Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 269-280

MARIO DE SALVO (*)

Sugli ipergruppi completi finiti (**)

1 – Sia $H = \mathscr{A}^*(G)$ l'ipergruppo di associatività di un gruppoide G e sia ω il suo cuore.

Sappiamo che $\forall x \in H$ la classe di equivalenza modulo $\mathscr{A}^* = \beta^*$ è data dall'insieme $x \circ \omega$.

Sia φ: $H \to H/\beta^*$ la proiezione canonica.

Ci proponiamo di studiare questi ipergruppi quando avviene che $\forall (x, y) \in H^2 |x \circ \omega| = |y \circ \omega|$, ovvero quando le classi di equivalenza sono tutte equipotenti.

Se G è un quasigruppo, allora $\forall P \in \mathscr{P}(G) - \{\emptyset\}$, $\mathscr{A}^*(P) = P\omega = \omega P$ e in particolare $\forall x \in G$ $\mathscr{A}^*(x) = x\omega = \omega x$ cioè $\forall x \in G$ $x \circ \omega = x\omega$, ovvero risulta banalmente che tutte le classi sono equipotenti.

È noto che la classe degli ipergruppi di associatività coincide con la classe degli ipergruppi completi [**2**]. Consideriamo gli ipergruppi H che soddisfano alle seguenti condizioni

(1) H completo (o d'associatività); (2) $\forall (x, y) \in H^2$ $|x \circ \omega| = |y \circ \omega|$.

Osservazione. Ricordiamo che $\forall (x, y) \in H^2$, il prodotto $x \circ y$ è una classe di equivalenza modulo β^* e viceversa ogni classe di equivalenza è esprimibile come prodotto di due elementi non necessariamente distinti. Ne segue banalmente la proprietà

$$(\Delta) \qquad \forall (x, y, u, v) \in H^4 (x \circ y) \cap (u \circ v) \neq \emptyset \Rightarrow x \circ y = u \circ v .$$

(*) Indirizzo: Via Palermo 762, 98010 Scala Ritiro, Messina, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). – Ricevuto: 24-XI-1980.

Vale il seguente

Teorema 1. *Se H è un ipergruppo finito soddisfacente le condizioni* (1) *e* (2), *allora* $\forall(x_i, x_j) \in H^2$ *si ha* $|x_i \circ x_j| = n$, *ove* n *è un divisore di* $|H|$.

Dim. Per la condizione (2) e per l'osservazione precedente, gli iperprodotti $x_i \circ x_j$ hanno tutti la stessa cardinalità n. Per la proprietà (Δ), gli insiemi $x_i \circ x_j$ presi a due a due o sono disgiunti, o sono coincidenti.

Poichè la tabella di moltiplicazione di H è tale che l'unione degli elementi di ogni riga e l'unione degli elementi di ogni colonna coincidono con l'ipergruppo H, ne discende che n è divisore di $|H|$.

Come immediata conseguenza abbiamo il

Corollario 2. *Se* $|H| = p$, *ove* p *è un numero primo, se* $|\omega| \neq 1$ *e se* H *soddisfa le condizioni* (1) *e* (2), *allora* H *è l'ipergruppo totale.*

Supponiamo ora che la cardinalità di H sia un numero non primo. Si può affermare che

Teorema 3. *Se H è un ipergruppo finito, che soddisfa le condizioni* (1) *e* (2), *allora* $|\omega|$ *è un divisore di* $|H|$.

Dim. Infatti ω è una classe di equivalenza, ovvero un iperprodotto $x_i \circ x_j$. Dunque dal Teorema 1 segue la tesi.

Ci proponiamo adesso di mostrare che per la classe degli ipergruppi finiti, soddisfacenti le condizioni (1) e (2) vale una naturale estensione del teorema di Lagrange sui gruppi finiti.

Sia H un ipergruppo finito completo e sia ω il suo cuore. Supponiamo inoltre che $\forall(x, y) \in H^2$, $|\varphi_H^{-1}(\varphi_H(x))| = |\varphi_H^{-1}(\varphi_H(y))|$ ovvero che le classi di equivalenza modulo $\mathscr{C}$ in H abbiano tutte la stessa cardinalità n.

Sia K un sottoipergruppo di H; è già noto che K è completo e che il cuore di K coincide col cuore di H.

Diamo ora la seguente

Definizione. Fissato l'elemento $x \in H$, diciamo che l'insieme $K \circ x = \{k \circ x / k \in K\}$ è un *laterale sinistro* di K in H.

Proviamo il

Lemma 4. *Due laterali sinistri di K in H o sono disgiunti o coincidono.*

Dim. Se i laterali $K \circ x$, $K \circ y$ sono disgiunti non c'è niente da dire. Sia $z \in K \circ x \cap K \circ y \Rightarrow \exists (k_1, k_2) \in K^2$: $z \in k_1 \circ x \cap k_2 \circ y \Rightarrow$ (essendo H completo) $k_1 \circ x = k_2 \circ y \Rightarrow$ (prendendo k'_1, un inverso di k_1) $(k'_1 \circ k_1) \circ x = k'_1 \circ k_2 \circ y \Rightarrow \omega \circ x = k'_1 \circ k_2 \circ y \Rightarrow \mathscr{C}(x) = k'_1 \circ k_2 \circ y \Rightarrow x \in k'_1 \circ k_2 \circ y \Rightarrow K \circ x \subset K \circ k'_1 \circ k_2 \circ y \Rightarrow K \circ x \subset K \circ y$.
Analogamente $K \circ x \subset K \circ y$ e quindi $K \circ x = K \circ y$.

Si ha pure il

Lemma 5. *L'applicazione* f: $\varphi_H(k) \to \varphi_H^{-1}(\varphi_H(k)) \circ x$ *è una bigezione e pertanto* $|\varphi_H(K)| = |\varphi_H^{-1}(\varphi_H(K)) \circ x|$.

Dim. $\varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_1)) \circ x = \varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_2)) \circ x \Rightarrow \mathscr{C}(k_1) \circ x = \mathscr{C}(k_2) \circ x \Rightarrow \mathscr{C}(k_1 \circ x) = \mathscr{C}(k_2 \circ x) \Rightarrow k_1 \circ x = k_2 \circ x \Rightarrow$ (per un inverso x' di x) $k_1 \circ x \circ x' = k_2 \circ x \circ x' \Rightarrow k_1 \circ \omega = k_2 \circ \omega \Rightarrow \mathscr{C}(k_1) = \mathscr{C}(k_2) \Rightarrow \varphi_H(k_1) = \varphi_H(k_2)$.
Così $|\varphi_H(K)| = |\varphi_H^{-1}(\varphi_H(K)) \circ x|$.

Osserviamo che

$$\forall k_1 \in K \Rightarrow \varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_1)) \subset K ;$$

infatti sia $k_2 \in \mathscr{C}(k_1) = \omega \circ k_1$, allora

$$\left. \begin{array}{l} k_2 \in \omega \circ k_1 \\ \omega \subset K \end{array} \right| \Rightarrow k_2 \in K \circ k_1 = K .$$

Dunque se $|\varphi_H(K)| = s$ segue

$$K = \omega + \varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_2)) + \varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_3)) + \ldots + \varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_s)) .$$

(il segno $+$ indica che si tratta di unione disgiunta).

Proviamo ora il

Lemma 6. *Un laterale sinistro di* K *in* H *contiene lo stesso numero di elementi di* K.

Dim. Sia $K = \omega + \varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_2)) + \ldots + \varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_s))$, e sia $x \in H$, allora $K \circ x = \left(\omega + \varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_2)) + \ldots + \varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_s))\right) \circ x = (\omega \circ x) \cup \left(\varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_2)) \circ x\right) \cup \ldots \cup \left(\varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_s)) \circ x\right)$ (preso $e \in \omega$) $= (e \circ x) \cup (k_2 \circ x) \cup \ldots \cup (k_s \circ x)$
$= (e \circ x) + (k_2 \circ x) + \ldots + (k_s \circ x)$.

Si noti che si è fatta la sostituzione

$$\varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_i))\circ x = k_i\circ x\ ;$$

infatti $\varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_i))\circ x = \mathscr{C}(k_i)\circ x = \mathscr{C}(k_i\circ x) = k_i\circ x$; inoltre si è considerato che $k_i\circ x$ e $k_j\circ x$ con $\{i, j\} \subset \{1, 2, \ldots, s\}$, $i \neq j$, sono disgiunti; infatti se coincidessero si avrebbe $k_i\circ x = k_j\circ x \Rightarrow \varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_i))\circ x = \varphi_H^{-1}(\varphi_H(k_j))\circ x \Rightarrow$ (per il Lemma 5) $\varphi_H(k_i) = \varphi_H(k_j)$.

Pertanto $|K\circ x| = |\varphi_H(K)|\cdot n = s\cdot n = |K|$.

Osserviamo ancora che $\forall h \in H$, se $e \in \omega$, si ha per la condizione di riproducibilità in H: $\exists x \in H$: $h \in e\circ x = \omega\circ x \subset K\circ x$. E quindi per il Lemma 4 si ha $H = K + K\circ x_2 + \ldots + K\circ x_r$.

Possiamo così affermare che

Teorema 7. *L'ordine di H è un multiplo intero dell'ordine di ciascuno dei suoi sottoipergruppi K.* (Estensione del teorema di Lagrange sui gruppi finiti).

Dim. Denotiamo con $[H:K]$ l'indice di K in H, ovvero il numero dei laterali sinistri di K in H. Se $H = K + K\circ x_2 + K\circ x_3 + \ldots + K\circ x_r$, ovviamente $[H:K] = r$. Dunque $|H| = |K|\cdot[H:K]$; infatti l'ordine di H è dato dal prodotto dell'indice di K in H per il numero di elementi contenuti in ciascun laterale, numero che è uguale alla cardinalità di K (vedi Lemma 6).

2 – Consideriamo gli ipergruppi di cardinalità non prima n, soddisfacenti le condizioni (1) e (2), e ne costruiamo le tabelle di moltiplicazione. Supposto $|H| = n$, possiamo trascurare i casi $|\omega| = 1$, $|\omega| = n$ che conducono rispettivamente ai gruppi e agli ipergruppi totali.

Prima proviamo che

Teorema 8. *Se H è un ipergruppo completo, allora H/β^* è un gruppo abeliano se, e solo se, H è un ipergruppo commutativo.*

Dim. Se H è un ipergruppo commutativo allora banalmente H/β^* è un gruppo abeliano.

Viceversa, supponiamo per assurdo che $\exists(x, y) \in H^2$: $x\circ y \neq y\circ x$. Segue $x\circ y \cap y\circ x = \emptyset$ e applicando φ si ha $\varphi(x\circ y) = \varphi(x)\varphi(y)$ e $\varphi(y\circ x) = \varphi(y)\varphi(x)$.

H/β^* gruppo abeliano $\Rightarrow \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x \circ y) = \varphi(y \circ x) \Rightarrow$ (applicando φ^{-1}) $\varphi^{-1}\varphi(x \circ y) = \varphi^{-1}\varphi(y \circ x) \Rightarrow \mathscr{C}(x \circ y) = \mathscr{C}(y \circ x) \Rightarrow x \circ y = y \circ x$, il che contraddice l'ipotesi fatta.

Corollario 9. *Se H è un ipergruppo completo tale che $|H/\beta^*| < 6$, allora H è commutativo.*

Dim. Discende subito dal Teorema 8, considerato che tutti i gruppi di ordine minore di 6 sono abeliani.

Proviamo ancora che

Teorema 10. *Se H è un ipergruppo completo e se $\{x, y\} \subset H$, allora condizione sufficiente affinchè sia $x \circ y = y \circ x$ è che sia verificata una delle condizioni seguenti*: (a) $\exists \bar{z} \in H/\beta^*$: $\{x, y\} \subset \bar{z}$; (b) $\{x, y\} \cap \omega \neq \emptyset$; (c) $x \circ y = \omega$.

Dim. (a) Se $\exists \bar{z} \in H/\beta^*$: $\{x, y\} \subset \bar{z}$, allora $x \circ y = \mathscr{C}(x \circ y) = \mathscr{C}(x) \circ \mathscr{C}(y) = \bar{z} \circ \bar{z}$ e $y \circ x = \mathscr{C}(y \circ x) = \mathscr{C}(y) \circ \mathscr{C}(x) = \bar{z} \circ \bar{z}$, da cui $x \circ y = y \circ x$.

(b) Se $x \in \omega$ allora $x \circ y = \mathscr{C}(x \circ y) = \mathscr{C}(x) \circ y = \omega \circ y = \mathscr{C}(y)$ e $y \circ x = \mathscr{C}(y \circ x) = y \circ \mathscr{C}(x) = y \circ \omega = \mathscr{C}(y)$ da cui $x \circ y = y \circ x$.

(c) Se $x \circ y = \omega$ allora essendo ω parte riflessiva di H segue subito che $y \circ x = \omega$.

Nel seguito utilizzeremo spesso le osservazioni seguenti.

(Γ) Se H è un ipergruppo, la sua tabella di moltiplicazione è tale che l'unione degli elementi di ogni riga (o di ogni colonna) coincide con H.

(Σ) $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in (H/\beta^*)^2$ si ha $\bar{x} \circ \bar{y} = \bigcup_{\substack{\alpha \in \bar{x} \\ \beta \in \bar{y}}} \alpha \circ \beta = \alpha \circ \beta$; infatti $\alpha \circ \beta = \mathscr{C}(\alpha \circ \beta) = \mathscr{C}(\alpha) \circ \mathscr{C}(\beta) = \bar{x} \circ \bar{y}$.

Teorema 11. *Sia $|H| = 2k$, $|\omega| = k$ con $k \in N^* - \{1\}$, allora condizione necessaria e sufficiente affinchè $H = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k\}$ sia un ipergruppo soddisfacente le condizioni* (1) *e* (2) *è che H, a meno di isomorfismi, abbia struttura definita dalla seguente tabella di moltiplicazione*

H	$a_1, \ldots, a_k$	$b_1, \ldots, b_k$
$a_1, \ldots, a_k$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$
$b_1, \ldots, b_k$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$

Dim. Per la condizione (2) tutte le classi di equivalenza hanno cardinalità k, ovvero tutti i prodotti di due elementi hanno cardinalità k. Scomponiamo l'ipergruppo H nelle classi di equivalenza modulo β^*: $\omega = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ e costruiamo la tabella di moltiplicazione.

Per l'osservazione (Σ) e per il Corollario 9, basta determinare $\omega\circ\omega$, $\omega\circ B$, $B\circ B$. Si ha $\omega\circ\omega = \omega$, $\omega\circ B = \mathscr{C}(B) = B$, $B\circ B =$ (per l'osservazione (Γ)) ω.

È di verifica immediata che H, con la struttura sopra descritta è un ipergruppo soddisfacente le condizioni (1) e (2).

Teorema 12. *Sia* $|H| = 3k$, $|\omega| = k$ *con* $k \in N^* - \{1\}$, *allora condizione necessaria e sufficiente affinchè* $H = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_k\}$ *sia un ipergruppo soddisfacente le condizioni* (1) *e* (2) *è che* H *a meno di isomorfismi, abbia struttura definita dalla seguente tabella di moltiplicazione.*

H	$a_1, \ldots, a_k$	$b_1, \ldots, b_k$	$c_1, \ldots, c_k$
a_1 ⋮ a_k	$\{a_1, \ldots, a_k\}$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$
b_1 ⋮ b_k	$\{b_1, \ldots, b_k\}$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$
c_1 ⋮ c_k	$\{c_1, \ldots, c_k\}$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$

Dim. Scomponiamo H nelle classi di equivalenza

$$\omega = \{a_1, \ldots, a_k\}, \qquad B = \{b_1, \ldots, b_k\}, \qquad C = \{c_1, \ldots, c_k\}.$$

Per il Corollario 9, H è commutativo.

Ovviamente si ha $\omega\circ\omega = \omega$, ed inoltre se $x \in \omega$, $z \notin \omega$ segue per (Σ) $x\circ z = \omega\circ\bar{z} = \bar{z}$. Così la prima riga e la prima colonna restano determinate.

	ω	B	C
ω	1 ω	2 B	3 C
B	4 B	5	6
C	7 C	8	9

Per (Γ), esistono due possibilità per la casella 5

$$\text{(i)}\quad B\circ B = \omega\,, \qquad \text{(ii)}\quad B\circ B = C\,.$$

Il caso (i) va scartato, perchè allora seguirebbe da (Γ), $B\circ C = C$ il che è impossibile perchè allora l'ultima colonna non soddisferebbe la condizione (Γ).

Ne segue che si ha necessariamente $B\circ B = C$.

Perciò i prodotti contenuti nelle caselle 6, 8, 9, sono rispettivamente: ω, ω, B.

Si verifica facilmente che la struttura sopra descritta è un ipergruppo soddisfacente le condizioni (1) e (2).

Teorema 13. *Sia* $|H| = 4k$, $|\omega| = k$ *con* $k \in N^* - \{1\}$, *allora condizione necessaria e sufficiente affinchè* $H = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_k\}$ *sia un ipergruppo soddisfacente le condizioni* (1) *e* (2) *è che* H, *a meno di isomorfismi, abbia struttura definita da una delle due seguenti tabelle di moltipli cazione.*

H_1

	$a_1, \ldots, a_k$	$b_1, \ldots, b_k$	$c_1, \ldots, c_k$	$d_1, \ldots, d_k$
$a_1 \vdots a_k$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$	$\{d_1, \ldots, d_k\}$
$b_1 \vdots b_k$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$	$\{d_1, \ldots, d_k\}$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$
$c_1 \vdots c_k$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$	$\{d_1, \ldots, d_k\}$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$
$d_1 \vdots d_k$	$\{d_1, \ldots, d_k\}$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$

,

H_2

	$a_1, \ldots, a_k$	$b_1, \ldots, b_k$	$c_1, \ldots, c_k$	$d_1, \ldots, d_k$
$a_1 \vdots a_k$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$	$\{d_1, \ldots, d_k\}$
$b_1 \vdots b_k$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$	$\{d_1, \ldots, d_k\}$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$
$c_1 \vdots c_k$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$	$\{d_1, \ldots, d_k\}$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$
$d_1 \vdots d_k$	$\{d_1, \ldots, d_k\}$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$

Dim. Per il Corollario 9, H è commutativo. Scomponiamo H nelle classi di equivalenza

$$\omega = \{a_1, \dots, a_k\}, \quad B = \{b_1, \dots, b_k\}, \quad C = \{c_1, \dots, c_k\}, \quad D = \{d_1, \dots, d_k\}.$$

Ragionando come nel Teorema 12 si determinano la prima riga e la prima colonna

	ω	B	C	D
ω	1 ω	2 B	3 C	4 D
B	5 B	6	7	8
C	9 C	10	11	12
D	13 D	14	15	16

Tenendo presente (Γ) si hanno per la casella 6, tre possibilità

$$\text{(i)} \quad B \circ B = \omega, \qquad \text{(ii)} \quad B \circ B = C, \qquad \text{(iii)} \quad B \circ B = D.$$

Sia valido il caso (i), allora sempre per (Γ), i prodotti contenuti nelle caselle 7, 8, 10, 14, sono rispettivamente D, C, D, C

	ω	B	C	D
ω	ω	B	C	D
B	B	ω	D	C
C	C	D	11	12
D	D	C	15	16

Per la casella 11 vi sono ancora due possibilità

$$\text{(i)} \quad C \circ C = \omega, \qquad \text{(ii)} \quad C \circ C = B.$$

Supponiamo si verifichi il caso (i); allora le caselle 12, 15, 16 contengono rispettivamente i prodotti B, B, ω e si ottiene così la tabella H_1 dell'enunciato.

Se invece consideriamo valido il caso (ii), allora le caselle 12, 15, 16, contengono rispettivamente ω, ω, B e si ottiene la tabella H_2.

Sia valido ora per la casella 6 il caso (ii); allora i prodotti contenuti nelle caselle 7, 8, 10, 14, sono rispettivamente D, ω, D, ω. L'unica possibilità per la casella 11 è ω; quindi in questo caso si ottiene la tabella

H_3	ω	B	C	D
ω	ω	B	C	D
B	B	C	D	ω
C	C	D	ω	B
D	D	ω	B	C

Infine se consideriamo valido il caso (iii) per la casella 6, con ragionamenti analoghi a quelli effettuati nei casi (i) e (ii) si ottiene la seguente tabella

H_4	ω	B	C	D
ω	ω	B	C	D
B	B	D	ω	C
C	C	ω	D	B
D	D	C	B	ω

Si verifica l'esistenza di due isomorfismi

$$f\colon H_2 \to H_3\,; \qquad g\colon H_2 \to H_4\,.$$

$$f(a_i) = a_i\,, \qquad f(b_i) = c_i\,, \qquad f(c_i) = b_i\,, \qquad f(d_i) = d_i\,;$$

$$g(a_i) = a_i\,, \qquad g(b_i) = d_i\,, \qquad g(c_i) = b_i\,, \qquad g(d_i) = c_i\,.$$

(È sufficiente verificare che gli omomorfismi f, g chiaramente bigettivi, sono buoni).

H_1 e H_2 non sono isomorfi perchè H_1/ω e H_2/ω sono rispettivamente $Z/2Z \oplus Z/2Z$ e $Z/4Z$.

Infine si prova facilmente che H_1, H_2 sono ipergruppi soddisfacenti le condizioni (1) e (2).

Teorema 14. *Sia* $|H| = 5k$, $|\omega| = k$; *allora condizione necessaria e sufficiente affinchè* $H = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_k, e_1, \ldots, e_k\}$, *sia un ipergruppo soddisfacente le condizioni* (1) *e* (2), *è che* H, *a meno di isomorfismi, abbia struttura definita dalla seguente tabella di moltiplicazione.*

H_1

	$a_1, \ldots, a_k$	$b_1, \ldots, b_k$	$c_1, \ldots, c_k$	$d_1, \ldots, d_k$	$e_1, \ldots, e_k$
$a_1 \vdots a_k$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$	$\{d_1, \ldots, d_k\}$	$\{e_1, \ldots, e_k\}$
$b_1 \vdots b_k$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$	$\{d_1, \ldots, d_k\}$	$\{e_1, \ldots, e_k\}$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$
$c_1 \vdots c_k$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$	$\{d_1, \ldots, d_k\}$	$\{e_1, \ldots, e_k\}$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$
$d_1 \vdots d_k$	$\{d_1, \ldots, d_k\}$	$\{e_1, \ldots, e_k\}$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$
$e_1 \vdots e_k$	$\{e_1, \ldots, e_k\}$	$\{a_1, \ldots, a_k\}$	$\{b_1, \ldots, b_k\}$	$\{c_1, \ldots, c_k\}$	$\{d_1, \ldots, d_k\}$

Dim. Seguendo lo stesso procedimento del Teorema 13, si determinano le seguenti tabelle di moltiplicazione, ove si è posto

$$\omega = \{a_1, \ldots, a_k\} ; \qquad B = \{b_1, \ldots, b_k\} ; \qquad C = \{c_1, \ldots, c_k\} ;$$
$$D = \{d_1, \ldots, d_k\} ; \qquad E = \{e_1, \ldots, e_k\} .$$

H_1

	ω	B	C	D	E
ω	ω	B	C	D	E
B	B	C	D	E	ω
C	C	D	E	ω	B
D	D	E	ω	B	C
E	E	ω	B	C	D

H_2

	ω	B	C	D	E
ω	ω	B	C	D	E
B	B	C	E	ω	D
C	C	E	D	B	ω
D	D	ω	B	E	C
E	E	D	ω	C	B

H_3

	ω	B	C	D	E
ω	ω	B	C	D	E
B	B	D	ω	E	C
C	C	ω	E	B	D
D	D	E	B	C	ω
E	E	C	D	ω	B

H_4

	ω	B	C	D	E
ω	ω	B	C	D	E
B	B	D	E	C	ω
C	C	E	B	ω	D
D	D	C	ω	E	B
E	E	ω	D	B	C

H_5

	ω	B	C	D	E
ω	ω	B	C	D	E
B	B	E	ω	C	D
C	C	ω	D	E	B
D	D	C	E	B	ω
E	E	D	B	ω	C

H_6

	ω	B	C	D	E
ω	ω	B	C	D	E
B	B	E	D	ω	C
C	C	D	B	E	ω
D	D	ω	E	C	B
E	E	C	ω	B	D

Si dimostra che esistono i seguenti isomorfismi

$$f=H_1\to H_2\,,\quad g=H_1\to H_3\,,\quad h=H_1\to H_4\,,\quad s=H_1\to H_5\,,\quad t=H_1\to H_6,$$

così definiti:

$$\begin{array}{lllll}
f(a_i)=a_i\,, & f(b_i)=b_i\,, & f(c_i)=c_i\,, & f(d_i)=e_i\,, & f(e_i)=d_i\,;\\
g(a_i)=a_i\,, & g(b_i)=b_i\,, & g(c_i)=d_i\,, & g(d_i)=e_i\,, & g(e_i)=c_i\,;\\
h(a_i)=a_i\,, & h(b_i)=b_i\,, & h(c_i)=d_i\,, & h(d_i)=c_i\,, & h(e_i)=e_i\,;\\
s(a_i)=a_i\,, & s(b_i)=b_i\,, & s(c_i)=e_i\,, & s(d_i)=d_i\,, & s(e_i)=c_i\,;\\
t(a_i)=a_i\,, & t(b_i)=b_i\,, & t(c_i)=e_i\,, & t(d_i)=c_i\,, & t(e_i)=d_i\,.
\end{array}$$

Infine, si verifica facilmente che H_1 è un ipergruppo soddisfacente le condizioni (1) e (2).

Dai risultati del n. **2** si può avanzare, a nostro avviso la seguente

Congettura. $\forall n \in N^*$ tale che $n = mk$, l'insieme delle classi di ipergruppi di ordine n, isomorfi tra loro, soddisfacenti le condizioni (1) e (2), e tali che $|\omega| = k$, ha la stessa cardinalità dell'insieme dei gruppi non isomorfi, di ordine m.

Bibliografia

[1] P. Corsini: $[\bullet]_1$ *Sur les semi-hypergroupes*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. (1979); $[\bullet]_2$ *Sur les semi-hypergroupes completes et les groupoides*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. (1979); $[\bullet]_3$ *Hypergroupes d'associativité des quasigroupes mediaux*, Atti Convegno su sistemi binari e applicazioni, Taormina 1978; $[\bullet]_4$ *Contributo alla teoria degli ipergruppi*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. (1980).

[2] P. Corsini et G. Romeo, *Hypergroupes completes et $\mathcal{T}$-groupoides*, Atti Convegno su sistemi binari e applicazioni, Taormina 1978.

[3] M. Hall, *The theory of groups*, Macmillan C_0, New York 1959.

[4] M. Koskas, *Groupoides, demi-hypergroupes et hypergroupes*, J. Math. Pures et Appl., **49** (1970).

Summary

The theorem of Lagrange is generalized, showing it in the context of the complete, finite hypergroups. The structure of these hypergroups is studied, succeeding in determining it, when the order $n \in \{q\, \mathbf{N}^*/2 \leqslant q \leqslant 5\}$; these results permit to advance a conjecture when the (finite) order is arbitrary.

* * *