Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 309-315

B. ROUXEL (*)

Sur les $\mathscr{A}$-surfaces d'un espace-temps de Minkowski M^4 (**)

1 - Introduction

De nombreux articles ont été consacrés récemment à l'étude de sous-variétés minimales et pseudo-ombilicales d'une variété lorentzienne. On étudie dans le cas d'un espace de Minkowski les propriétés d'une classe plus étendue de sous-variétés: les $\mathscr{A}$-sous-variétés. On en donne diverses caractérisations à l'aide des hypersurfaces isotropes associées et des courbures de Lipschitz-Killing; enfin, on fournit un procédé de construction des $\mathscr{A}$-surfaces à courbures de Lipschitz-Killing constantes en chaque point.

2 - Préliminaires

M^4 désignant l'espace-temps de Minkowski, on considère une sous-variété spatiale bidimensionnelle V_s^2 (à plan tangent genre-espace). On associe au point courant m de V_s^2 un repère orthonormé $R\{e_h\}$; on choisit les vecteurs spatiaux e_1 et e_2 dans l'espace tangent $T_m V_s^2$ et les vecteurs e_3 et e_4 dans l'espace normal $T_m^{\perp} V_s^2$ (e_3 sera supposé *genre-espace* et e_4 *genre-temps*). Les équations de connexion sont alors

$$(1)_1 \qquad dm = -\omega^1 e_1 - \omega^2 e_2 , \qquad (e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = -(e_4)^2 = -1 ,$$

$$(1)_2 \qquad \nabla e_i = \omega_i^j \otimes e_j , \qquad \omega_i^j = \gamma_{ik}^j \omega^k ,$$

$$(1)_3 \qquad \omega_i^j = -\omega_j^i \quad \text{si} \quad i, j \neq 4 , \qquad \omega_i^4 = \omega_4^i \quad \text{si} \quad i \neq 4 , \qquad \omega_4^4 = 0 .$$

(*) Indirizzo: U.E.R. de Math. Pures et Appl., Université des Sciences et Techniques de Lille I, 59655 Villeneuve D'Ascq, France.
(**) Ricevuto: 27-XI-1980.

Le vecteur courbure moyenne H est défini par

$$H = \tfrac{1}{2}\{(\gamma^3_{11} + \gamma^3_{22})\, e_3 + (\gamma^4_{11} + \gamma^4_{22})\, e_4\}\,. \tag{2}$$

Soit u, v un repère orthonormé de $T^{\perp}_m V^2_s$ tel que $H = |H|u$, on désigne par $a(H)$ le vecteur

$$a(H) = \frac{|H|}{2}\{\operatorname{trace} A_u A_v\}\, v \qquad (\textit{mean allied curvature vector}), \tag{3}$$

A_u et A_v désignant les secondes formes fondamentales associées à u et v.

On dira que V^2_s est une *$\mathscr{A}$-surface spatiale* de M^4 si $a(H) = 0$ [**3**]. Les surfaces minimales et pseudo-ombilicales de M^4 sont des $\mathscr{A}$-surfaces particulières; dans la suite désignerons par $\mathscr{A} - V^2_s$ une $\mathscr{A}$-surface qui n'est ni pseudo-ombilicale ni minimale. De telles sous-variétés ont été étudiées dans le cas d'espaces de Riemann dans [**3**], [**4**]$_1$, [**8**].

3 - Les hypersurfaces isotropes associées à une $\mathscr{A} - V^2_s$.

On sait [**6**]$_1$ que toute V^2_s est intersection de deux hypersurface isotropes associées intrinsèquement à la V^2_s considérée et engendrées par les deux vecteurs isotropes du plan normal $E_3 = (e_3 + e_4)/\sqrt{2}$, $E_4 = (e_4 - e_3)/\sqrt{2}$.

A ces hypersurfaces sont respectivement associées deux formes quadratiques ψ_3 et ψ_4 servant à définir les *pseudo-courbures principales* (au sens de Rosca) de ces hypersurfaces.

Les valeurs de ψ_3 et ψ_4 induites sur V^2_s sont

$$\begin{aligned} \psi_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\gamma^3_{11} - \gamma^4_{11})(\omega^1)^2 + 2(\gamma^3_{12} - \gamma^4_{12})\,\omega^1\omega^2 + (\gamma^3_{22} - \gamma^4_{22})(\omega^2)^2]\,, \\ \psi_4 &= \frac{-1}{\sqrt{2}}[(\gamma^3_{11} + \gamma^4_{11})(\omega^1)^2 + 2(\gamma^3_{12} + \gamma^4_{12})\,\omega^1\omega^2 + (\gamma^3_{22} + \gamma^4_{22})(\omega^2)^2]\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Il est possible de caractériser les $\mathscr{A} - V^2_s$ au moyen des pseudo-courbures principales des hypersurfaces isotropes associées, plus précisément on a le

Théorème 1. *Une V^2 spatiale de M^4 est une $\mathscr{A}$-surface si et seulement si les pseudo-courbures principales induites des deux hypersurfaces isotropes qui lui sont associées, sont proportionnelles.*

Nous utiliserons pour cela un repère particulier obtenu en prenant e_3 colinéaire à H (si H est genre espace, sinon une démonstration analogue se ferà en prenant e_4 colinéaire à H) et de plus nous choisirons e_1 et e_2 de manière a diagonaliser la deuxième forme quadratique relative à e_3. Dans ces conditions

$$\gamma_{11}^4 + \gamma_{22}^4 = 0\,, \qquad \gamma_{12}^3 = 0\,, \tag{5}$$

$$A_{e_3} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^3 & 0 \\ 0 & \gamma_{22}^3 \end{pmatrix}, \qquad Ae_4 = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^4 & \gamma_{12}^4 \\ \gamma_{12}^4 & -\gamma_{11}^4 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

et V_s^2 est une $\mathscr{A}$-surface si

$$\gamma_{11}^4(\gamma_{11}^3 - \gamma_{22}^3) = 0\,, \tag{7}$$

soit $\gamma_{11}^4 = 0$. Le cas $\gamma_{11}^3 - \gamma_{22}^3 = 0$ correspond aux variétés pseudo-ombilicale.

Désignons par H_3, K_3 (resp. H_4, K_4) les *pseudo-courbures moyennes* et *totales* de l'hypersurface isotrope associée à E_3 (resp. E_4) [**6**]$_1$. La condition de proportionalité imposée aux pseudo-courbures principales est équivalente à

$$\frac{(H_3)^2}{K_3} = \frac{(H_4)^2}{K_4}\,, \tag{8}$$

ce qui donne ici compte tenu de (5)

$$\frac{\gamma_{11}^3 + \gamma_{11}^4}{\gamma_{11}^3 - \gamma_{11}^4} = \frac{\gamma_{22}^3 + \gamma_{11}^4}{\gamma_{22}^3 - \gamma_{11}^4}\,,$$

soit $\gamma_{11}^4(\gamma_{11}^3 - \gamma_{22}^3) = 0$ qui n'est autre que la condition (7) que doit satisfaire la V_s^2 considérée pour être une $\mathscr{A}$-surface.

Un calcul analogue dans le cas où le vecteur courbure moyenne H est genre-temps achève la démonstration du Théorème 1.

Remarque 1. Une telle situation a déjà été envisagée par R. Rosca [**6**]$_2$ à propos de sous-variétés pseudo-ombilicale de M^4, les pseudo-courbures principales étant dans ce cas deux à deux opposées.

Remarque 2. W. Bonnor a démontré [**1**] qu'en un point d'une hypersurface isotrope de M^4 les sections hyperplanes sont localement semblable. Le résultat précédent montre que les hyperplans (non normaux) passant par un point m d'une $\mathscr{A} - V_s^2$ coupent les deux hypersurfaces isotropes associée à cette surface selon des surfaces localement semblables.

4 - Courbures de Lipschitz- Killing d'une $A-V_s^2$

Si u désigne un vecteur unitaire normal, *la courbure de Lipschitz-Killing* $K(m, \bar{u})$ est définie par $K(m, u) = \det A_u$.

Si u est genre-espace

$$u = \operatorname{ch}\theta e_3 + \operatorname{sh}\theta e_4 .$$

On trouve en utilisant un repère où e_3 est colinéaire à H supposé genre-espace

$$(9) \qquad K(m, u) = -\operatorname{ch}^2\theta\gamma_{11}^3\gamma_{22}^3 - \operatorname{sh}\theta\operatorname{ch}\theta(\gamma_{11}^3\gamma_{11}^4 - \gamma_{11}^4\gamma_{22}^3) + \operatorname{sh}^2\theta\big((\gamma_{12}^4)^2 + (\gamma_{11}^4)^2\big) .$$

Dans le cas où H est genre-temps, nous utiliserons un repère où e_4 est colinéaire à H et ou Ae_4 est diagonale; on trouve alors pour $\bar{u} = \operatorname{sh}\theta e_3 + \operatorname{ch}\theta e_4$

$$(10) \qquad K(m, \bar{u}) = \operatorname{ch}^2\theta\gamma_{11}^4\gamma_{22}^4 + \operatorname{sh}\theta\operatorname{ch}\theta(\gamma_{11}^3\gamma_{11}^4 - \gamma_{11}^3\gamma_{22}^4) - \operatorname{sh}^2\theta\big((\gamma_{11}^3)^2 + (\gamma_{12}^3)^2\big) .$$

On trouve pour chacun de ces cas

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} K(m, u)_{\theta=0} = \gamma_{11}^4(\gamma_{22}^3 - \gamma_{11}^3) , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} K(m, \bar{u})_{\theta=0} = \gamma_{11}^3(\gamma_{11}^4 - \gamma_{22}^4) ,$$

d'où l'on déduit compte tenu de (7) et d'une condition analogue dans le cas où H est genre-temps, le

Théorème 2. *Une surface genre-espace de M^4 est une $\mathscr{A}$-surface si et seulement si en tout point la courbure de Lipschitz-Killing est extrémale dans la direction du vecteur courbure moyenne.*

Ce résultat est à rapprocher de la caractérisation donnée pour les sous-variétés pseudo-ombilicales par C. S. Houh [4]$_2$.

On est alors conduit à étudier une classe particulière de $\mathscr{A}-V_s^2$: les surfaces pour lesquelles en chaque point la courbure de Lipschitz-Killing ne dépend pas de la direction considérée. Nous appellerons ces surfaces par abréviation: surfaces à courbure de Lipschitz-Killing constante.

5 - Les surfaces à courbures de Lipschitz-Killing constante

En tout point d'une telle surface la courbure de Lipschitz-Killing est constante ce qui, compte tenu de (9) donne

$$(11) \qquad \gamma^3_{11}\gamma^4_{11} - \gamma^4_{11}\gamma^3_{22} = 0\,, \qquad (\gamma^4_{12})^2 + (\gamma^4_{11})^2 - \gamma^3_{11}\gamma^3_{11} = 0\,.$$

On sait par ailleurs que les points focaux du plan normal à une V^2_s (points communs à un plan normal et aux plans normaux voisins) sont répartis sur une conique dite conique de Kommerell, dont l'équation est dans le cas général

$$(12) \qquad x^2(\gamma^3_{11}\gamma^3_{22} - (\gamma^3_{12})^2) - xy(\gamma^3_{11}\gamma^4_{22} + \gamma^3_{22}\gamma^4_{11} - 2\gamma^3_{12}\gamma^4_{12}) + y^2(\gamma^4_{11}\gamma^4_{22} - (\gamma^4_{12})^2)$$
$$+ x(\gamma^3_{11} + \gamma^3_{22}) - y(\gamma^4_{11} + \gamma^4_{22}) + 1 = 0\,.$$

On voit alors d'après (12) que dans ce cas *le conique de Kommerell est un cercle.* Dans le cas où la courbure de Lipschitz-Killing est donnée par (10) le résultat est le même.

De telles surfaces ont été étudiées en particulier par R. Calapso [**2**]. Nous nous proposons d'en donner un mode de génération.

Nous aurons donc pour une telle surface dans le cas où H est genre-espace et après particularisation du repère

$$(13) \qquad \gamma^3_{12} = 0\,, \qquad \gamma^4_{11}(\gamma^3_{11} - \gamma^3_{22}) = 0\,, \qquad \gamma^3_{11}\gamma^3_{22} - (\gamma^4_{11})^2 - (\gamma^4_{12})^2 = 0\,.$$

(a) Si V^2_s n'est pas pseudo-ombilicale, $\gamma^3_{11} - \gamma^3_{22} \neq 0$ et donc $\gamma^4_{11} = 0$. On a alors

$$(14) \qquad \gamma^3_{12} = 0\,, \qquad \gamma^4_{11} = \gamma^4_{22} = 0\,, \qquad \gamma^3_{11}\gamma^3_{22} - (\gamma^4_{12})^2 = 0\,.$$

Le réseau conjugué unique porté par une telle surface est donné par $\omega^3_1\omega^4_2 - \omega^4_1\omega^3_2 = 0$.

On constate à l'aide de (14) que les deux familles de courbes du réseau ont pour équations

$$(15) \qquad \omega^3_1 - \omega^4_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega^3_1 + \omega^4_1 = 0\,.$$

Désignons par Π^+ l'hyperplan isotrope défini par e_1, e_2, $e_3 + e_4$ par Π^- l'hyperplan isotrope défini par e_1, e_2, $e_3 - e_4$.

On constate que, si m décrit une courbe de la famille $\omega_1^3 - \omega_1^4 = 0$,

$$(16)_1 \qquad de_1 = \omega_1^3(e_3 + e_4) + \omega_1^2 e_2 ,$$

$$(16)_2 \qquad de_2 = \omega_2^3(e_3 + e_4) - \omega_1^2 e_1 \qquad (\operatorname{mod} \omega_1^3 - \omega_1^4) ,$$

$$(16)_3 \qquad d(e_3 + e_4) = \omega_3^4(e_3 + e_4) .$$

On obtient un système analogue avec l'autre famille et $e_3 - e_4$. De même, si H est genre-temps on obtient un système semblable.

(b) Si V_s^2 est pseudo-ombilicale $\gamma_{11}^3 - \gamma_{22}^3 = 0$ et l'on a alors

$$\gamma_{12}^3 = 0 , \qquad \gamma_{11}^3 = \gamma_{22}^3 , \qquad \gamma_{11}^4 + \gamma_{22}^4 = 0 , \qquad (\gamma_{11}^3)^2 - (\gamma_{11}^4)^2 - (\gamma_{12}^4)^2 = 0 .$$

Les équations (15) représentent les courbes du réseau conjugué et les équations (16) sont encore vérifiées.

Dans tous les cas, on en conclut que l'hyperplan Π^+ demeure fixe quand m décrit une courbe d'une famille du réseau conjugué. Lorsque m décrit une courbe de l'autre famille c'est le plan Π^- qui demeure fixe. Il apparaît dans ces conditions que les hyperplans isotropes Π^+ forment une famille d'hyperplans à un paramètre, de même pour les hyperplans Π^-. Soit (I) une trajectoire orthogonale de la famille (Π^+); Π^+ étant un hyperplan isotrope, (I) est une courbe isotrope dont Π^+ est l'hyperplan pseudo-osculateur au sens de R. Rosca [**6**]$_3$. De même à la famille des hyperplans Π^- on peut associer une autre courbe isotrope (J). On en déduit le

Théorème 3. *La famille des plans tangents d'une $\mathscr{A} - V_s^2$ à courbure de Lipschitz-Killing constante est formée de l'intersection des hyperplans pseudo-osculateurs de deux courbes isotropes de M^4.*

On peut montrer aisément que réciproquement tout couple de courbes isotropes de M^4 engendre par ce procédé, une $\mathscr{A} - V_s^2$ à courbure de Lipschitz-Killing constante.

En utilisant la notion de courbes pseudo-isotropes [**7**], on peut remplacer le Théorème 3 par le

Théorème 3'. *La famille des plans tangents d'une $\mathscr{A} - V_s^2$ à courbure de Lipschitz-Killing constante est formée de l'intersection des hyperplans osculateurs de deux courbes pseudo-isotropes de M^4.*

Il en résulte également que toute $\mathscr{A} - V_s^2$ à courbure de Lipschitz-Killing constante peut être engendrée par l'intersection des plans osculateurs de deux courbes pseudo-isotropes de M^4.

Comme par ailleurs on sait qu'à tout couple de courbes isotropes de M^4 on peut faire correspondre une surface minimale (engendrée par les milieux des segments dont les extrémités décrivent les deux courbes considérées) on en déduit qu'à tout $\mathscr{A}-V_s^2$ à courbure de Lipschitz-Killing constante correspond par plans tangents orthogonaux une surface minimale et réciproquement. On obtient ainsi un procédé simple de construction des surfaces minimales associées aux surface à courbure de Lipschitz-Killing constante et dont l'existence avait déjà été montrée par L. N. Krivonosov [5] dans le cas d'un espace euclidien quadridimensionnel.

Bibliografia

[1] W. B. Bonnor, *Null hypersurfaces in Minkowski space-time*, Tensor **24** (1972), 329-345.

[2] R. Calapso, *Sulle reti di Voss di uno spazio lineare quadridimensionale*, Rend. Mat. Roma **2** (1938), 276-311.

[3] B. Y. Chen, *Geometry of submanifolds*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[4] C. S. Houh: [•]$_1$ *On spherical $\mathscr{A}$-submanifolds*, Chinese J. Mat. (1974), 128-134; [•]$_2$ *Surfaces with maximal Lipschitz-Killing curvature in the direction of mean curvature vector*, Proc. Amer. Mat. Soc. **35** (1972), 537-542.

[5] L. N. Krivonosov, *Parallel and normal correspondence of two-dimension surfaces in the four dimensional Euclidean space E_4*, Izv. Vyss. Učebn. Zaved. Matematika **54** (1966), 78-87.

[6] R. Rosca: [•]$_1$ *On null hypersurfaces of a lorentzian manifold*, Tensor **23** (1972), 66-74; [•]$_2$ *Pseudo-umbilical two-dimensional manifolds with m-index $pM=1$, immersed in a Minkowski space-time M^4*, Tensor **24** (1972), 173-181; [•]$_3$ *Sur la semi-transformation asymptotique des courbes isotropes I d'un espace-temps de Minkowski*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **16** (1971), 583-597.

[7] B. Rouxel, *Sur les courbes isotropes, pseudo-isotropes et les surfaces isotropes d'un espace-temps de Minkowski M^4*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **49** (1979), 571-584.

[8] L. Verstraelen, *$\mathscr{A}$-surfaces with flat normal connection*, J. Korean Math. Soc. **15** (1978), 1-7.

* * *