Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 317-330

DOMENICO PERRONE (*)

Varietà conformemente piatte e Geometria spettrale (**)

1 - Introduzione

Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta n-dimensionale e ${}^p\Delta$ il Laplaciano operante su ${}^p\Lambda(M)$ spazio delle p-forme esterne $(0 \leqslant p \leqslant n)$.

Indicato con

$$ {}^p\mathrm{Spec}\,(M, g) = \{0 = \lambda_0^p < \lambda_1^p \ldots \lambda_1^p < \lambda_2^p \ldots \lambda_2^p < \lambda_3^p \ldots\} \to +\infty $$

l'insieme degli autovalori di ${}^p\Delta$ scritti con la loro molteplicità, si ha lo sviluppo asintotico di Minakshisundaram-Pleijl

$$ (1.1) \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \exp\,[-\lambda_k^p t] \underset{t\to 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-n/2}({}^pa_0 + t\,{}^pa_1 + t^2\,{}^pa_2 + \ldots + t^k\,{}^pa_k + \ldots)\,. $$

Berger [**1**] ha calcolato i coefficienti ${}^0a_0$, ${}^0a_1$, ${}^0a_2$, il coefficiente ${}^0a_3$ è stato calcolato da Sakai [**6**]; mentre Patodi [**4**], ha calcolato i coefficienti ${}^pa_1$ e ${}^pa_2$ per ogni $0 \leqslant p \leqslant n$.

Vari autori, utilizzando l'espressione dei coefficienti della formula (1.1), hanno studiato l'influenza dello spettro sulla geometria della varietà M.

In questa nota siamo interessati principalmente a determinare l'influenza dello spettro, ${}^p\mathrm{Spec}$ (con $p = 0, 1$), sulle varietà conformemente piatte.

In **2** si danno delle identità, valide per varietà conformemente piatte, necessarie per il seguito.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via Arnesano, 73100 Lecce, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). – Ricevuto- 27-XI-1980.

In **3** si caratterizza, mediante lo ^{p}Spec (con $p = 0, 1$), la classe delle varietà (di dimensione > 3) conformemente piatte con curvatura scalare costante (cfr. Teorema 3.1) e la classe delle varietà (di dimensione > 3 e $\neq 8$) conformemente piatte con tensore di Ricci parallelo (cfr. Teorema 3.2).

In **4** si considerano varietà conformemente piatte con curvatura scalare costante di dimensione 4 e 6, e si studia l'influenza dello ^{0}Spec sulla caratteristica di Eulero-Poincaré (cfr. Teorema 4.1 e Teorema 4.2).

Infine in **5** si considerano varietà Kähleriane Bochner piatte e si osserva che lo spazio proiettivo complesso munito della metrica Kähleriana canonica, è caratterizzato dallo ^{p}Spec con $p = 0, 1$.

2 - Lemmi preliminari

Per ogni varietà Riemanniana (M, g), indicheremo con R, ϱ, τ e ∇ rispettivamente il tensore di curvatura, il tensore di Ricci, la curvatura scalare e la connessione Riemanniana di M. Useremo inoltre le seguenti notazioni

$$\|R\|^2 = \sum (R_{ijkh})^2\,, \qquad \|\varrho\|^2 = \sum (\varrho_{ij})^2\,, \qquad \|\nabla R\|^2 = \sum (\nabla_k R_{ijqh})^2\,,$$

$$\|\nabla\varrho\|^2 = \sum (\nabla_k \varrho_{ij})^2\,, \qquad \|\nabla\tau\|^2 = \sum (\nabla_k \tau)^2\,,$$

dove le componenti dei tensori considerati sono riferite a una base ortonormale dello spazio tangente.

Lemma 2.1. *Per ogni varietà Riemanniana 3-dimensionale e per ogni varietà Riemanniana di dimensione $n > 3$ conformemente piatta, valgono le seguenti identità*

$$\sum \varrho_{ij} R_{ipqr} R_{jpqr} = \frac{2(n+1)}{(n-1)(n-2)^2}\,\tau\|\varrho\|^2 - \frac{2}{(n-1)(n-2)^2}\,\tau^3 + \frac{2(n-4)}{(n-2)^2}\sum \varrho_{ij}\varrho_{ip}\varrho_{jp}\,, \tag{2.1}$$

$$\sum \varrho_{ij}\varrho_{kh} R_{ikjh} = \frac{2n-1}{(n-1)(n-2)}\,\tau\|\varrho\|^2 - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\,\tau^3 - \frac{2}{(n-2)}\sum \varrho_{ij}\varrho_{ip}\varrho_{jp}\,, \tag{2.2}$$

$$\sum R_{ijkh}R_{khpq}R_{ijpq} = \frac{24}{(n-1)(n-2)^3}\tau\|\varrho\|^2 - \frac{4n}{(n-1)^2(n-2)^3}\tau^3 + \frac{8(n-4)}{(n-2)^3}\sum \varrho_{ij}\varrho_{ip}\varrho_{jp}\,, \tag{2.3}$$

$$\sum R_{ikjh}R_{kphq}\,R_{piqj} = \frac{3n^2-6n-6}{(n-2)^3(n-1)}\tau\|\varrho\|^2 - \frac{2n^2-7n+4}{(n-1)^2(n-2)^3}\tau^3 + \frac{2(8-3n)}{(n-2)^3}\sum \varrho_{ij}\varrho_{ip}\varrho_{jp}\,, \tag{2.4}$$

$$\|R\|^2 = \frac{4}{(n-2)}\|\varrho\|^2 - \frac{2}{(n-1)(n-2)}\tau^2\,, \tag{2.5}$$

$$\|\nabla R\|^2 = \frac{4}{(n-2)}\|\nabla\varrho\|^2 - \frac{2}{(n-1)(n-2)}\|\nabla\tau\|^2\,. \tag{2.6}$$

Dim. Per ogni varietà Riemanniana 3-dimensionale e per ogni varietà Riemanniana di dimensione $n > 3$ conformemente piatta, il tensore di curvatura si può esprimere in termini del tensore di Ricci e della curvatura scalare mediante la formula

$$R_{ijkh} = \frac{1}{(n-2)}(g_{ik}\varrho_{jh} + g_{jh}\varrho_{ik} - g_{ih}\varrho_{jk} - g_{jk}\varrho_{ih}) - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})\,. \tag{2.7}$$

Pertanto le identità del Lemma 2.1 si ottengono sostituendo nei primi membri l'espressione (2.7).

Lemma 2.2. *Per ogni varietà Riemanniana conformemente piatta di dimensione $n \geqslant 3$, si ha*

$$\nabla_k\varrho_{ij} - \nabla_j\varrho_{ik} = \frac{1}{2(n-1)}(g_{ij}\nabla_k\tau - g_{ik}\nabla_j\tau)\,, \tag{2.8}$$

$$\sum(\nabla^2_{ki}\varrho_{jh})R_{kjih} = \frac{1}{2(n-1)}\sum \varrho_{ki}\nabla^2_{ki}\tau\,. \tag{2.9}$$

Dim. Per $n = 3$ la (2.8) è proprio la C.N.S. affinchè la varietà sia conformemente piatta.

Per $n > 3$, dalla (2.7), si ha

$$\sum \nabla_i R_{ijkh} = \frac{1}{(n-2)} (\nabla_k \varrho_{jh} - \nabla_h \varrho_{jk} + g_{jh} \sum \nabla_i \varrho_{ik} - g_{jk} \sum \nabla_i \varrho_{ih}) - \frac{1}{(n-1)(n-2)} (g_{jh} \nabla_k \tau - g_{jk} \nabla_h \tau) \; ; \tag{2.10}$$

dalla 2ª identità di Bianchi

$$\nabla_i R_{jkhp} + \nabla_j R_{kihp} + \nabla_k R_{ijhp} = 0 \, ,$$

seguono inoltre le uguaglianze

$$\sum \nabla_i R_{ijkh} = \nabla_k \varrho_{jh} - \nabla_h \varrho_{jk} \qquad \text{e} \qquad \sum \nabla_i \varrho_{ij} = \tfrac{1}{2} \nabla_j \tau \, ,$$

le quali sostituite nella (2.10) danno la (2.8).

Sempre dalla (2.7) si ha

$$\sum (\nabla^2_{ki} \varrho_{jh}) R_{kjih} = \frac{1}{(n-2)} \sum (\varrho_{ki} \nabla^2_{ki} \varrho_{jj} - \varrho_{kh} \nabla^2_{kj} \varrho_{jh} + \varrho_{jh} \nabla^2_{kk} \varrho_{jh} - \varrho_{ji} \nabla^2_{hi} \varrho_{jh}) - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \sum (\nabla^2_{kk} \varrho_{hh} - \nabla^2_{hi} \varrho_{hi}) \, .$$

Applicando la (2.8) in quest'ultima identità si perviene alla

$$\sum (\nabla^2_{ki} \varrho_{jh}) R_{kjih} = \frac{1}{(n-2)} \sum \left(\frac{n-2}{2(n-1)} \varrho_{ki} \nabla^2_{ki} \tau + \frac{1}{2(n-1)} \tau \nabla^2_{kk} \tau\right) - \frac{\tau}{2(n-1)(n-2)} \sum \nabla^2_{kk} \tau = \frac{1}{2(n-1)} \sum \varrho_{ki} \nabla^2_{ki} \tau \, .$$

Lemma 2.3. *Per ogni varietà Riemanniana compatta di dimensione 3 e per ogni varietà Riemanniana compatta di dimensione $n > 3$ conformemente piatta, il coefficiente ${}^0a_3$ dello sviluppo di Minakshisundaram-Pleijl è dato da*

$$\begin{aligned} {}^0a_3 = \frac{1}{6!} \int_M \Big\{ & -\frac{2}{63} \frac{(71n^2 - 213n + 135)}{(n-1)(n-2)} \|\nabla \tau\|^2 + \frac{2}{63} \frac{(12 - 13n)}{(n-2)} \|\nabla \varrho\|^2 \\ & + \Big[-\frac{8}{63} \Big(\frac{13n^3 - 67n^2 + 122n - 56}{(n-1)^2(n-2)^3}\Big) + \frac{5}{9}\Big] \tau^3 \\ & + \Big[\frac{4}{63} \Big(\frac{52n^3 - 259n^2 + 400n - 36}{(n-1)(n-2)^3}\Big) - \frac{2}{3}\Big] \tau \|\varrho\|^2 \\ & - \frac{4}{63} \frac{(9n^3 - 40n^2 - 4n + 192)}{(n-2)^3} \sum \varrho_{ij} \varrho_{ip} \varrho_{jp} \Big\} v_g \, . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dim. In [6] Sakai ottiene la seguente formula per ${}^0a_3$

$${}^0a_3 = \frac{1}{6!}\int_M \Big(-\frac{142}{63}\|\nabla\tau\|^2 - \frac{26}{63}\|\nabla\varrho\|^2 - \frac{1}{9}\|\nabla R\|^2 + \frac{5}{9}\tau^3 - \frac{2}{3}\tau\|\varrho\|^2$$

$$+\frac{2}{3}\tau\|R\|^2 - \frac{4}{7}\sum \varrho_{ij}\varrho_{ip}\varrho_{jp} + \frac{20}{63}\sum \varrho_{ij}\varrho_{kh}R_{ikjh} - \frac{8}{63}\sum \varrho_{ij}R_{ipqr}R_{jpqr}$$

$$+\frac{8}{21}\sum R_{ijkh}R_{ijpq}R_{khpq}\Big)\,v_g\,.$$

Applicando in questa formula le identità (2.1), (2.2), (2.3), (2.5) e (2.6) del Lemma 2.1, si ottiene la (2.11).

3 - Varietà Riemanniane conformemente piatte con tensore di Ricci parallelo

Due importanti classi di varietà Riemanniane compatte sono le varietà di Einstein e le varietà con curvatura scalare costante. Entrambe queste classi di varietà sono state caratterizzate, mediante lo spettro ${}^p\mathrm{Spec}$ rispettivamente con $p = 0, 1$ e con $p = 0, 1, 2$, da Patodi (cfr. [4], Prop. 4.1).

Un'altra interessante classe di varietà Riemanniane, compresa tra la classe delle varietà di Einstein e la classe delle varietà a curvatura scalare costante, è la classe delle varietà M a tensore di Ricci parallelo cioè con la proprietà che $\nabla_X(\varrho)(Y, Z) = 0$ per ogni X, Y, Z campi di vettori C^∞ su M.

L'interesse nello studio delle varietà a tensore di Ricci parallelo può essere giustificato dalle considerazioni seguenti.

Date due varietà di Einstein (M, g) e (M', g'), la varietà prodotto $(M\times M', g\times g')$ ha tensore di Ricci ϱ'' e curvatura scalare τ'' che soddisfano,

$$\|\varrho''\|^2 = \|\varrho\|^2 + \|\varrho'\|^2 \qquad \text{e} \qquad \tau'' = \tau + \tau'\,,$$

ove ϱ, τ e ϱ', τ' denotano tensore di Ricci e curvatura scalare di M e M' rispettivamente. Posto $\dim M = n$ e $\dim M' = n'$ con $n + n' \geqslant 3$, la varietà prodotto $M\times M'$ sarà di Einstein se, e solo se, $\|\varrho''\|^2 = (\tau + \tau')^2/(n + n')$. Pertanto, anche se $\tau = \tau'$, $M\times M'$ non sarà in generale di Einstein. Ciò porta quindi a una limitazione nello studio delle varietà di Einstein. A questa limitazione si può rimediare introducendo la nozione di metrica Riemanniana a tensore di Ricci parallelo. Difatti se (M, g) è una varietà a tensore di Ricci parallelo, allora M è localmente isometrica al prodotto Riemanniano di varietà di Einstein (¹). D'altronde se (M, g) e (M', g') sono due varietà a tensore di Ricci parallelo, il loro prodotto $(M\times M', g\times g')$ è ancora a tensore di Ricci parallelo.

In questa nota ci proponiamo di caratterizzare, mediante lo spettro, la classe delle varietà Riemanniane compatte conformemente piatte con tensore di Ricci parallelo (²).

Consideriamo intanto le varietà conformemente piatte con curvatura scalare costante.

Teorema 3.1. *Siano* (M, g) *e* (M', g') *varietà Riemanniane compatte con* $\dim M = n > 3$ *e* ${}^p\mathrm{Spec}\,(M, g) = {}^p\mathrm{Spec}\,(M', g')$ *per* $p = 0, 1$. *Allora* M *è conformemente piatta con curvatura scalare costante* τ *se, e solo se,* M' *è conformemente piatta con curvatura scalare costante* $\tau' = \tau$.

Dim. Supponiamo M conformemente piatta con curvatura scalara costante τ. Dalla (1.1) segue che M' ha dimensione $n' = n$.

L'insieme delle due condizioni

$$\int_M (2\|R\|^2 - 2\|\varrho\|^2 + 5\tau^2)\, v_g = 360\,{}^0a_2 = 360\,{}^0a_2'$$

$$= \int_{M'} (2\|R'\|^2 - 2\|\varrho'\|^2 + 5\tau'^2)\, v_{g'} \text{ e } \int_M [2(n-15)\|R\|^2 - 2(n-90)\|\varrho\|^2 + 5(n-12)\tau^2]\, v_g$$

$$= 360\,{}^1a_2 = 360\,{}^1a_2' = \int_{M'} [2(n-15)\|R'\|^2 - 2(n-90)\|\varrho'\|^2 + 5(n-12)\tau'^2]\, v_{g'}\,,$$

sono equivalenti alle due condizioni

$$360\,{}^0a_2 = 360\,{}^0a_2' \text{ e } \int_M (\|R\|^2 - 6\|\varrho\|^2 + 2\tau^2)\, v_g = \int_{M'} (\|R'\|^2 - 6\|\varrho'\|^2 + 2\tau'^2)\, v_{g'}\,,$$

le quali sono equivalenti alle due condizioni

$$\int_M (\tau^2 + 10\|\varrho\|^2)\, v_g = \int_{M'} (\tau'^2 + 10\|\varrho'\|^2)\, v_{g'}\,, \tag{3.1}$$

$$\int_M (13\tau^2 + 5\|R\|^2)\, v_g = \int_{M'} (13\tau'^2 + 5\|R'\|^2)\, v_{g'}\,. \tag{3.2}$$

(¹) Ciò segue dal fatto che la curvatura di Ricci è invariante sotto l'azione del gruppo di olonomia, e dal teorema di decomposizione di de Rham (cfr. [3], pag. 192).

(²) Naturalmente esistono esempi di varietà conformemente piatte con tensore di Ricci parallelo che non sono di Einstein (e quindi non sono a curvatura sezionale costante).

Essendo M conformemente piatta vale la (2.5). Inoltre, indicato con $C' = (C'_{ijkh})$ il tensore di curvatura di Weyl di M', si ha

$$\|R'\|^2 = \|C'\|^2 + \frac{4}{(n-2)}\|\varrho'\|^2 - \frac{2}{(n-1)(n-2)}\tau'^2 \tag{3.3}$$

$$\geqslant \frac{4}{(n-2)}\|\varrho'\|^2 - \frac{2}{(n-1)(n-2)}\tau'^2 ,$$

ove il segno di uguaglianza si verifica se, e solo se, M' è conformemente piatta.

La (3.2) insieme alla (2.5) e alla (3.3), implica

$$\int_M \left[\frac{(13n^2-39n+16)}{(n-1)(n-2)}\tau^2 + \frac{20}{n-2}\|\varrho\|^2\right] v_g$$

$$\geqslant \int_{M'} \left[\frac{(13n^2-39n+16)}{(n-1)(n-2)}\tau'^2 + \frac{20}{n-2}\|\varrho'\|^2\right] v_{g'} .$$

Da questa disuguaglianza e dalla (3.1) si ottiene infine

$$\frac{13n^2-41n+18}{(n-1)(n-2)}\int_M \tau^2 v_g \geqslant \frac{13n^2-41n+18}{(n-1)(n-2)}\int_{M'} \tau'^2 v_{g'} ,$$

da cui, poichè il coefficiente $13n^2-41n+18$ è strettamente positivo, si ha

$$\int_M \tau^2 v_g \geqslant \int_{M'} \tau'^2 v_{g'} . \tag{3.4}$$

Per la disuguaglianza di Schwartz risulta

$$\left(\int_{M'} \tau' v_{g'}\right)^2 \leqslant \int_{M'} \tau'^2 v_{g'} \int_{M'} 1 v_{g'} ,$$

dove il segno di uguaglianza è ottenuto se, e solo se, τ' è costante.

D'altronde le condizioni $\tau = \text{cost}$, $\operatorname{vol}(M) = {}^0a_0 = {}^0a'_0 = \operatorname{vol}(M')$ e $\int_M \tau v_g = 6\,{}^0a_1 = 6\,{}^0a'_1 = \int_{M'} \tau' v_{g'}$ insieme alla (3.4), portano alla

$$\left(\int_{M'} \tau' v_{g'}\right)^2 = \left(\int_M \tau v_g\right)^2 = \int_M \tau^2 v_g \int_M 1 v_g \geqslant \int_{M'} \tau'^2 v_{g'} \int_{M'} 1 v_{g'} .$$

Dunque vale il segno di uguaglianza, pertanto $\tau' = \text{cost}$ e di conseguenza $\tau' = \tau$. Dalla (3.1) e dalla (3.2) segue quindi

$$\int_M \|R\|^2 v_g = \int_{M'} \|R'\|^2 v_{g'} \qquad \text{e} \qquad \int_M \|\varrho\|^2 v_g = \int_{M'} \|\varrho'\|^2 v_{g'} ,$$

per cui

$$\int_{M'} \|C'\|^2 v_{g'} = \int_{M} \left(\|R\|^2 - \frac{4}{n-2}\|\varrho\|^2 + \frac{2}{(n-1)(n-2)}\tau^2\right) v_g = 0 .$$

Quindi M' è conformemente piatta con curvatura scalare $\tau' = \tau$.

Teorema 3.2. *Siano (M, g) e (M', g') varietà Riemanniane compatte con* ${}^p\mathrm{Spec}\,(M, g) = {}^p\mathrm{Spec}\,(M', g')$ *per $p = 0, 1$.*

Se $\dim M = n > 3$ e $\neq 8$, allora M è conformemente piatta con tensore di Ricci parallelo se, e solo se , M' è conformemente piatta con tensore di Ricci parallelo.

Dim. Supponiamo M conformemente piatta con tensore di Ricci ϱ parallelo. In particolare M è conformemente piatta con curvatura scalare $\tau = \text{cost}$, e per il Teorema 3.1 anche M' è conformemente piatta con curvatura scalare $\tau' = \tau$ e con

$$\int_{M'} \|\varrho'\|^2 v_{g'} = \int_{M} \|\varrho\|^2 v_g , \qquad \int_{M'} \|R'\|^2 v_{g'} = \int_{M} \|R\|^2 v_g . \tag{3.5}$$

Ricordiamo che per ogni varietà Riemanniana vale la seguente formula (cfr. Lemma 2.1 di [**5**])

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Delta(\|R\|^2) = &- \|\nabla R\|^2 - 4\sum (\nabla^2_{ij}\varrho_{kh}) R_{ikjh} - 2\sum \varrho_{ij} R_{ipqr} R_{jpqr} \\ &+ 4\sum R_{ijkh} R_{ipkq} R_{jphq} + \sum R_{ijkh} R_{khpq} R_{ijpq} . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Per M' (varietà conformemente piatta con $\tau' = \text{cost} = \tau$) tale formula, tenendo conto delle (2.1), (2.3), (2.4) e (2.6) del Lemma 2.1 e della (2.9) del Lemma 2.2, diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta(\|R'\|^2) = &- \frac{4}{n-2}\|\nabla' \varrho'\|^2 - \frac{4n}{(n-2)^2}\sum \varrho'_{ij}\varrho'_{ip}\varrho'_{jp} \\ &+ \frac{4(2n-1)}{(n-1)(n-2)^2}\tau\|\varrho'\|^2 - \frac{4}{(n-1)(n-2)^2}\tau^3 . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Per M, che ha anche $\nabla\varrho = 0$, si ha invece

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta(\|R\|^2) = &- \frac{4n}{(n-2)^2}\sum \varrho_{ij}\varrho_{ip}\varrho_{jp} + \frac{4(2n-1)}{(n-1)(n-2)^2}\tau\|\varrho\|^2 \\ &- \frac{4}{(n-1)(n-2)^2}\tau^3 . \end{aligned} \tag{3.8}$$

La condizione ${}^0a_3 = {}^0a_3'$, tenendo conto dell'espressione trovata nel Lemma 2.3 per varietà conformemente piatte, insieme alla (3.5), implica

$$\frac{2(9n^3-40n^2-4n+192)}{(n-2)}\int_M \sum \varrho_{ij}\varrho_{jp}\varrho_{ip}\, v_g \tag{3.9}$$

$$=\frac{2(9n^3-40n^2-4n+192)}{(n-2)}\int_{M'} \sum \varrho'_{ij}\varrho'_{jp}\varrho'_{ip} v_{g'} + (13n-12)\int_{M'} \|\nabla'\varrho'\|^2 v_{g'}\,.$$

Dalla (3.7) e dalla (3.8) seguono inoltre, essendo M e M' compatte,

$$\int_{M'} \sum \varrho'_{ij}\varrho'_{jp}\varrho'_{ip} v_{g'} = -\frac{n-2}{n}\int_{M'} \|\nabla'\varrho'\|^2 v_{g'} + \frac{2n-1}{n(n-1)}\int_{M'} \tau\|\varrho'\|^2 v_{g'} - \frac{1}{n(n-1)}\int_{M'} \tau^3 v_{g'}\,, \tag{3.7)'}$$

$$\int_M \sum \varrho_{ij}\varrho_{jp}\varrho_{ip} v_g = \frac{2n-1}{n(n-1)}\int_M \tau\|\varrho\|^2 v_g - \frac{1}{n(n-1)}\int_M \tau^3 v_g\,. \tag{3.8)'}$$

Sostituendo la (3.7)′ e la (3.8)′ nella (3.9), tenendo conto della (3.5), si ha

$$(n-8)(5n^2-2n-48)\int_{M'} \|\nabla'\varrho'\|^2 v_{g'} = 0\,. \tag{3.10}$$

Poichè per ogni intero $n \neq 8$ il coefficiente $(n-8)(5n^2-2n-48)$ è $\neq 0$, dalla (3.10) segue che $\nabla'\varrho' = 0$, quindi M' è conformemente piatta con tensore di Ricci parallelo.

Per il caso 3-dimensionale abbiamo la seguente

Prop. *Siano* (M, g) *e* (M', g') *varietà Riemanniane compatte conformemente piatte con* dim $M = 3$. *Se* ${}^p\mathrm{Spec}\,(M, g) = {}^p\mathrm{Spec}\,(M', g')$ *con* $p = 0, 1$, *allora* M *è tensore di Ricci parallelo se, e solo se,* M' *è a tensore di Ricci parallelo.*

Dim. Sia M a tensore di Ricci parallelo, allora M ha curvatura scalare $\tau = \text{cost}$. Usando la (3.1) e la (3.2), insieme alle relazioni $\|R\|^2 = 4\|\varrho\|^2 - \tau^2$ e $\|R'\|^2 = 4\|\varrho'\|^2 - \tau'^2$, è facile provare che $\tau' = \text{cost} = \tau$.

D'altronde M ed M' sono conformemente piatte, per cui operando come nel Teorema 3.2 si ottiene $\int_{M'} \|\nabla'\varrho'\|^2 v_{g'} = 0$, quindi M' è a tensore di Ricci parallelo.

Oss. In [**2**]$_1$ Donnelly prova che se una varietà compatta di Einstein M ha stesso ${}^p\mathrm{Spec}$ (con $p = 0, 1, 2$) di uno spazio localmente simmetrico M', allora M è uno spazio localmente simmetrico. In questo risultato sugli spazi localmente simmetrici è essenziale la condizione che M sia di Einstein. Considerando, al posto di varietà di Einstein, varietà conformemente piatte, abbiamo quanto segue.

Siano (M, g) *e* (M', g') *varietà Riemanniane compatte con* ${}^p\mathrm{Spec}\,(M, g) = {}^p\mathrm{Spec}\,(M', g')$ *per* $p = 0, 1$. *Se* $\dim M = n > 3$ *e* $\neq 8$, *allora* M *è uno spazio localmente simmetrico conformemente piatto (con curvatura scalare costante* τ*) se, e solo se,* M' *è uno spazio localmente simmetrico conformemente piatto (con curvatura scalare costante* $\tau' = \tau$*).*

Dim. Ricordiamo che una varietà Riemanniana è localmente simmetrica quando, e solo quando, il suo tensore di curvatura è parallelo. In particolare uno spazio Riemanniano localmente simmetrico è a curvatura scalare costante. Per il Teorema 3.1 M è conformemente piatta con curvatura scalare $\tau = \mathrm{cost}$ se, e solo se, M' è conformemente piatta con curvatura scalare $\tau' = \mathrm{cost} = \tau$. D'altronde dalla (2.6) del Lemma 2.1, per tali varietà, si ha $(n-2)\|\nabla R\|^2 = 4\|\nabla\varrho\|^2$ e $(n-2)\|\nabla' R'\|^2 = 4\|\nabla'\varrho'\|^2$. Pertanto il risultato enunciato segue dal Teorema 3.2.

4 - Varietà conformemente piatte di dimensione 4 e 6

Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta. Se M ha dimensione 4 la caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(M)$ è data dalla (cfr. [**1**], pag. 225)

$$\chi(M) = \frac{1}{32\pi^2}\int_M (\|R\|^2 - 4\|\varrho\|^2 + \tau^2)\, v_g\,. \tag{4.1}$$

Mentre se M ha dimensione 6, $\chi(M)$ ha la seguente espressione (cfr. [**6**], pag. 602)

$$\chi(M) = \frac{1}{384\pi^3}\int_M \Big(\tau^3 - 12\tau\|\varrho\|^2 + 3\tau\|R\|^2 + 16\sum \varrho_{ij}\varrho_{ip}\varrho_{jp} + 24\sum \varrho_{ij}\varrho_{kh}R_{ikjh} - 24\sum \varrho_{ij}R_{ipqr}R_{jpqr} - 8\sum R_{ikjh}R_{kphq}R_{piqj} + 4\sum R_{ijkh}R_{khpq}R_{pqij}\Big)\, v_g\,. \tag{4.2}$$

Teorema 4.1. *Siano* (M, g) *e* (M', g') *varietà Riemanniane compatte con* ${}^0\mathrm{Spec}\,(M, g) = {}^0\mathrm{Spec}\,(M', g')$ *e con* M *di dimensione* 4.

Se M è conformemente piatta con curvatura scalare $\tau = \text{cost}$, allora $\chi(M) \leq \chi(M')$, ove il segno di uguaglianza si ha se, e solo se, anche M' è conformemente piatta con curvatura scalare $\tau' = \text{cost} = \tau$.

Dim. Sia M conformemente piatta con curvatura scalare $\tau = \text{cost}$. Intanto le condizioni ${}^0a_i = {}^0a_i'$ $(i = 0, 1)$ e $\tau = \text{cost}$, insieme alla disuguaglianza di Schwartz, portano alla

$$\int_M \tau^2 v_g \leq \int_{M'} \tau'^2 v_{g'}, \tag{4.3}$$

ove l'uguaglianza si ha se, e solo se, $\tau' = \text{cost} = \tau$.

Inoltre poichè M è conformemente piatta e 4-dimensionale, la condizione ${}^0a_2 = {}^0a_2'$ implica la

$$2\int_M \|\varrho\|^2 v_g = \int_{M'} (2\|C'\|^2 + 2\|\varrho'\|^2 + \frac{13}{3}\tau'^2)\, v_{g'} - \frac{13}{3}\int_M \tau^2 v_g . \tag{4.4}$$

Infine la (4.1), insieme alla (4.3) e alla (4.4), porta alla

$$\begin{aligned} 32\pi^2(\chi(M') - \chi(M)) &= \int_{M'} (\|R'\|^2 - 4\|\varrho'\|^2 + \tau'^2) v_{g'} - \int_M (\tfrac{2}{3}\tau^2 - 2\|\varrho\|^2) v_g \\ &= \int_{M'} (\|C'\|^2 - 2\|\varrho'\|^2 + \tfrac{2}{3}\tau'^2) v_{g'} + \int_M (2\|\varrho\|^2 - \tfrac{2}{3}\tau^2) v_g \\ &= \int_{M'} 3\|C'\|^2 v_{g'} + 5\Big(\int_{M'} \tau'^2 v_{g'} - \int_M \tau^2 v_g\Big) \geq 0 , \end{aligned}$$

ove il segno di uguaglianza si ha se, e solo se, M' è conformemente piatta con curvatura scalare $\tau' = \text{cost} = \tau$.

Teorema 4.2. *Siano (M, g) e (M', g') varietà Riemanniane compatte con ${}^0\text{Spec}\,(M, g) = {}^0\text{Spec}\,(M', g')$ e con M 6-dimensionale. Se M è conformemente piatta con curvatura scalare $\tau = \text{cost}$, allora M' è conformemente piatta con curvatura scalare $\tau' = \text{cost} = \tau$ e con $\chi(M') = \chi(M)$.*

Dim. Per $n = 6$ la (2.5) e la (3.3), insieme alla condizione ${}^0a_2 = {}^0a_2'$, portano alla (3.4). Pertanto procedendo come nel Teorema 3.1 si ha che M' è conformemente piatta con curvatura scalare costante $\tau' = \tau$.

Usando la (2.1), la (2.2), la (2.3), la (2.4) e la (2.5) del Lemma 2.1, dalla (4.2) segue che

$$\chi(M) = \frac{1}{256\pi^3} \int_M \Big(\frac{7}{50}\tau^3 - \frac{9}{10}\tau\|\varrho\|^2 + \sum \varrho_{ij}\varrho_{ip}\varrho_{jp}\Big) v_g .$$

Analoga espressione si ha per M'.

Quindi per provare che $\chi(M) = \chi(M')$, basterà provare che

$$(4.5)\quad -\frac{9}{10}\int_M \tau\|\varrho\|^2 v_g + \int_M \sum \varrho_{ij}\varrho_{jp}\varrho_{ip} v_g = -\frac{9}{10}\int_M \tau\|\varrho'\|^2 v_{g'} + \int_{M'} \sum \varrho'_{ij}\varrho'_{jp}\varrho'_{ip} v_{g'} .$$

Da ${}^0a_3 = {}^0a'_3$, segue la

$$(4.6)\quad 11\int_M \|\nabla\varrho\|^2 v_g + 14\int_M \sum \varrho_{ij}\varrho_{jp}\varrho_{ip}\, v_g - \frac{19}{5}\int_M \tau\|\varrho\|^2 v_g$$
$$= 11\int_{M'} \|\nabla'\varrho'\|^2 v_{g'} + 14\int_{M'} \sum \varrho'_{ij}\varrho'_{jp}\varrho'_{ip} v_{g'} - \frac{19}{5}\int_{M'} \tau\|\varrho'\|^2 v_{g'} .$$

D'altronde integrando la (3.7), sia per M che per M', si perviene alla

$$(4.7)\quad 2\int_M \|\nabla\varrho\|^2 v_g + 3\int_M \sum \varrho_{ij}\varrho_{jp}\varrho_{ip}\, v_g - \frac{11}{10}\int_M \tau\|\varrho\|^2 v_g$$
$$= 2\int_{M'} \|\nabla'\varrho'\|^2 v_{g'} + 3\int_{M'} \sum \varrho'_{ij}\varrho'_{jp}\varrho'_{ip} v_{g'} - \frac{11}{10}\int_M \tau\|\varrho'\|^2 v_{g'} .$$

Dalla (4.7) e dalla (4.6) segue la (4.5).

5 - Varietà Kähleriane Bochner piatte

Sia (M, g, J) una varietà Kähleriana con struttura complessa J e metrica Kähleriana g. L'analogo per varietà Kähleriane, del tensore di curvatura di Weyl, è il tensore di curvatura di Bochner $B = (B_{ijkh})$ il quale soddisfa

$$(5.1)\quad \|B\|^2 = \|R\|^2 - \frac{16}{n+4}\,\|\varrho\|^2 + \frac{8}{(n+2)(n+4)}\,\tau^2 ,$$

ove $n = \dim_R M$.

La varietà Kähleriana M è detta *Bochner piatta* se il tensore B svanisce identicamente.

In questo paragrafo studiamo l'influenza dello spesso ^{p}Spec ($p = 0, 1$) sulle varietà Kähleriane Bochner piatte.

Teorema 5.1. *Siano* (M, g, J) *e* (M', g', J') *due varietà Kähleriane compatte con* ${}^p\mathrm{Spec}(M, g) = {}^p\mathrm{Sepc}(M', g')$ *per* $p = 0, 1$ *e* $n = \dim_R M \geq 4$ (3). *Allora*

(i) *M è Bochner piatta con curvatura scalare* $\tau = \mathrm{cost}$ *se, e solo se, M' è Bochner piatta con curvatura scalare* $\tau' = \mathrm{cost} = \tau$,

(ii) *M è Bochner piatta e di Einstein se, e solo se, M' è Bochner piatta e di Einstein.*

---

(3) Si considera il caso $n \geq 4$, in quanto per $n=2$ è identicamente $B = 0$ e inoltre la classe delle varietà (di dimensione 2) a curvatura scalare costante è caratterizzata dallo ^{0}Spec.

Dim. (i) Supponiamo M Bochner piatta con curvatura scalare costante τ, e indichiamo con B' il tensore di Bochner per M'.

Dalla (5.1) segue che

$$\|R\|^2 = \frac{16}{n+4}\|\varrho\|^2 - \frac{8}{(n+2)(n+4)}\tau^2\,, \tag{5.2}$$

$$\|R'\|^2 = \|B'\|^2 + \frac{16}{n+4}\|\varrho'\|^2 - \frac{8}{(n+2)(n+4)}\tau'^2 \geqslant \frac{16}{n+4}\|\varrho'\|^2 - \frac{8}{(n+2)(n+4)}\tau'^2\,. \tag{5.3}$$

Come nel Teorema 3.1 la (5.2) e la (5.3), insieme alla (3.1) e alla (3.2), portano alla

$$(13n^2 + 70n + 48)\int_M \tau^2 v_g \geqslant (13n^2 + 70n + 48)\int_{M'} \tau'^2 v_{g'}$$

e poichè il coefficiente $(13n^2 + 70n + 48)$ è strettamente positivo, ne segue che $\int_M \tau^2 v_g \geqslant \int_{M'} \tau'^2 v_{g'}$.

Da questo punto in poi si procede come nel Teorema 3.1.

(ii) Supponiamo M Bochner piatta e di Einstein. Dalla (i) viene che M' è Bochner piatta con curvatura scalare $\tau' = \tau$. Da

$$\int_{M'} \left(\|\varrho'\|^2 - \frac{\tau'^2}{n}\right) v_{g'} = \int_M \left(\|\varrho\|^2 - \frac{\tau^2}{n}\right) v_g = 0\,,$$

segue infine che M' è anche di Einstein.

Corollario 5.1. *Siano (M, g, J) e (M', g', J') varietà Kähleriane compatte con $n = \dim_R M \geqslant 4$. Se ${}^p\mathrm{Spec}\,(M, g) = {}^p\mathrm{Spec}\,(M', g')$ con $p = 0, 1$, allora M ha curvatura sezionale olomorfa costante c se, e solo se, M' ha curvatura sezionale olomorfa costante $c' = c$.*

Dim. Segue dal fatto che le varietà Kähleriane con curvatura sezionale olomorfa costante c sono, tutte e sole, le varietà Kähleriane di Einstein Bochner piatte con curvatura scalare $\tau = n(n+2)c/4$. Per rendersi conto di ciò basta applicare la proposizione 3.1 di [**2**]$_3$ e osservare che le varietà Kähleriane a curvatura sezionale olomorfa costante sono in particolare di Einstein.

Corollario 5.2. *Lo spazio proiettivo complesso* $(\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{C}), J_0, g_0)$, *munito della metrica Kähleriana canonica, è completamente caratterizzato dallo spettro* ${}^p\mathrm{Spec}$ *con* $p = 0, 1$.

Difatti se (M, J, g) è una varietà Kähleriana compatta avente ${}^p\mathrm{Spec}\,(M, g) = {}^p\mathrm{Spec}\,(\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{C}), g_0)$ per $p = 0, 1$, allora (M, J, g) ha curvatura sezionale olomorfa costante uguale a $+4$ e quindi, per il teorema F.41 di [**1**], è isometrica a $(\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{C}), J_0, g_0)$.

Da notare che Donnelly in [**2**]$_2$ ha caratterizzato lo spazio proiettivo complesso mediante lo spettro del laplaciano complesso $\square$ operante sulle forme di tipo (p, q).

Bibliografia

[**1**] M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet, *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics **194**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.

[**2**] H. Donnelly: [•]$_1$ *Symmetric Einstein spaces and spectral geometry*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1974), 603-606; [•]$_2$ *Minakshisundaram's coefficients on Kähler manifolds*, Proc. of Symp. in Pure Math. **27** (1975), 195-203; [•]$_3$ *Topology and Einstein Kähler metrics*, J. Diff. Geom. **11** (1976), 259-264.

[**3**] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry* (I), John Wiley, New York 1961.

[**4**] V. K. Patodi, *Curvature and the fundamental solution of the heat operator*, J. Indian Math. Soc. **34** (1970), 269-285.

[**5**] D. Perrone, *Spettro e curvatura di Lipschitz-Killing in dimensione* 6, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **38** (1980), 59-65.

[**6**] T. Sakai, *On eigen-values of Laplacian and curvature of Riemannian manifold*, Tôhoku Math. J. **23** (1971), 589-603.

Abstract

Let (M, g) *and* (M', g') *be compact Riemannian manifolds with the same spectrum of the Laplacian for* 0-*forms and* 1-*forms*.

In the main theorem of this article we prove that, for $\dim M = n > 3$ *and* $\neq 8$, (M, g) *is conformally flat with parallel Ricci tensor if and only if* (M', g') *is so.*

* * *