro. Osserviamo infine che, poiché esistono funzioni di rettangolo (cfr. Esempio III) *quasi additive in senso debole* che *non* verificano né le ipotesi (α), (β), (γ) del teorema di C. Vinti né sono *quasi additive,* è subito visto che la classe delle funzioni individuate dal teorema di esistenza di A. Averna e C. Lodovici $[2]_2$ rappresenta un effettivo ampliamento dell'unione delle due classi individuate in $[9]_1$, $[17]_2$ nei relativi teoremi di esistenza.

2 - Definizioni e notazioni

Indichiamo con $\tilde{I}$ il rettangolo

$$\tilde{I} = \{(x, y): a_0 \leqq x \leqq b_0,\ c_0 \leqq y \leqq d_0,\ a_0 < b_0,\ c_0 < d_0\}, \tag{2.1}$$

con $\{I\}$ la totalità dei rettangoli contenuti in $\tilde{I}$ aventi i lati paralleli a quelli di $\tilde{I}$. Denotiamo poi con $\mathscr{E}$ la famiglia delle decomposizioni *cartesiane* o *in senso*

(³) Nel suo teorema di esistenza G. Warner indebolisce il concetto di *quasi additività* di L. Cesari in modo però che venga assicurata ugualmente l'esistenza in $\boldsymbol{R}^k$ dell'integrale $\mathscr{B}(\varphi, \tilde{I})$.

esteso [4] di $\tilde{I}$ (cfr. [7], pag. 279) e con $\mathscr{S}$ la famiglia delle decomposizioni *in senso stretto*.

Indicata con $\mathscr{D}=\{D\}$ una famiglia di decomposizioni di $\tilde{I}$, $D=[I_1, \ldots, I_N]$, di elementi di $\{I\}$, chiamiamo *proiezione* o *decomposizione indotta* di $D \in \mathscr{D}$ sul rettangolo $I \in \{I\}$ la suddivisione D_I cosí definita

$$D_I = [I_i \cap I, I_i \in D, \mathring{I}_i \cap \mathring{I} \neq \emptyset] \text{ [5]} . \tag{2.2}$$

La collezione di tutte le suddivisioni D_I ottenute dalle decomposizioni $D \in \mathscr{D}$ sarà denotata nel seguito con $\mathscr{D}_I$.

Sulla famiglia $\mathscr{D}$ [6] facciamo con C. Vinti (cfr. [**17**]$_2$, pag. 297) le seguenti ipotesi

($\mathscr{D}_1$) *$\mathscr{D}$ contiene la famiglia $\mathscr{E}$ delle decomposizioni cartesiane del rettangolo $\tilde{I}$*;

($\mathscr{D}_2$) *se $D = [I_1, \ldots, I_N] \in \mathscr{D}$, comunque si fissino $D_{I_i} \in \mathscr{D}_{I_i}$, $i = 1, \ldots, N$, risulta $\bar{D} = D_{I_1} \cup \ldots \cup D_{I_N}$* [7] $\in \mathscr{D}$ [8].

Assumiamo come *mesh* $\delta: D_I \mapsto \delta(D_I)$, $D_I \in \mathscr{D}_I$, $I \in \{I\}$, (cfr. [**9**]$_1$, § 1) la funzione cosí definita

$$\delta(D_I) = \max_{J \in D_I} \operatorname{diam} J . \tag{2.3}$$

Detta ora $\psi: I \mapsto \psi(I)$, $I \in \{I\}$, una funzione di rettangolo a valori in $\boldsymbol{R}$, poniamo

$$S(\psi, D_I) = \sum_{J \in D_I} \psi(J) \qquad \forall D_I \in \mathscr{D}_I, \ \forall I \in \{I\} . \tag{2.4}$$

Come è noto, l'integrale inferiore $\mathscr{B}_*(\psi, I)$ e l'integrale superiore $\mathscr{B}^*(\psi, I)$ alla Burkill-Cesari della ψ sul rettangolo I, rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla *mesh* δ, fornita da (2.3), sono definiti ponendo

$$\mathscr{B}_*(\psi, I) = \min \lim_{\delta(D_I) \to 0} S(\psi, D_I) , \tag{2.5$_*$}$$

$$\mathscr{B}^*(\psi, I) = \max \lim_{\delta(D_I) \to 0} S(\psi, D_I) . \tag{2.5*}$$

---

[4] J. C. Burkill usa una diversa denominazione, e cioè chiama decomposizioni *in senso esteso* quelle ora note nella letteratura come decomposizioni *in senso stretto*.

[5] L'apice ° sta ad indicare che di un insieme si considera l'apertura.

[6] Naturalmente, le ipotesi fatte per $\mathscr{D}$ sussistono anche per la famiglia $\mathscr{D}_I$.

[7] Con la scrittura $D_{I_1} \cup \ldots \cup D_{I_N}$ indichiamo la decomposizione $[I, I \in D_{I_i}, i = 1, \ldots, N]$.

[8] Facciamo notare che la famiglia delle decomposizioni *in senso intermedio* (cfr. [**17**]$_1$, pag. 232), come pure la famiglia delle decomposizioni *in senso stretto* (cfr. [**7**], pag. 280), altro non sono che due particolari famiglie che soddisfano agli assiomi ($\mathscr{D}_1$), ($\mathscr{D}_2$).

Se $\mathscr{B}_*(\psi, I) = \mathscr{B}^*(\psi, I)$, il valore comune $\mathscr{B}(\psi, I)$ è detto integrale alla Burkill-Cesari della ψ su I rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla *mesh* δ.

Riportiamo ora alcuni concetti che intervengono piú avanti. Una funzione $\psi\colon I \mapsto \psi(I)$, $I \in \{I\}$, è detta *approssimativamente sub-additiva* (9) in $\tilde{I}$ rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ (cfr. [**16**], pag. 310 e [**17**]$_1$, pag. 238) se

(α) *fissato arbitrariamente un numero* $\varepsilon > 0$ *esiste un altro numero* $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ *con la proprietà*

$$\psi(I) \leqq S(\psi, D_I) + \varepsilon \cdot mI \ (^{10}), \tag{2.6}$$

per ogni $I \in \{I\}$ *con* $\operatorname{diam} I < \sigma$ *e per ogni* $D_I \in \mathscr{D}_I$.

Diremo con C. Vinti (cfr. [**17**]$_2$, pag. 303) che la funzione ψ verifica la proprietà (β) (11) se

(β) *comunque si fissino un intervallo* 1*-degenere* (12) i *di* $\boldsymbol{R}^2$ *non contenuto nella frontiera di* $\tilde{I}$ *e con* $\tilde{I} \cap i = i$ *e un numero* $\varepsilon > 0$, *esiste in corrispondenza un numero* $\beta = \beta(\varepsilon, i) > 0$ *tale che, per ogni* $I \in \{I\}$ *con* $mI < \beta$, *decomponibile in due rettangoli* I_1, I_2 *con* $I_1 \cap I_2 = i$, *risulti*

$$\psi(I_1) + \psi(I_2) \leqq \psi(I) + \varepsilon . \tag{2.7}$$

(γ) *Diremo inoltre che la* ψ *verifica la proprietà* (γ) *se risulta*

$$\mathscr{B}^*(|\psi|, \tilde{I}) < +\infty .$$

Diremo poi con L. Cesari (cfr. [**9**]$_1$, § 2) che la funzione ψ è *quasi additiva* (13) in $\tilde{I}$ rispetto a $\mathscr{D}$ e a δ se

---

(9) La definizione di *approssimata sub-additività* è stata data da L. Tonelli nel 1939 in [**16**] per funzioni di intervallo 1-dimensionale ed estesa successivamente da C. Vinti nel 1968 in [**17**]$_1$ a funzioni di intervallo 2-dimensionale.

(10) Indichiamo con mI l'area del rettangolo I.

(11) Definizioni analoghe erano state fornite da L. Tonelli in [**16**] per funzioni di intervallo 1-dimensionale e da H. Kober in [**11**] per funzioni di intervallo 2-dimensionale. Ma è facile vedere che tutte e due le definizioni fornite da questi Autori sono piú forti di quella di C. Vinti, sopra riportata.

(12) Per intervalli 1-degenere dello spazio euclideo 2-dimensionale $\boldsymbol{R}^2$ si intendono intervalli del tipo $\{(x, y)\colon a \leqq x \leqq b,\ y = \bar{y}\}$ o del tipo $\{x = \bar{x},\ c \leqq y \leqq d\}$, con $a < b$, $c < d$.

(13) Vogliamo osservare esplicitamente che la definizione di *quasi additività* fornita da L. Cesari in [**9**]$_1$ è data, nella ben piú ampia classe delle funzioni (vettoriali) di insieme $\varphi\colon \{I\} \to \boldsymbol{R}^k$, rispetto a una famiglia $\mathscr{D}$ di *sistemi finiti* e a una funzione *mesh* $\delta\colon D \mapsto \delta(D)$, $D \in \mathscr{D}$, definite entrambe assiomaticamente (cfr. [**9**]$_1$, § 1, § 2).

(Φ) *fissato arbitrariamente un numero* $\varepsilon > 0$ *è possibile determinare un altro numero* $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ *tale che, per ogni* $D_0 = [I] \in \mathscr{D}$ *con* $\delta(D_0) < \eta$, *esiste un numero* $\lambda = \lambda(\varepsilon, D_0) > 0$ *in modo che risulti*

$$(\Phi_1) \quad \sum_{I \in D_0} |\textstyle\sum^{(I)} \psi(J) - \psi(I)| < \varepsilon\,, \qquad (\Phi_2) \quad \sum' |\psi(J)| < \varepsilon\,,$$

per ogni $D = [J] \in \mathscr{D}$ *con* $\delta(D) < \lambda$, *ove* $\sum^{(I)}$ *rappresenta la somma fatta rispetto a tutti i rettangoli* $J \in D$, $J \subset I$, *mentre* $\sum'$ *rappresenta la somma fatta rispetto a tutti i rettangoli* $J \in D$, $J \not\subset I$, $I \in D_0$.

Diremo inoltre (cfr. [**2**]$_2$, § 2) che la ψ è *quasi additiva in senso debole* rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla *mesh* δ se

($\tilde{\Phi}$) *fissato arbitrariamente un numero* $\varepsilon > 0$ *è possibile determinare in corrispondenza una decomposizione* $D_0 = [I] \in \mathscr{D}$ *e un altro numero* $\lambda > 0$ *in modo che risulti*

$$(\tilde{\Phi}_1) \quad \sum_{I \in D_0} |\textstyle\sum^{(I)} \psi(J) - \psi(I)| < \varepsilon\,, \qquad (\tilde{\Phi}_2) \quad \sum' |\psi(J)| < \varepsilon\,,$$

per ogni $D = [J] \in \mathscr{D}$ *con* $\delta(D) < \lambda$.

Indicata ora con $\mathscr{D}'$ una qualunque sottofamiglia di decomposizioni di $\mathscr{D}$ ma soggetta alla condizione che la restrizione della funzione $\delta\colon D \mapsto \delta(D)$, $D \in \mathscr{D}$, alla famiglia $\mathscr{D}'$ risulti ancora una *mesh*, diremo (cfr. [**2**]$_3$, § 5) che la ψ è *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ *e alla mesh* δ *se*

($\tilde{\tilde{\Phi}}$) *fissato arbitrariamente* $\varepsilon > 0$ *è possibile determinare un numero* $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ *tale che, per ogni* $D_0 = [I] \in \mathscr{D}'$ *con* $\delta(D_0) < \eta$, *esiste un altro numero* $\lambda = \lambda(\varepsilon, D_0) > 0$ *in modo che risulti*

$$(\tilde{\tilde{\Phi}}_1) \quad \sum_{I \in D_0} |\textstyle\sum^{(I)} \psi(J) - \psi(I)| < \varepsilon\,, \qquad (\tilde{\tilde{\Phi}}_2) \quad \sum' |\psi(J)| < \varepsilon\,,$$

per ogni $D = [J] \in \mathscr{D}$ *con* $\delta(D) < \lambda$.

3 - Confronto tra due teoremi di esistenza

Siamo ora in grado di mettere a confronto il teorema di esistenza di L. Cesari (cfr. [**9**]$_1$, § 2), limitatamente al caso particolare di una funzione di rettangolo, e il teorema di esistenza che C. Vinti dà in [**17**]$_2$ (cfr. [**17**]$_2$, pag. 303), provando che nessuno dei due teoremi è contenuto nell'altro: esistono infatti funzioni di rettangolo che verificano le ipotesi (α), (β), (γ) del teorema di esistenza di C. Vinti che *non* sono *quasi additive* (cfr. piú avanti Esempio I), e funzioni di rettangolo *quasi additive* che *non* verificano le (α), (β), (γ) (cfr. Esempio II), mentre esistono ovviamente funzioni di rettangolo *quasi additive* soddisfacenti alle (α), (β), (γ).

Esempio I. Dato il quadrato $\tilde{I}$

$$\tilde{I} = \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}, \tag{3.1}$$

con la topologia usuale, indichiamo con $\{I\}$ la classe di tutti i rettangoli $I \subset \tilde{I}$ aventi i lati paralleli a quelli di $\tilde{I}$, con $\mathscr{D}$ la famiglia di tutte le decomposizioni $D = [I_i]$ del dato quadrato, $I_i \in \{I\}$, e poniamo

$$\delta : D \mapsto \delta(D) = \max_i \operatorname{diam} I_i, \qquad D \in \mathscr{D}. \tag{3.2}$$

Detto r il segmento

$$r = \{(x, y) : x = \tfrac{1}{2},\ 0 \leqq y \leqq 1\},$$

$H \equiv (\frac{1}{2}, 0)$ e h l'altezza del generico rettangolo $I \in \{I\}$, andiamo a considerare la funzione $\psi : I \mapsto \psi(I)$, $I \in \{I\}$, definita ponendo

$$\psi(I) = \begin{cases} h & \text{se } \mathring{I} \cap r \neq \emptyset \\ h/2 & \text{se } \mathring{I} \cap r = \emptyset, \quad \dot{I} \cap r \neq \emptyset \ (^{14}) \\ 0 & \text{altrove}, \end{cases} \tag{3.3}$$

per provare che essa verifica le citate ipotesi (α), (β), (γ), mentre invece *non* è *quasi additiva*.

Invero, fissiamo arbitrariamente un rettangolo $I \in \{I\}$. Se $\mathring{I} \cap r \neq \emptyset$, risulta

$$\psi(I) = h, \qquad S(\psi, D_I) = h \qquad \forall D_I \in \mathscr{D}_I; \tag{3.4$_1$}$$

se $\mathring{I} \cap r = \emptyset$ e $\dot{I} \cap r \neq \emptyset$, risulta invece

$$\psi(I) = \frac{h}{2}, \qquad S(\psi, D_I) = \frac{h}{2} \qquad \forall D_I \in \mathscr{D}_I; \tag{3.4$_2$}$$

([14]) L'apice $\cdot$ sta ad indicare che di un insieme si considera la frontiera.

se infine $\dot{I} \cap r = \emptyset$, risulta

$$(3.4)_3 \qquad \psi(I) = 0\,, \qquad S(\psi, D_I) = 0\,, \qquad \forall D_I \in \mathscr{D}_I\,.$$

Poiché, come si vede, la funzione in esame è *additiva*, sono senz'altro verificate le proprietà (α) e (β). È inoltre verificata la proprietà (γ), risultando $\mathscr{B}(\psi, \tilde{I}) = 1$.

Per provare che la nostra ψ *non* è *quasi additiva* rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla *mesh* δ fornita da (3.2) basta verificare che esiste un numero $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, è possibile prendere una decomposizione $D_0 \in \mathscr{D}$, con $\delta(D_0) < \eta$, in modo che, comunque venga scelto il numero $\lambda = \lambda(\varepsilon, D_0) > 0$, esiste un'altra decomposizione $D \in \mathscr{D}$, con $\delta(D) < \lambda$, in modo che *non* sussista la (Φ_1) (cfr. [**9**]$_1$, § 2).

Assumiamo come $D_0 = [I]$ una decomposizione cartesiana del quadrato $\tilde{I}$ scelta in modo che, tra i punti della suddivisione del lato di $\tilde{I}$ giacente sull'asse x, vi sia il punto H e inoltre risulti $\delta(D_0) < \eta$.

Qualunque sia il numero $\lambda = \lambda(\varepsilon, D_0) > 0$ è sempre possibile trovare una decomposizione $D = [J] \in \mathscr{D}$, con $\delta(D) < \lambda$, che sia il prodotto cartesiano di due suddivisioni di cui la prima *non* contenga il punto H.

In queste condizioni proveremo che risulta

$$(3.5) \qquad \sum_{I \in D_0} \left| \sum{}^{(I)} \psi(J) - \psi(I) \right| = 1\,,$$

e che pertanto *non* sussiste la citata relazione (Φ_1) per $\varepsilon < 1$.

Invero, se $I \in D_0$ *non* ha un lato verticale sul segmento r, si ha $\psi(I) = 0$, $\psi(J) = 0$, $\forall J \subset I$; se, invece, $I \in D_0$ ha un lato verticale su r, risulta $\psi(J) = 0$, $\forall J \subset I$, e, d'altra parte, poiché in questo caso $\psi(I) = h/2$, la somma fatta rispetto a tutti i rettangoli di questo tipo risulta uguale a 1 ed è allora subito visto che sussiste la (3.5).

Esempio II. Indichiamo anche qui con $\tilde{I}$ il quadrato definito in (3.1), con $\{I\}$ e $\mathscr{D}$ le famiglie introdotte nell'Esempio I. Considerato il generico rettangolo $I = [x', x''] \times [y', y'']$, $I \subset \tilde{I}$, andiamo a definire la funzione $\psi: I \mapsto \psi(I)$, $I \subset \tilde{I}$, ponendo

$$(3.6) \qquad \psi(I) = \begin{cases} mI & \text{se } x'' \leqq \frac{1}{4} \\ -\,mI & \text{se } \frac{1}{4} \leqq x' < x'' \leqq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Dimostreremo che questa funzione *non* è *approssimativamente sub-additiva* rispetto alla famiglia $\mathcal{D}$, mentre risulta *quasi additiva* rispetto alla stessa famiglia $\mathcal{D}$ e alla *mesh* δ.

Per verificare la prima parte basta provare che esiste un numero $\varepsilon > 0$ tale che, qualunque sia il numero $\sigma > 0$, esiste un rettangolo $I \in \{I\}$ con diam $I < \sigma$ e un $D_I \in \mathcal{D}_I$ con la proprietà

$$(3.7) \qquad \psi(I) > S(\psi, D_I) + \varepsilon \cdot mI .$$

Assumiamo $\varepsilon < \frac{1}{3}$. Per ogni $\sigma > 0$ consideriamo un rettangolo $I = [x', x''] \times [y', y'']$, tale che diam $I < \sigma$ e inoltre risulti $x' < \frac{1}{4} < x'' \leqq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} - x' = \frac{1}{2}(x'' - \frac{1}{4})$. Sia poi $D_I = [I_1, I_2]$ la decomposizione di I mediante i rettangoli $I_1 = [x', \frac{1}{4}] \times [y', y'']$ e $I_2 = [\frac{1}{4}, x''] \times [y', y'']$. In queste condizioni risulta

$$\psi(I) = 0 \, ; \qquad \psi(I_1) = mI_1 = \tfrac{1}{3} mI \, ; \qquad \psi(I_2) = -mI_2 = -\tfrac{2}{3}\, mI .$$

Segue quindi

$$(3.8) \qquad S(\psi, D_I) + \varepsilon \cdot mI = (\varepsilon - \tfrac{1}{3}) mI ,$$

e pertanto, per avere assunto $\varepsilon < \frac{1}{3}$, la (3.7) è verificata.

Per provare che la nostra ψ risulta *quasi additiva* rispetto alla famiglia $\mathcal{D}$ e alla *mesh* δ, osserviamo che possiamo scrivere

$$(3.9) \qquad \psi(I) = \psi_1(I) + \psi_2(I) , \qquad \forall I \in \{I\},$$

ove

$$(3.10)_1 \qquad \psi_1(I) = \begin{cases} mI & \text{se } x'' \leqq \frac{1}{4} \\ 0 & \text{altrove} , \end{cases}$$

$$(3.10)_2 \qquad \psi_2(I) = \begin{cases} -mI & \text{se } \frac{1}{4} \leqq x' < x'' \leqq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} . \end{cases}$$

Basterà pertanto provare (cfr. [**9**]$_1$, teorema (2.ii)) che ciascuna delle funzioni definite in $(3.10)_1$, $(3.10)_2$ è *quasi additiva* rispetto a $\mathcal{D}$ e a δ.

Fissato un numero $\varepsilon > 0$, sia $\eta = \min(\varepsilon/2, \frac{1}{4})$, mentre $D_0 = [I_1, \ldots, I_N] \in \mathcal{D}$ rappresenti una qualunque decomposizione con $\delta(D_0) < \eta$. Indicata con ϱ la lunghezza del piú piccolo dei lati dei rettangoli di D_0, poniamo

$$(3.11) \qquad \lambda = \lambda(\varepsilon, D_0) = \min\left(\frac{\varepsilon}{16N}, \frac{\varrho}{2}\right),$$

e sia $D = [J] \in \mathcal{D}$ una decomposizione di $\tilde{I}$ con $\delta(D) < \lambda$.

Se $J_{r_1}, \dots, J_{r_p}$ sono i rettangoli di D contenuti nella striscia $S = [0, \frac{1}{4}] \times [0, 1]$ e non contenuti in alcun $I \in D_0$, risulta

$$(3.12) \qquad \sum{}' |\psi_1(J)| = \sum_{h=1}^{p} \psi_1(J_{r_h}) = \sum_{h=1}^{p} mJ_{r_h} < 4N \cdot \delta(D) < \frac{\varepsilon}{4},$$

e con ciò abbiamo provato intanto la (Φ_2).

Consideriamo ora i rettangoli di D_0, $I_{s_1}, \dots, I_{s_q}$ contenuti nella striscia S. Indicati con $J_{t_1}, \dots, J_{t_m}$ i rettangoli di D, l'apertura dei quali interseca il segmento $\tilde{r} = \{(x, y) : x = \frac{1}{4}, 0 \leqq y \leqq 1\}$, risulta

$$(3.13) \qquad \sum_{k=1}^{q} \left| \sum{}^{(I_{s_k})} \psi_1(J) - \psi_1(I_{s_k}) \right| = \sum_{k=1}^{q} \left| \sum{}^{(I_{s_k})} mJ - mI_{s_k} \right|$$

$$\leqq \sum_{h=1}^{p} mJ_{r_h} + \sum_{i=1}^{m} mJ_{t_i} < \frac{\varepsilon}{4} + \delta(D).$$

Prendiamo infine in esame quei rettangoli di D_0, $I_{g_1}, \dots, I_{g_n}$, l'apertura dei quali interseca il segmento $\tilde{r}$. Si ha

$$(3.14) \qquad \sum_{j=1}^{n} \left| \sum{}^{(I_{g_j})} \psi_1(J) - \psi_1(I_{g_j}) \right| = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum{}^{(I_{g_j})} \psi_1(J) \right|$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{n} \sum{}^{(I_{g_j})} mJ \leqq \sum_{j=1}^{n} mI_{g_j} < \delta(D_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da (3.13), tenendo presente (3.11), e da (3.14) segue quindi (Φ_1). Poiché della stessa proprietà gode anche la funzione ψ_2, ne segue che la ψ definita in (3.6) è *quasi additiva* rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla *mesh* δ.

4 - Le condizioni (α), (β), (γ) e la quasi additività in senso debole

Indichiamo con I^* il generico intervallo 1-degenere di $\boldsymbol{R}^2$ non coincidente con i lati del rettangolo $\tilde{I}$ e con gli estremi su due lati opposti di $\tilde{I}$.

Diremo che I^* gode della proprietà $(\mathscr{I}^*)$ se

$(\mathscr{I}^*)$ *fissato arbitrariamente* $\varepsilon > 0$ *esiste in corrispondenza un numero* $\tau(\varepsilon, I^*) > 0$ *in modo che*

$$\mathscr{B}^*(|\psi|, I) < \varepsilon,$$

per ogni $I \in \{I\}$, *con* $I \cap I^* = I^*$ *e* $mI < l(I^*) \cdot \tau$ (15).

(15) Indichiamo con $l(I^*)$ la lunghezza di I^*.

Sussiste il seguente

Lemma. *Sia* $\psi: I \mapsto \psi(I)$, $I \in \{I\}$, *una funzione di rettangolo con la proprietà*

$$(\gamma) \qquad \mathscr{B}^*(|\psi|, \tilde{I}) < +\infty .$$

In queste condizioni gli intervalli I^*, *ad eccezione di una infinità numerabile, godono della proprietà* ($\mathscr{I}^*$) (16).

Indichiamo con $\mathscr{E}^*$ la famiglia delle decomposizioni *cartesiane* di $\tilde{I}$ le cui linee di divisione godono della proprietà ($\mathscr{I}^*$).

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

Teorema. *Sia* $\psi: I \mapsto \psi(I)$, $I \in \{I\}$, *una funzione di rettangolo soddisfacente alle proprietà* (α) *e* (γ) *e per la quale esista in* **R** *l'integrale* $\mathscr{B}(\psi, \tilde{I})$. *In queste condizioni la* ψ *è quasi additiva rispetto alla coppia* ($\mathscr{D}$, $\mathscr{E}^*$) *e alla mesh* δ *fornita da* (2.3).

Fissiamo arbitrariamente un numero $\varepsilon > 0$ e sia $\sigma = \sigma(\varepsilon/30 m\tilde{I})$ il numero determinato come in (α). Poiché la ψ è integrabile in $\tilde{I}$, esiste un numero $\mu = \mu(\varepsilon/5) > 0$ tale che, per ogni $D = [J] \in \mathscr{D}$ con $\delta(D) < \mu$, risulta

$$(4.1) \qquad |\mathscr{B}(\psi, \tilde{I}) - S(\psi, D)| < \frac{\varepsilon}{5} .$$

Poniamo

$$(4.2) \qquad \eta = \eta(\varepsilon) = \min\left\{ \sigma\left(\frac{\varepsilon}{30 m\tilde{I}}\right), \ \mu\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) \right\},$$

e sia $D_0 = [I_1, \ldots, I_N]$ una decomposizione della famiglia $\mathscr{E}^*$ con $\delta(D_0) < \eta$. Sia K il numero degli intervalli I^* che costituiscono le linee di suddivisione della D_0; poiché ciascuno di essi gode della proprietà ($\mathscr{I}^*$), in corrispondenza del numero $\varepsilon/30K$ esiste un altro numero $\tau = \tau(\varepsilon/30K) > 0$ – che si può supporre minore della lunghezza del piú piccolo dei lati dei rettangoli di D_0 – in modo che risulti

$$(4.3) \qquad \mathscr{B}^*(|\psi|, R^*) < \frac{\varepsilon}{30K},$$

essendo R^* il rettangolo con due lati simmetrici ed equipollenti a I^* e tale che $mR^* = l(I^*) \cdot \tau$. Sempre per l'ipotesi (γ) esiste un numero $\gamma = \gamma(\varepsilon/30K) > 0$,

(16) Questa proposizione, di cui non riportiamo la dimostrazione, è stata conseguita da C. Vinti (cfr. [**17**]$_1$, § 3, lemma 1).

$\gamma < \tau/2$, tale che si abbia

$$S(|\psi|, D_{R^*}) < \mathscr{B}^*(|\psi|, R^*) + \frac{\varepsilon}{30\,K}, \quad \forall D_{R^*} \in \mathscr{D}_{R^*}, \text{ con } \delta(D_{R^*}) < \gamma . \tag{4.4}$$

Da (4.4), tenendo presente la (4.3), segue

$$S(|\psi|, D_{R^*}) < \frac{\varepsilon}{15\,K} \qquad \forall D_{R^*} \in \mathscr{D}_{R^*}, \qquad \text{con } \delta(D_{R^*}) < \gamma . \tag{4.5}$$

Poiché, peraltro, nelle condizioni in cui ci siamo posti, la ψ è integrabile in ogni rettangolo $I \in \{I\}$ (cfr. proprietà 2^a di [**17**]$_2$), in corrispondenza del numero $\varepsilon/30\,N$ esiste un altro numero $\nu = \nu(\varepsilon/30\,N) > 0$ con la proprietà

$$|\mathscr{B}(\psi, I_i) - S(\psi, D_{I_i})| < \frac{\varepsilon}{30\,N}, \tag{4.6}$$

$\forall D_{I_i} \in \mathscr{D}_{I_i}$, con $\delta(D_{I_i}) < \nu$, $i = 1, \dots, N$.

Posto ora

$$\lambda = \lambda(\varepsilon, D_0) = \min\left\{\gamma\left(\frac{\varepsilon}{30\,K}\right), \ \nu\left(\frac{\varepsilon}{30\,N}\right), \ \mu\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)\right\}, \tag{4.7}$$

sia $D' = [J]$ una qualunque decomposizione di $\mathscr{D}$ con $\delta(D') < \lambda$. Se indichiamo con $J_{r_1}, \dots, J_{r_p}$ quei rettangoli di D' che hanno punti in comune con i lati dei rettangoli di D_0, ad eccezione di quei lati che giacciono sulla frontiera di $\tilde{I}$, risulta

$$\sum_{h=1}^{p} |\psi(J_{r_h})| < \frac{\varepsilon}{15}, \tag{4.8}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{h=1}^{p} |\psi(J_{r_h} \cap I_i)| < \frac{\varepsilon}{15}, \tag{4.9}$$

avendo assunto $\psi(J_{r_h} \cap I_i) = 0$ se $\mathring{J}_{r_h} \cap I_i = \emptyset$ [17].

---

[17] La dimostrazione delle (4.8), (4.9) è in tutto analoga a quella fatta da C. Vinti in [**17**]$_2$ per conseguire le sue (8), (8)$'$ (cfr. pag. 306, 307) e pertanto la omettiamo.

Dalle (4.8) e (4.9) discende

$$\sum{}' |\psi(J)| \leqq \sum_{h=1}^{p} |\psi(J_{r_h})| < \frac{\varepsilon}{15}, \tag{4.8$'$}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum\nolimits_{I_i}^{*} |\psi(J \cap I_i)| \leqq \sum_{i=1}^{N} \sum_{h=1}^{p} |\psi(J_{r_h} \cap I_i)| < \frac{\varepsilon}{15}, \tag{4.9$'$}$$

avendo indicato col simbolo $\sum_{I_i}^{*}$ la somma estesa a tutti i rettangoli $J \in D'$ tali che $J \not\subset I_i$ e $J \cap \mathring{I}_i \neq \emptyset$.

La (4.8)$'$ altro non è che la $(\tilde{\tilde{\Phi}}_2)$ della *quasi additività rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{E}^*)$ *e a* δ. Proviamo ora la $(\tilde{\tilde{\Phi}}_1)$.

Poiché $\delta(D_0) < \sigma$ (cfr. (4.2)), per l'ipotesi (α) risulta

$$\psi(I_i) \leqq S(\psi, D_{I_i}) + \frac{\varepsilon}{30\, m\bar{I}}\, mI_i \qquad \forall D_{I_i} \in \mathscr{D}_{I_i}, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{4.10}$$

Consideriamo ora le decomposizioni D'_{I_i}, proiezioni della D' sui rettangoli I_i, $i = 1, \ldots, N$. Dalle (4.10) e (4.6), tenendo presente la (4.7), segue

$$\psi(I_i) - \mathscr{B}(\psi, I_i) < \frac{\varepsilon}{30\, N} + \frac{\varepsilon}{30\, m\bar{I}}\, mI_i, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{4.11}$$

e quindi

$$[\psi(I_i) - \mathscr{B}(\psi, I_i)]^{+} < \frac{\varepsilon}{30\, N} + \frac{\varepsilon}{30\, m\bar{I}}\, mI_i, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{4.11$'$}$$

da cui risulta

$$\sum_{i=1}^{N} [\psi(I_i) - \mathscr{B}(\psi, I_i)]^{+} < \frac{\varepsilon}{30} + \frac{\varepsilon}{30} = \frac{\varepsilon}{15}. \tag{4.11$''$}$$

Segue pertanto

$$
\begin{aligned}
(4.12)\qquad \sum_{i=1}^{N}[\textstyle\sum^{(I_i)}\psi(J)-\psi(I_i)]^- &= \sum_{i=1}^{N}[\psi(I_i)-\textstyle\sum^{(I_i)}\psi(J)]^+ \\
&= \sum_{i=1}^{N}[\psi(I_i)-S(\psi, D'_{I_i})+\textstyle\sum^*_{I_i}\psi(J\cap I_i)]^+ \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}[\psi(I_i)-S(\psi, D'_{I_i})]^+ + \sum_{i=1}^{N}|\textstyle\sum^*_{I_i}\psi(J\cap I_i)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}[\psi(I_i)-\mathscr{B}(\psi, I_i)]^+ + \sum_{i=1}^{N}[\mathscr{B}(\psi, I_i)-S(\psi, D'_{I_i})]^+ \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N}|\textstyle\sum^*_{I_i}\psi(J\cap I_i)|,
\end{aligned}
$$

avendo tenuto presente che $S(\psi, D'_{I_i}) = \sum^{(I_i)}\psi(J) + \sum^*_{I_i}\psi(J\cap I_i)$.

Dalla (4.6) segue peraltro

$$(4.6)' \qquad \sum_{i=1}^{N}|\mathscr{B}(\psi, I_i)-S(\psi, D'_{I_i})| < \frac{\varepsilon}{30}.$$

Tenendo allora presente le (4.11)″, (4.6)′ e (4.9)′ segue quindi

$$(4.12)' \qquad \sum_{i=1}^{N}[\textstyle\sum^{(I_i)}\psi(J)-\psi(I_i)]^- < \frac{\varepsilon}{15}+\frac{\varepsilon}{15}+\frac{\varepsilon}{30} < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Possiamo pertanto scrivere

$$
\begin{aligned}
(4.13)\qquad & \sum_{i=1}^{N}|\textstyle\sum^{(I_i)}\psi(J)-\psi(I_i)| \\
&= \sum_{i=1}^{N}[\textstyle\sum^{(I_i)}\psi(J)-\psi(I_i)] + 2\sum_{i=1}^{N}[\textstyle\sum^{(I_i)}\psi(J)-\psi(I_i)]^- \\
&= S(\psi, D') - S(\psi, D_0) - \textstyle\sum'\psi(J) + 2\sum_{i=1}^{N}[\textstyle\sum^{(I_i)}\psi(J)-\psi(I_i)]^- \\
&\leq [S(\psi, D') - \mathscr{B}(\psi, \tilde{I})] + [\mathscr{B}(\psi, \tilde{I}) - S(\psi, D_0)] + \textstyle\sum'|\psi(J)| \\
&\quad + 2\sum_{i=1}^{N}[\textstyle\sum^{(I_i)}\psi(J)-\psi(I_i)]^-.
\end{aligned}
$$

Tenendo infine presente le (4.1), (4.8)' e (4.12)', da (4.13) discende

$$\sum_{i=1}^{N} \left| \sum^{(I_i)} \psi(J) - \psi(I_i) \right| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{15} + 2\frac{\varepsilon}{5} < \varepsilon ,$$

che altro non è che la $(\tilde{\tilde{\Phi}}_1)$ e pertanto la funzione ψ è *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{E}^*)$ *e a* δ.

Dal Teorema ora provato segue il

Corollario. *Sia* $\psi: I \mapsto \psi(I)$, $I \in \{I\}$, *una funzione di rettangolo con le proprietà* (α), (β), (γ). *In queste condizioni la* ψ *è quasi additiva in senso debole rispetto alla famiglia* $\mathscr{D}$ *e alla mesh* δ *fornita da* (2.3).

La tesi di questo Corollario segue subito ove si osservi che una funzione con le proprietà (α), (β), (γ) è integrabile in $\tilde{I}$ (cfr. [**17**]$_2$, teorema § 4) e che ogni funzione *quasi additiva rispetto alla coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{E}^*)$ *e a* δ *è quasi additiva in senso debole* rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla *mesh* δ (cfr. osservazione del § 5 di [**2**]$_3$).

Il teorema di esistenza di cui in [**2**]$_2$ contiene quindi il teorema di esistenza fornito da C. Vinti in [**17**]$_2$.

Tenendo presente quanto abbiamo osservato nelle note (1) e (2) di qui e che il citato teorema di esistenza fornito in [**2**]$_2$ contiene anche il teorema di esistenza di L. Cesari (cfr. [**2**]$_2$, osservazione I e teorema I), segue che il teorema di A. Averna e C. Lodovici contiene tutti i criteri di integrabilità per l'integrale di Burkill, fin qui noti.

Osservazione. Facciamo infine osservare che il citato teorema di esistenza di cui in [**2**]$_2$ (cfr. [**2**]$_2$, teorema I) opera addirittura su una classe di funzioni che contiene *strettamente* l'unione delle due classi individuate da C. Vinti e da L. Cesari nei loro teoremi di esistenza. Esistono infatti funzioni *quasi additive in senso debole* che *non* verificano né le ipotesi del teorema di esistenza di C. Vinti né la *quasi additività* di L. Cesari, come prova il seguente

Esempio III. Sia dato il quadrato $\tilde{I} = \{(x, y): 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$.

Essendo $\{I\}$, $\mathscr{D}$, δ, r, H e h come nell'Esempio I, andiamo a considerare la funzione $\psi: I \mapsto \psi(I)$, $I \in \{I\}$, definita ponendo

$$(4.14) \qquad \psi(I) = \begin{cases} h & \text{se } \mathring{I} \cap r \neq \emptyset \\ h/2 & \text{se } \mathring{I} \cap r = \emptyset,\ \dot{I} \cap r \neq \emptyset \\ mI & \text{se } I = [0, x''] \times [y', y''],\ x'' \in \boldsymbol{Q},\ x'' < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove}. \end{cases}$$

Tale funzione *non* è *approssimativamente sub-additiva*.

Assumiamo infatti $\varepsilon < 1$. Per ogni $\sigma > 0$ consideriamo un rettangolo $I = [0, x''] \times [y', y'']$ con le proprietà $x'' \in \boldsymbol{Q}$, $x'' < \frac{1}{2}$, $\operatorname{diam} I < \sigma$. Sia poi D_I una decomposizione di I fatta in modo che nei rettangoli $J = [0, \bar{x}''] \times [\bar{y}', \bar{y}'']$ sia $\bar{x}'' \in \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q}$. Risulta $\psi(I) = mI$, $\sum_{J \in D_I} \psi(J) = 0$, da cui, avendo assunto $\varepsilon < 1$, segue

$$\sum_{J \in D_I} \psi(J) + \varepsilon \cdot mI < \psi(I)\,, \tag{4.15}$$

e pertanto la ψ *non* è *approssimativamente sub-additiva*. Per provare che la ψ *non* è *quasi additiva* rispetto a $\mathscr{D}$ e a δ, fissiamo anche qui $\varepsilon < 1$ e, per ogni $\eta > 0$, assumiamo come $D_0 = [I]$ una decomposizione cartesiana del quadrato $\tilde{I}$ scelta in modo che, tra i punti della suddivisione del lato di $\tilde{I}$ giacente sull'asse x, vi sia il punto H e risulti inoltre $\delta(D_0) < \eta$. Per ogni numero $\lambda > 0$ indichiamo con $D = [J]$ una decomposizione di $\tilde{I}$ ottenuta come prodotto cartesiano di due suddivisioni di cui la prima non contenga H. Poiché in queste condizioni risulta

$$\sum_{\substack{J \in D \\ J \not\subset I,\ J \cap r \neq \phi}} |\psi(J)| = 1\,, \tag{4.16}$$

la funzione ψ *non* è *quasi additiva* rispetto a $\mathscr{D}$ e a δ.

Proviamo, infine, che la ψ è *quasi additiva in senso debole* rispetto alla famiglia $\mathscr{D}$ e alla *mesh* δ.

Fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, sia $D_0 = [I]$ una decomposizione cartesiana di $\tilde{I}$ con $\delta(D_0) < \frac{1}{2}$ non contenente il segmento r tra le sue linee di suddivisione e con la proprietà che, se $I = [0, x''] \times [y', y''] \in D_0$, risulta $x'' \in \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q}$. Dette b_1 e b_2 le lunghezze delle parti in cui il punto H divide la base del rettangolo $I \in D_0$ che lo contiene, poniamo $\lambda = \min(b_1, b_2, \varepsilon/2N, \varrho/2)$ ([18]), ove N è il numero degli elementi di D_0.

Procedendo come in $[\mathbf{2}]_2$ (cfr. § 2, osservazione I), si provano le relazioni

$$\sum_{\substack{I \in D_0 \\ I \cap r \neq \phi}} \Big|\sum\nolimits^{(I)} \psi(J) - \psi(I)\Big| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{4.17}$$

$$\sum_{\substack{J \in D \\ J \not\subset I,\ I \cap r \neq \phi}} |\psi(J)| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{4.18}$$

per ogni $D = [J] \in \mathscr{D}$, con $\delta(D) < \lambda$.

([18]) Indichiamo anche qui con ϱ il numero definito in (3.11).

Denotata poi con $\sum_0$ la somma relativa ai rettangoli $J \in D$ del tipo $J = [0, \bar{x}''] \times [\bar{y}', \bar{y}'']$, risulta inoltre

$$\sum_{\substack{I \in D_0 \\ \cap r = \phi}} |\textstyle\sum^{(I)} \psi(J) - \psi(I)| \leqq \sum_0 mJ < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.19}$$

$$\sum_{\substack{J \in D \\ J \not\subset I,\ I \cap r = \phi}} |\psi(J)| \leqq \sum_0 mJ < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.20}$$

Poiché da (4.17) e (4.19) segue $(\tilde{\Phi}_1)$, mentre da (4.18) e (4.20) segue $(\tilde{\Phi}_2)$, al nostra ψ è *quasi additiva in senso debole.*

Bibliografia

[1] A. Averna, *Teoremi di esistenza e di rappresentazione per l'integrale alla Weierstrass-Burkill-Cesari sopra una coppia di varietà,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **22** (1973), 295-334.

[2] A. Averna e C. Lodovici: $[\cdot]_1$ *L'integrale di Burkill-Cesari in una diversa assiomatica,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **23** (1974), 140-151; $[\cdot]_2$ *La quasi additività in senso debole,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **25** (1976), 1-14; $[\cdot]_3$ *La quasi sub-additività rispetto a una coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ *di famiglie di sistemi finiti e alla mesh* δ, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **14**-B (1977), 101-117.

[3] M. Boni e C. Gori, *Quasi additività e integrali non parametrici 2-dimensionali del Calcolo delle Variazioni,* Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **22** (1973), 217-238.

[4] M. Boni e M. Ragni, *Approssimata sub-additività e integrali non parametrici 2-dimensionali del Calcolo delle Variazioni,* Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **22** (1973), 289-313.

[5] P. Brandi e A. Salvadori: $[\cdot]_1$ *Sull'estensione dell'integrale alla Burkill-Cesari ad una misura,* Rend. Circ. Mat. Palermo (in corso di stampa); $[\cdot]_2$ *Un Teorema di rappresentazione per l'integrale parametrico del Calcolo delle Variazioni alla Weierstrass,* Ann. Mat. Pura Appl. (4), **124** (1980), 39-58.

[6] J. C. Breckenridge, *Burkill-Cesari integrals of quasi additive interval functions,* Pacific J. Math. (3) **37** (1971), 635-654.

[7] J. C. Burkill, *Functions of intervals,* Proc. London Math. Soc. **22** (1923), 275-310.

[8] D. Candeloro, *Integrale di Burkill-Cesari e legami con l'assoluta continuità,* Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **26** (1977), 251-274.

[9] L. Cesari: $[\cdot]_1$ *Quasi additive set functions and the concept of integral over a variety,* Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 94-113; $[\cdot]_2$ *Extension problem for quasi additive set functions and Radon-Nikodym derivatives,* Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 114-146.

[10] A. FIACCA, *Sulla quasi additività e sulla quasi sub-additività rispetto a una coppia* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ *di famiglie di sistemi finiti e alla mesh* δ, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **26** (1977), 289-301.

[11] H. KOBER, *On the existence of the Burkill integral*, Canad. J. Math. **10** (1958), 115-121.

[12] T. NISHIURA, *Integrals over a product variety and Fubini theorems*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **14** (1965), 207-236.

[13] T. RADÓ, *Length and area*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications vol. XXX (1948).

[14] L. A. RINGENBERG, *The theory of the Burkill integral*, Duke Math. J. **15** (1948), 239-270.

[15] S. SAKS, *Theory of the integral*, Hafner Publishing Company, New York 1937.

[16] L. TONELLI, *Sulle funzioni di intervallo*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **8** (1939), 309-321.

[17] C. VINTI: $[\cdot]_1$ *L'integrale di Fubini-Tonelli nel senso di Weierstrass. I. Caso parametrico*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968), 229-263; $[\cdot]_2$ *L'integrale di Weierstrass-Burkill*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **18** (1969), 295-316.

[18] G. WARNER: $[\cdot]_1$ *The Burkill-Cesari integral*, Duke Math. J. **35** (1968), 61-78; $[\cdot]_2$ *The generalized Weierstrass-type integral* $\int f(\zeta, \varphi)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **22** (1968), 163-192.

Summary

With the purpose of making some comparison between the existence theorems of Burkill integral so far studied, we have found (i) *that in the particular case when* $\tilde{I} = R_0$ *is a rectangle, the L. Cesari* **[9]**$_1$ *and C. Vinti* **[17]**$_2$ *existence theorems are different because they deal with different classes of functions*; (ii) *that the existence theorem already proposed by A. Averna and C. Lodovici* **[2]**$_2$ *not only is more general than the two mentioned theorems but strictly contains all the existence theorems so far known.*

* * *