Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 415-432

RITA CAMPANINI (*)

Sulla caratterizzazione di operatori differenziali lineari invarianti rispetto a gruppi di congruenze del piano (**)

1 - Introduzione

Dato un aperto A del piano cartesiano $\boldsymbol{R}^2$, sia $\mathscr{M}(A)$ lo spazio delle funzioni misurabili in A o quello dei vettori a due componenti funzioni misurabili in A.

Se $\mathscr{G}$ è un gruppo di congruenze di $\boldsymbol{R}^2$ che mutano A in sè, ad ogni congruenza $\gamma \in \mathscr{G}$ si può associare una trasformazione lineare Γ di $\mathscr{M}(A)$ in sè in modo che l'insieme di tali trasformazioni Γ, per $\gamma \in \mathscr{G}$, sia un gruppo $\mathscr{T}(\mathscr{G})$ isomorfo a $\mathscr{G}$ ($[\mathbf{2}]_2$, nn. 2 e 3).

In $[\mathbf{2}]_2$, L. Bassotti introduce una definizione di invarianza rispetto a $\mathscr{G}$ di un operatore lineare arbitrario L, definito in un sottospazio di $\mathscr{M}(A)$ a valori in $\mathscr{M}(A)$, basata sulla proprietà algebrica di permutabilità di L con gli elementi di $\mathscr{T}(\mathscr{G})$.

La classe degli operatori invarianti rispetto a $\mathscr{G}$ gode di notevoli proprietà (si confronti $[\mathbf{2}]_{1,2}$) e tra gli operatori lineari di $\mathscr{M}(A)$ hanno particolare interesse gli operatori differenziali lineari.

In questo lavoro si studia il problema di caratterizzare gli operatori differenziali lineari invarianti rispetto a un arbitrario gruppo di congruenze del piano con particolare riguardo ai gruppi di congruenze che più frequentemente si incontrano nelle applicazioni. I paragrafi **1-7** sono dedicati allo studio degli operatori differenziali scalari, mentre i paragrafi **8-11** riguardano gli operatori differenziali vettoriali.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A.(C.N.R.). — Ricevuto: 27-I-1981.

2 – Sia A un aperto connesso del piano cartesiano $\boldsymbol{R}^2$, $\bar{A}$ la sua chiusura, $x \equiv (x_1, x_2)$ le coordinate di un punto rispetto a una base ortonormale fissata. Si consideri il gruppo $\mathcal{O}$ di tutte le matrici quadrate ortogonali di ordine 2 e il sottogruppo $\mathcal{G}_A$ costituito dalla totalità delle matrici di $\mathcal{O}$ che rappresentano congruenze di $\boldsymbol{R}^2$ in sè che mutano punti di A in punti di A. È ovvio che, se $\gamma \in \mathcal{G}_A$, la congruenza rappresentata da γ muta punti di $\bar{A}$ in punti di $\bar{A}$.

In questo lavoro $\mathcal{G}$ denoterà un sottogruppo arbitrario di $\mathcal{G}_A$, cioè un gruppo di matrici ortogonali che mutano in sè l'insieme dei punti di A; in particolare può essere $\mathcal{G} = \mathcal{G}_A$. Si indicherà con γ un elemento di $\mathcal{G}$, con γ^{-1} la matrice inversa di γ, con $\overset{*}{\gamma}$ la trasposta di γ. Poichè γ è ortogonale, risulta $\gamma^{-1} = \overset{*}{\gamma}$. Le matrici γ di $\mathcal{G}$ godono ovviamente della proprietà che, se $x \in A$, allora $\gamma x \in A$, $\gamma^{-1} x \in A$.

Nel seguito, per comodità, supporremo che A e $\bar{A}$ siano mutati in sè dallo stesso gruppo di congruenze, in modo che potremo indifferentemente riferirci ad aperti o alle loro chiusure.

Nel gruppo $\mathcal{O}$ (detto anche gruppo ortogonale), indichiamo con e la matrice identica, con σ la matrice

$$\sigma = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

che rappresenta una simmetria rispetto alla retta $x_2 = m x_1$, con $m = \operatorname{tg}(\vartheta/2)$; indicheremo nel seguito con σ_1, σ_2 e σ_{12} le matrici (2.1) per $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$, e $\vartheta = \pi/2$ rispettivamente. Fissato ϑ, il gruppo $\mathcal{G} \equiv \{e, \sigma\}$ rappresenta congruenze che mutano in sè ogni insieme A simmetrico rispetto alla retta $x_2 = m x_1$ (con $m = \operatorname{tg}(\vartheta/2)$). Gruppi particolarmente notevoli sono il gruppo $\mathcal{K} \equiv \{e, \sigma_{12}\}$ e il gruppo $\mathcal{H} = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 \cdot \sigma_2\}$; quest'ultimo rappresenta congruenze che mutano in sè insiemi A simmetrici rispetto agli assi coordinati. Il gruppo $\mathcal{H}\mathcal{K}$, prodotto dei gruppi $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$, consta di 8 elementi, ammette 3 generatori σ_1, σ_2 e σ_{12} e rappresenta congruenze che mutano in sè insiemi A simmetrici rispetto agli assi coordinati e alla retta $x_2 = x_1$ (in particolare il quadrato, l'asteroide, i poligoni di $4p$ lati, ovviamente in posizione particolare rispetto al riferimento).

Al gruppo ortogonale $\mathcal{O}$, oltre alle matrici σ definite da (2.1), appartengono le matrici

$$\varrho = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

ciascuna delle quali rappresenta una rotazione di ampiezza ϑ intorno all'origine. Ogni matrice di $\mathcal{O}$ è necessariamente del tipo (2.1) o (2.2). Fissato un intero positivo $m \geqslant 2$, indicheremo con ϱ_m la matrice

$$\varrho_m = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/m) & -\operatorname{sen}(2\pi/m) \\ \operatorname{sen}(2\pi/m) & \cos(2\pi/m) \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

ottenuta da (2.2) per $\vartheta = 2\pi/m$. Gruppi notevoli sono: il gruppo $\mathscr{R}$ di tutte le matrici del tipo (2.2), che chiameremo il gruppo delle rotazioni; i gruppi finiti $\mathscr{G}_m \equiv \{e, \varrho_m, \varrho_m^2, \ldots, \varrho_m^{m-1}\}$ e $\mathscr{G}_{2m}^* \equiv \{e, \varrho_m, \ldots, \varrho_m^{m-1}, \sigma_1, \sigma_1 \cdot \varrho_m, \sigma_1 \cdot \varrho_m^2, \ldots, \sigma_1 \cdot \varrho_m^{m-1}\}$. Il gruppo $\mathscr{G}_m$ è generato da ϱ_m, $\mathscr{G}_{2m}^*$ è generato da ϱ_m e σ_1.

Conviene osservare che un cerchio e una corona circolare di centro l'origine sono mutati in sè da tutte le congruenze rappresentate dal gruppo $\mathscr{O}$ e dai suoi sottogruppi $\mathscr{R}$, $\mathscr{G}_m$, $\mathscr{G}_{2m}^*$; un poligono regolare di m lati di centro l'origine e simmetrico rispetto all'asse x_1 è mutato in sè dalle congruenze rappresentate dai gruppi $\mathscr{G}_m$ e $\mathscr{G}_{2m}^*$ (1). Si noti infine che, per ogni matrice ϱ del tipo (2.2) riesce $\det \varrho = 1$, mentre per ogni matrice σ del tipo (2.1) riesce $\det \sigma = -1$.

3 – Sia A un aperto connesso del piano $\boldsymbol{R}^2$ (2); $C^h(A)$ lo spazio delle funzioni di classe h in A, a valori reali; $\mathscr{G}$ un gruppo di matrici ortogonali che rappresentanto congruenze che mutano A in sè. È ovvio che, se $\gamma \in \mathscr{G}$ e $f \in C^h(A)$, allora $f(\gamma x)$, riguardata come funzione di x, appartiene ancora a $C^h(A)$. Nel seguito scriveremo indifferentemente $f(x)$ o $f(x_1, x_2)$.

Sia $g(x, y)$ una funzione reale continua in $A \times \boldsymbol{R}^2$. Si dirà che la funzione $g(x, y)$ è *invariante rispetto al gruppo* $\mathscr{G}$, se, per ogni $\gamma \in \mathscr{G}$ sussiste la relazione

$$g(\gamma x, \gamma y) \equiv g(x, y) \qquad \text{in } A \times \boldsymbol{R}^2 . \tag{3.1}$$

Si dirà che $g(x, y)$ è *seminvariante rispetto a* $\mathscr{G}$, se per ogni $\gamma \in \mathscr{G}$ sussiste la relazione

$$g(\gamma x, \gamma y) \equiv (\det \gamma) \cdot g(x, y) \qquad \text{in } A \times \boldsymbol{R}^2 . \tag{3.2}$$

Ciò premesso, un *operatore differenziale lineare scalare* D a coefficienti continui in A

$$D = \sum_{s=0}^{m} \sum_{\substack{h,k=0 \\ h+k=s}}^{s} a_{hk}(x) \frac{\partial^s}{\partial x_1^h \partial x_2^k}, \tag{3.3}$$

può riguardarsi come un operatore lineare dello spazio $C^\infty(A)$ in $C^0(A)$.

---

(1) Si osservi che, per $m = 2$ e $m = 4$, si ha $\mathscr{G}_4^* = \mathscr{H}$ e $\mathscr{G}_8^* = \mathscr{H}\mathscr{K}$.

(2) In tutto il seguito A può sostituirsi con $\bar{A}$.

All'operatore D definito da (3.3) si può associare la funzione $F(x, y)$ continua in $A\times \boldsymbol{R}^2$, detta anche *polinomio caratteristico* di D

$$F(x, y) = \sum_{s=0}^{m} \sum_{\substack{h,k=0\\h+k=s}}^{s} a_{hk}(x)\, y_1^h y_2^k . \tag{3.4}$$

Seguendo una definizione di L. Bassotti [3], diremo che D è un *operatore invariante rispetto al gruppo* $\mathscr{G}$ se per ogni γ di $\mathscr{G}$ e per ogni $f(x)$ di $C^\infty(A)$ risulta

$$D[f(\gamma^{-1}x)] = [Df](\gamma^{-1}x) . \tag{3.5}$$

Dalla definizione (3.5) e dal teorema 8.I di $[\mathbf{2}]_2$ segue che

I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore differenziale D definito da* (3.3) *sia invariante rispetto a $\mathscr{G}$ è che il polinomio caratteristico $F(x, y)$, definito da* (3.4), *ad esso associato, sia una funzione invariante rispetto a $\mathscr{G}$, cioè, per ogni γ di $\mathscr{G}$ sussista l'identità*

$$F(x, y) \equiv F(\gamma x, \gamma y) \qquad \text{in } A\times \boldsymbol{R}^2 . \tag{3.6}$$

Se $\{\gamma^{(\alpha)}\}$ con $\alpha \in \mathscr{I}$ è un sistema di generatori di $\mathscr{G}$, le identità (3.6) possono sostituirsi con

$$F(x, y) \equiv F(\gamma^{(\alpha)}x, \gamma^{(\alpha)}y) \qquad \alpha\in\mathscr{I} . \tag{3.7}$$

Ci limiteremo nel seguito a considerare operatori differenziali $D^{(s)}$ *omogenei* di grado s,

$$D^{(s)} = \sum_{\substack{h,k=0\\h+k=s}}^{s} a_{hk}(x) \frac{\partial^s}{\partial x_1^h \partial x_2^k} \tag{3.8}$$

a coefficienti $a_{hk}(x)$ continui in A, in quanto dal teorema 8.III di $[\mathbf{2}]_2$ segue ancora che

II. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore differenziale D definito da* (3.3) *sia invariante rispetto a $\mathscr{G}$ è che tutti gli operatori $D^{(s)}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, m)$ definiti da* (3.8) *dei quali D è somma, siano invarianti rispetto a $\mathscr{G}$.*

4 – Caratterizziamo in questo numero gli operatori differenziali omogenei $D^{(s)}$, definiti da (3.8), invarianti rispetto ai gruppi $\mathscr{H}$ e $\mathscr{K}$ definiti nel n. 2.

[3] Per la dimostrazione si confronti $[\mathbf{2}]_2$ nn. 2 e 4.

Supponiamo dapprima che A sia simmetrico rispetto ad entrambi gli assi coordinati x_1 ed x_2 e quindi mutato in sè dalle congruenze rappresentate dal gruppo $\mathscr{H}$.

Sussiste il teorema

I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore differenziale* $D^{(s)}$, *definito da* (3.8) *sia invariante rispetto al gruppo* $\mathscr{H}$ *è che ciascun coefficiente* $a_{hk}(x_1, x_2)$ *sia, in* A, *funzione di classe pari o dispari rispetto a* x_1 (x_2) *a seconda che sia* h (k) *pari o dispari rispettivamente.*

Dim. Le condizioni (3.7) in corrispondenza ai generatori σ_1 e σ_2 del gruppo $\mathscr{H}$ danno luogo alle relazioni

$$\sum_{\substack{h,k=0\\h+k=s}}^{s} a_{hk}(x_1, x_2) y_1^h y_2^k = \sum_{\substack{h,k=0\\h+k=s}}^{s} a_{hk}(\varepsilon x_1, -\varepsilon x_2)(\varepsilon y_1)^h(-\varepsilon y_2)^k \tag{4.1}$$

per $\varepsilon = 1, -1$. Le (4.1), data l'arbitrarietà di y_1 ed y_2, sussistono se e solo se, per ogni $h, k = 0, 1, \ldots, s$ con $h + k = s$ riesce

$$a_{hk}(x_1, x_2) = (-1)^k a_{hk}(x_1, -x_2)\,, \qquad a_{hk}(x_1, x_2) = (-1)^h a_{hk}(-x_1, x_2)\,. \tag{4.2}$$

Supponiamo ora che A sia simmetrico rispetto alla retta $x_1 = x_2$.

Vale il teorema

II. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore differenziale* $D^{(s)}$ *definito da* (3.8) *sia invariante rispetto al gruppo* $\mathscr{K}$ *è che i coefficienti* $a_{hk}(x_1, x_2)$ *verifichino, in* A, *le condizioni*

$$a_{hk}(x_1, x_2) = a_{kh}(x_2, x_1)\,. \tag{4.3}$$

Dim. La condizione (3.6) per σ_{12} dà luogo a

$$\sum_{\substack{h,k=0\\h+k=s}}^{s} a_{hk}(x_1, x_2) y_1^h y_2^k = \sum_{\substack{h,k=0\\h+k=s}}^{s} a_{hk}(x_2, x_1) y_2^h y_1^k\,. \tag{4.4}$$

La (4.4), data l'arbitrarietà di y_1 ed y_2, è verificata se e solo se valgono le (4.3).

Dai teoremi I e II segue

III. *Se* A *è simmetrico rispetto agli assi coordinati e alla retta* $x_1 = x_2$, *condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore $D^{(s)}$ definito da* (3.8) *sia invariante rispetto al gruppo $\mathscr{H}\mathscr{K}$ è che i coefficienti $a_{hk}(x_1, x_2)$ verifichino in A le* (4.2) *e* (4.3).

5 – Supponiamo ora che A non contenga l'origine ([4]). Sussiste il seguente teorema

I. *Ogni funzione $F^{(s)}(x, y)$, polinomio omogeneo di grado s in y_1 ed y_2, a coefficienti continui in A, si può scrivere nella forma*

$$F^{(s)}(x, y) = \sum_{\substack{h,k=0\\h+k=s}}^{s} b_{hk}(x)(x_1y_1 + x_2y_2)^h(x_1y_2 - x_2y_1)^k , \tag{5.1}$$

con coefficienti $b_{hk}(x)$ continui in A.

Dim. Basta osservare che, fissati arbitrariamente (y_1, y_2) in $\boldsymbol{R}^2$ e (x_1, x_2) in A, sussistono le identità

$$\begin{aligned} y_1 &= [x_1/(x_1^2 + x_2^2)]\cdot(x_1y_1 + x_2y_2) - [x_2/(x_1^2 + x_2^2)]\cdot(x_1y_2 - x_2y_1) , \\ y_2 &= [x_2/(x_1^2 + x_2^2)]\cdot(x_1y_1 + x_2y_2) + [x_1/(x_1^2 + x_2^2)]\cdot(x_1y_2 - x_2y_1) . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Se si sostituiscono ad y_1 ed y_2 le espressioni (5.2) si ottiene per $F^{(s)}(x, y)$ la forma (5.1), con $b_{hk}(x)$ funzioni razionali intere di x_1, x_2, $(x_1^2 + x_2^2)^{-1}$ e dei primitivi coefficienti di $F^{(s)}(x, y)$; pertanto $b_{hk}(x)$ sono funzioni continue in A.

Dal teorema I si deduce immediatamente

II. *Ogni operatore differenziale $D^{(s)}$, con coefficienti continui in A, definito da* (3.8) *può scriversi nella forma*

$$D^{(s)} = \sum_{\substack{h,k=0\\h+k=s}}^{s} b_{hk}(x)\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^h \left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k \tag{5.3}$$

con coefficienti $b_{hk}(x)$ continui in A.

Supponiamo ora introdotto in $\boldsymbol{R}^2$ un riferimento polare (con polo l'origine e asse polare l'asse x_1) e indichiamo con ϱ, ϑ le coordinate polari di un punto

([4]) Ciò non è restrittivo per le applicazioni, perchè l'origine può appartenere ad $\bar{A}$.

di $\boldsymbol{R}^2$. Poichè si è supposto che A non contenga l'origine, per ogni punto di A risulta $\varrho > 0$. Si considerino poi ϱ, ϑ come coordinate cartesiane in un piano π e sia $A' = \{(\varrho, \vartheta) : (\varrho \cos\vartheta, \varrho \operatorname{sen}\vartheta) \in A\}$.

Ricordando le ben note formule

$$\frac{\partial}{\partial\varrho} = \varrho^{-1}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right); \qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{5.4}$$

dal teorema II segue che

III. *Ogni operatore differenziale $D^{(s)}$, con coefficienti continui in un campo A, non contenente l'origine, può scriversi nella forma*

$$D^{(s)} = \sum_{\substack{h,k=0 \\ h+k=s}}^{s} c_{hk}(\varrho, \vartheta) \frac{\partial^s}{\partial\varrho^h \, \partial\vartheta^k}, \tag{5.5}$$

con $c_{hk}(\varrho, \vartheta)$ funzioni continue in A'; se $D^{(s)}$ si rappresenta in coordinate cartesiane (x_1, x_2) nella forma (5.3), i coefficienti $b_{hk}(x_1, x_2)$ sono legati ai $c_{hk}(\varrho, \vartheta)$ dalle relazioni

$$b_{hk}(\varrho\cos\vartheta, \varrho\operatorname{sen}\vartheta) = \varrho^{-h} c_{hk}(\varrho, \vartheta). \tag{5.6}$$

6 – In base alla condizione (3.6), un operatore differenziale lineare scalare è invariante rispetto a un gruppo $\mathscr{G}$ se e solo se il suo polinomio caratteristico è invariante rispetto a $\mathscr{G}$. Caratterizziamo allora in questo numero le funzioni $F(x, y)$, continue in $A \times \boldsymbol{R}^2$, polinomi nelle variabili y_1 e y_2, invarianti (e seminvarianti) rispetto a un gruppo $\mathscr{G}$; resteranno di conseguenza caratterizzati gli operatori differenziali lineari scalari invarianti rispetto a $\mathscr{G}$. Per quanto osservato nel n. 3, sarà sufficiente riferirsi a polinomi omogenei in y_1, y_2.

Sia allora A un campo di $\boldsymbol{R}^2$, non contenente l'origine; sia $D^{(s)}$ l'operatore differenziale (5.3) e $F^{(s)}(x, y)$ il polinomio caratteristico di $D^{(s)}$, dato da (5.1); sia $\mathscr{G}$ un sottogruppo di $\mathscr{O}$ e sia A mutato in sè da ogni congruenza di $\mathscr{G}$.

Sussiste il seguente teorema

I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione $F^{(s)}(x, y)$ (l'operatore differenziale omogeneo $D^{(s)}$) sia invariante rispetto al gruppo $\mathscr{G}$ è che i coefficienti $b_{hk}(x)$ verifichino in A, per ogni $\gamma \in \mathscr{G}$, le condizioni*

$$b_{hk}(\gamma x) \equiv (\det\gamma)^k \, b_{hk}(x). \tag{6.1}$$

Dim. Si osservi che la funzione $x_1 y_1 + x_2 y_2$ è invariante rispetto al gruppo $\mathcal{O}$ mentre la funzione $x_1 y_2 - x_2 y_1$ è seminvariante rispetto ad $\mathcal{O}$. Di conseguenza è immediato verificare che, considerata $F^{(s)}(x, y)$ nella forma (5.1), per ogni $\gamma \in \mathcal{G}$, la condizione $F^{(s)}(\gamma x, \gamma y) \equiv F^{(s)}(x, y)$ equivale alle (6.1) per i coefficienti.

In modo analogo si dimostra il seguente risultato

II. *Condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione $F^{(s)}(x, y)$ sia seminvariante rispetto al gruppo $\mathcal{G}$ è che i coefficienti $b_{hk}(x)$ verifichino in A, per ogni $\gamma \in \mathcal{G}$, le condizioni*

$$b_{hk}(\gamma x) \equiv (\det \gamma)^{k+1} b_{hk}(x) \,. \tag{6.2}$$

Osservazione 1. In base a quanto osservato nel n. **3**, è sufficiente che le (6.1) valgano in corrispondenza a un sistema di generatori del gruppo $\mathcal{G}$; sicchè, ad esempio, nel caso che $\mathcal{G}$ sia il gruppo $\mathcal{G}_m$, generato da ϱ_m, ovvero $\mathcal{G}^*_{2m}$, generato da ϱ_m e σ_1, le condizioni di invarianza (6.1) sono rispettivamente equivalenti a

$$b_{hk}(\varrho_m x) \equiv b_{hk}(x) \,, \tag{6.3}$$

ovvero

$$b_{hk}(\varrho_m x) \equiv b_{hk}(x) \,, \qquad b_{hk}(x_1, x_2) \equiv (-1)^k b_{hk}(x_1, -x_2) \,. \tag{6.4}$$

Sono interessanti i seguenti corollari del teorema I.

III. *Se A è un campo mutato in sè dalle congruenze di $\mathcal{R}$* ([5]), *condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore $D^{(s)}$ nella forma* (5.3) *sia invariante rispetto al gruppo $\mathcal{R}$, è che i coefficienti $b_{hk}(x)$ siano funzioni solo del modulo di x* ([6]).

Dim. Infatti le condizioni (6.1), per ogni matrice ϱ, del tipo (2.2), a determinante positivo, equivalgono al fatto che ogni coefficiente $b_{hk}(x)$ sia funzione solo di $|x|$.

Sia A un campo mutato in sè dalle congruenze di $\mathcal{O}$ (in particolare un campo circolare o corona circolare di centro l'origine).

([5]) In particolare un campo circolare o corona circolare di centro l'origine.

([6]) Questo risultato è stato stabilito per altra via, in maniera alquanto laboriosa, da G. Ascoli in [**1**].

IV. *Condizione necessaria e sufficente perchè l'operatore differenziale $D^{(s)}$ sia invariante rispetto al gruppo $\mathcal{O}$ è che sia del tipo*

$$\sum_{h+2k=s}^{hk} \tilde{b}_{hk}(|x|)\ (x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2})^h(x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1})^{2k}\ , \tag{6.5}$$

con coefficienti $\tilde{b}_{hk}$ dipendenti solo da $|x|$.

Dim. Basta osservare che, per il corollario III, $D^{(s)}$, nella forma (5.3), ha coefficienti funzioni solo di $|x|$. Devono inoltre valere le seconde identità (6.4) le quali implicano $b_{hk}(|x|)\equiv 0$ se k è dispari.

Osservando che

$$(x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1})^2=(x_1^2+x_2^2)(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2})-(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2})^2\ ,$$

il corollario IV può anche formularsi nel modo seguente.

V. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore differenziale $D^{(s)}$ sia invariante rispetto al gruppo $\mathcal{O}$ è che sia del tipo*

$$\sum_{h+2k=s}^{h,k} \bar{b}_{hk}(|x|)\cdot(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2})^h\cdot\Delta^k\ , \tag{6.6}$$

con coefficienti funzioni solo di $|x|$.

7 – Consideriamo in questo numero il caso particolare notevole di operatori differenziali (scalari) *a coefficienti costanti.* Sia

$$D^{(s)}=\sum_{\substack{h,k=0\\ h+k=s}}^{s}\alpha_{hk}\frac{\partial^s}{\partial x_1^h\,\partial x_2^k} \tag{7.1}$$

un operatore differenziale lineare omogeneo scalare a coefficienti α_{hk} costanti. Il corrispondente polinomio caratteristico

$$F^{(s)}(y)=\sum_{\substack{h,k=0\\ h+k=s}}^{s}\alpha_{hk}\,y_1^h\cdot y_2^k \tag{7.2}$$

è un effettivo polinomio omogeneo di grado s.

Le condizioni di invarianza di $D^{(s)}$, dato da (7.1), rispetto ai gruppi $\mathscr{H}$ e $\mathscr{K}$ si ricavano subito dai teoremi I e II del n. **4**.

Per studiare l'invarianza di $D^{(s)}$ rispetto ai gruppi $\mathscr{R}$ e $\mathscr{O}$ non è opportuno riferirsi alla forma (5.3), poichè in tal caso i coefficienti non sarebbero più costanti. Si osservi invece che, per ogni $\varrho \in \mathscr{R}$,

$$F^{(s)}(\varrho y) \equiv F^{(s)}(y) \tag{7.3}$$

se e solo se $F^{(s)}(y) = F^{(s)}(|y|)$ cioè se e solo se s è pari e, per $s = 2p$,

$$F^{(s)}(y) = c(y_1^2 + y_2^2)^p \qquad (c \in \boldsymbol{R}) . \tag{7.4}$$

Dunque gli operatori differenziali $D^{(s)}$ a coefficienti costanti invarianti rispetto al gruppo delle rotazioni $\mathscr{R}$ sono tutti e soli gli operatori di ordine pari $s = 2p$ del tipo

$$D^{(s)} = c \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^p , \tag{7.5}$$

con c costante arbitraria.

In base al corollario V del n. **6** gli operatori del tipo (7.5) sono anche invarianti rispetto al gruppo $\mathscr{O}$.

8 – Sia A un aperto connesso del piano $\boldsymbol{R}^2$ e sia $\mathscr{G}$ un gruppo di matrici ortogonali che rappresentano congruenze che mutano A in sè.

Siano D_{ij} $(i, j = 1, 2)$ quattro operatori differenziali lineari scalari così definiti

$$D_{ij} = \sum_{s=0}^{m} \sum_{\substack{h,k=0\\ h+k=s}}^{s} a_{ij,hk}(x) \frac{\partial^s}{\partial x_1^h \partial x_2^k} \tag{8.1}$$

a coefficienti $a_{ij,hk}(x)$ funzioni continue in A.

Sia L l'operatore differenziale *vettoriale* determinato dalla matrice (D_{ij}). L'operatore L opera sui vettori di $C^\infty(A) \times C^\infty(A)$ facendo corrispondere al vettore $v(x)$ il vettore $(Lv)(x)$ di componenti

$$(Lv)_i(x) = \sum_{j=1}^{2} D_{ij}\, v_j(x) \qquad (i = 1, 2) \tag{8.2}$$

e può riguardarsi come un operatore lineare definito in $C^\infty(A) \times C^\infty(A)$ a valori in $C^0(A) \times C^0(A)$.

Seguendo ancora una definizione di L. Bassotti [7], si dirà che l'operatore L è *invariante rispetto al gruppo* $\mathscr{G}$, se per ogni $\gamma \in \mathscr{G}$ e per ogni $v(x) \in C^\infty(A) \times C^\infty(A)$ risulta

$$L[\gamma v(\gamma^{-1}x)] = \gamma(Lv)(\gamma^{-1}x) . \tag{8.3}$$

Ci limiteremo ancora a considerare operatori differenziali $L^{(s)}$, *omogenei* di grado s; precisamente le componenti di $L^{(s)}v$ saranno date da

$$(L^{(s)}v)_i(x) = \sum_{j=1}^{2} D_{ij}^{(s)} v_j(x) \qquad (i = 1, 2) , \tag{8.4}$$

dove

$$D_{ij}^{(s)} = \sum_{\substack{h,k=0\\h+k=s}}^{s} a_{ij,hk}(x) \frac{\partial^s}{\partial x_1^h \partial x_2^k} . \tag{8.5}$$

Sussiste infatti un teorema del tutto analogo al teor. II del n. **3** (si confronti [**2**]$_2$, teor. 8.III).

È opportuno associare alla matrice $(D_{ij}^{(s)})$ la matrice $F^{(s)}(x, y) = \big(F_{ij}^{(s)}(x, y)\big)$ di elementi

$$F_{ij}^{(s)}(x, y) = \sum_{\substack{h,k=0\\h+k=s}}^{s} a_{ij,hk}(x) y_1^h y_2^k \qquad (i, j = 1, 2) . \tag{8.6}$$

Infatti si verifica facilmente che

I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore differenziale* $L^{(s)}$ *sia invariante rispetto a* $\mathscr{G}$ *è che la matrice* $F^{(s)}(x, y)$ *verifichi, in* $A \times \mathbf{R}^2$, *per ogni* $\gamma \in \mathscr{G}$ *l'identità*

$$F^{(s)}(\gamma x, \gamma y) \equiv \gamma F^{(s)}(x, y) \gamma^{-1} . \tag{8.7}$$

È inoltre sufficiente che le (8.7) siano verificate per un sistema di generatori $\{\gamma^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathscr{I}}$ del gruppo $\mathscr{G}$.

9 - Caratterizziamo gli operatori differenziali (vettoriali) $L^{(s)}$ invarianti rispetto ai gruppi $\mathscr{H}$ e $\mathscr{K}$.

---

[7] Per la dimostrazione si confronti [**2**]$_2$ nn. **3**, **4**.

Supponiamo che A sia simmetrico rispetto ad entrambi gli assi coordinati x_1 ed x_2 (e quindi mutato in sè dalle congruenze del gruppo $\mathscr{H}$). Sussiste il seguente teorema.

I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore differenziale* $L^{(s)}$, *definito dalle* (8.4), (8.5), *sia invariante rispetto al gruppo* $\mathscr{H}$ *è che i coefficienti* $a_{ij,hk}(x)$ *degli operatori* $D_{ij}^{(s)}$ *verifichino in* A *le condizioni*

$$a_{ij,hk}(x_1, x_2) \equiv (-1)^{i+j+k} \varepsilon^{h+k} a_{ij,hk}(\varepsilon x_1, -\varepsilon x_2) \qquad (\varepsilon = \pm 1) . \tag{9.1}$$

Dim. Le matrici σ_1 e σ_2 che generano $\mathscr{H}$ sono date da

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon = \pm 1) . \tag{9.2}$$

La condizione (8.7) per le matrici (9.2) equivale alle condizioni

$$F_{ij}^{(s)}(x_1, x_2; y_1, y_2) = \pm F_{ij}^{(s)}(\varepsilon x_1, -\varepsilon x_2; \varepsilon y_1, -\varepsilon y_2) \qquad (\varepsilon = \pm 1) , \tag{9.3}$$

con il segno $+$ se $i = j$ e il segno $-$ se $i \neq j$, e quindi alle condizioni sui coefficienti

$$a_{ij,hk}(x_1, x_2) = \pm (-1)^k \varepsilon^{h+k} a_{ij,hk}(\varepsilon x_1, -\varepsilon x_2) \qquad (\varepsilon = \pm 1) ,$$

col segno $+$ se $i = j$, col segno $-$ se $i \neq j$.

Sia ora A simmetrico rispetto alla retta $x_1 = x_2$ (e quindi mutato in sè dalle congruenze del gruppo $\mathscr{K}$).

II. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore differenziale* $L^{(s)}$, *definito dalle* (8.4), (8.5), *sia invariante rispetto al gruppo* $\mathscr{K}$ *è che, indicata con* r *la sostituzione che scambia fra loro i numeri* 1 *e* 2, *i coefficienti* $a_{ij,hk}(x)$ *degli operatori* $D_{ij}^{(s)}$ *soddisfino in* A *le relazioni*

$$a_{r(i)r(j),hk}(x_1, x_2) \equiv a_{ij,kh}(x_2, x_1) . \tag{9.4}$$

Dim. Consideriamo le (8.7) per la matrice σ_{12}. Si ottiene

$$F_{r(i)r(j)}^{(s)}(x_1, x_2; y_1, y_2) = F_{ij}^{(s)}(x_2, x_1; y_2, y_1) \qquad (i, j = 1, 2) . \tag{9.5}$$

Le (9.5), per l'arbitrarietà di y_1, y_2, equivalgono alle (9.4) per i coefficienti.

Sia A simmetrico rispetto agli assi e alla retta $x_1 = x_2$ (e quindi mutato in sè dalle congruenze di $\mathscr{H}\mathscr{K}$). Si ha allora

III. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore* $L^{(s)}$, *definito dalle* (8.4), (8.5), *sia invariante rispetto al gruppo* $\mathscr{H}\mathscr{K}$ *è che i coefficienti* $a_{ij,hk}(x)$ *degli operatori* $D_{ij}^{(s)}$ *soddisfino in* A *le relazioni* (9.1), (9.4).

Le condizioni di invarianza di un operatore $L^{(s)}$ rispetto ai gruppi $\mathscr{G}_2$ e $\mathscr{G}_4$ sono analoghe a quelle espresse dai teoremi I e II, e di facile deduzione.

10 – Caratterizziamo in questo numero gli operatori differenziali lineari vettoriali $L^{(s)}$ invarianti rispetto a un generico sottogruppo $\mathscr{G}$ di $\mathscr{O}$.

Precisamente sia $\mathscr{G}$ un gruppo di matrici ortogonali contenente almeno una matrice γ, del tipo (2.1) o (2.2), di parametro $\vartheta \neq k\pi/4$ ([8]). Sia A un campo di $\boldsymbol{R}^2$, non contenente l'origine, mutato in sè dalle congruenze rappresentate dal gruppo $\mathscr{G}$; sia $F^{(s)}(x, y)$ la matrice 2×2 associata all'operatore differenziale $L^{(s)}$, definito da (8.4), (8.5), a coefficienti continui in A. Vale il seguente teorema.

I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè* $F^{(s)}(x, y)$ *verifichi identicamente in* $A\times\boldsymbol{R}^2$ *la relazione*

$$F^{(s)}(\gamma x, \gamma y) = \gamma F^{(s)}(x, y)\gamma^{-1} \tag{10.1}$$

per ogni $\gamma\in\mathscr{G}$, *è che risulti*

$$\begin{aligned} &F^{(s)}(x, y) \\ &= p_1(x, y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + p_2(x, y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} + q_1(x, y)\begin{pmatrix} x_1y_1 - x_2y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ x_1y_2 + x_2y_1 & -x_1y_1 + x_2y_2\end{pmatrix} \\ &\qquad + q_2(x, y)\begin{pmatrix} -x_1y_2 - x_2y_1 & x_1y_1 - x_2y_2 \\ x_1y_1 - x_2y_2 & x_1y_2 + x_2y_1\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{10.2}$$

con $p_i(x, y)$ *e* $q_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ *polinomi omogenei di grado* s *e* $s-1$ *rispettivamente, nelle variabili* y_1, y_2, *a coefficienti continui in* A, *ed inoltre* $p_1(x, y)$ *e* $q_1(x, y)$ *funzioni invarianti rispetto a* $\mathscr{G}$ *e* $p_2(x, y)$ *e* $q_2(x, y)$ *funzioni seminvarianti rispetto a* $\mathscr{G}$.

Dim. Fissiamo $\gamma\in\mathscr{G}$; indicati brevemente con F_{ij} gli elementi (polinomi omogenei di grado s in y_1, y_2) della matrice $F^{(s)}(x, y)$, poniamo

$$\begin{aligned} p_1 &= (F_{11} + F_{22})/2, & p_2 &= (F_{12} - F_{21})/2, \\ r &= (F_{12} + F_{21})/2, & t &= (F_{11} - F_{22})/2. \end{aligned} \tag{10.3}$$

([8]) Si noti che i sottogruppi che vengono qui esclusi sono solo i sottogruppi di $\mathscr{G}_{16}^*$; per alcuni di essi valgono i teoremi del n. **9** o teoremi che si deducono direttamente con procedimenti analoghi.

Scrivendo esplicitamente le quattro relazioni determinate dall'identità (10.1), tenuto conto che la matrice γ è ortogonale, si ottengono le seguenti condizioni

$$(10.4)_1 \qquad p_1(\gamma x, \gamma y) = p_1(x, y)\,; \qquad p_2(\gamma x, \gamma y) = (\det\gamma)\cdot p_2(x, y)\,;$$

$$(10.4)_2 \qquad \begin{aligned} r(\gamma x, \gamma y) &= 2\gamma_{11}\gamma_{21} t(x, y) + (\gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{12}\gamma_{21}) r(x, y)\,, \\ t(\gamma x, \gamma y) &= (\gamma_{11}^2 - \gamma_{21}^2) t(x, y) + (\gamma_{11}\gamma_{12} - \gamma_{21}\gamma_{22}) r(x, y)\,. \end{aligned}$$

Le $(10.4)_2$, se γ è del tipo (2.1) o (2.2) con parametro ϑ, danno luogo al sistema

$$(10.5) \qquad \begin{aligned} r(\gamma x, \gamma y) &= \operatorname{sen} 2\vartheta\, t(x, y) + (\det\gamma) \cos 2\vartheta\, r(x, y)\,, \\ t(\gamma x, \gamma y) &= \cos 2\vartheta\, t(x, y) - (\det\gamma) \operatorname{sen} 2\vartheta\, r(x, y)\,. \end{aligned}$$

Poichè, dalle (10.3), $r(x, y)$ e $t(x, y)$ sono polinomi omogenei di grado s in y_1, y_2, tenuto conto che, fissato $x \in A$, risulta identicamente

$$(10.6) \qquad \begin{aligned} y_1 &= [x_2/(x_1^2 + x_2^2)](x_1 y_2 + x_2 y_1) + [x_1/(x_1^2 + x_2^2)](x_1 y_1 - x_2 y_2)\,, \\ y_2 &= [x_1/(x_1^2 + x_2^2)](x_1 y_2 + x_2 y_1) - [x_2/(x_1^2 + x_2^2)](x_1 y_1 - x_2 y_2)\,, \end{aligned}$$

essi possono anche mettersi nella forma

$$(10.7) \qquad q_1(x, y)\cdot(x_1 y_2 + x_2 y_1) + q_2(x, y)\cdot(x_1 y_1 - x_2 y_2)\,,$$

con $q_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ polinomi omogenei di grado $s - 1$ nelle variabili y_1, y_2, a coefficienti continui in A.

Supponiamo ora $\vartheta \neq k\pi/4$; sostituendo in (10.5) funzioni del tipo (10.7) si ha

$$(10.8) \qquad \begin{aligned} r(x, y) &= q_1(x, y)\cdot(x_1 y_2 + x_2 y_1) + q_2(x, y)\cdot(x_1 y_1 - x_2 y_2)\,, \\ t(x, y) &= -\, q_2(x, y)\cdot(x_1 y_2 + x_2 y_1) + q_1(x, y)\cdot(x_1 y_1 - x_2 y_2)\,, \end{aligned}$$

con $q_1(x, y) = q_1(\gamma x, \gamma y)$ e $q_2(x, y) = (\det\gamma)\, q_2(\gamma x, \gamma y)$ (9).

È così dimostrata la parte necessaria.

---

(9) Si osservi che nei casi $\vartheta = k\pi/4$, non è necessario che $r(x, y)$ e $t(x, y)$ siano del tipo (10.8); in tali casi la forma di $r(x, y)$ e $t(x, y)$ si deduce in modo analogo.

La parte sufficiente si riduce ad una verifica, una volta osservato che le matrici

$$(10.9) \qquad M' = \begin{pmatrix} x_1y_1 - x_2y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ x_1y_2 + x_2y_1 & x_2y_2 - x_1y_1 \end{pmatrix}, \qquad M'' = \begin{pmatrix} -x_1y_2 - x_2y_1 & x_1y_1 - x_2y_2 \\ x_1y_1 - x_2y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix},$$

$$M''' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

verificano in $A \times \boldsymbol{R}^2$, per ogni $\gamma \in \mathcal{O}$, le identità

$$(10.10)_1 \qquad M'(\gamma x, \gamma y) \equiv \gamma M'(x, y)\gamma^{-1},$$

$$(10.10)_2 \qquad (\det \gamma) M''(\gamma x, \gamma y) \equiv \gamma M''(x, y)\gamma^{-1},$$

$$(10.10)_3 \qquad (\det \gamma) M''' = \gamma M''' \gamma^{-1}.$$

Osservazione 2. Si noti che la matrice M' e la matrice identica rappresentano operatori differenziali vettoriali invarianti rispetto al gruppo $\mathcal{O}$ (e quindi rispetto ad ogni suo sottogruppo), mentre M'' e M''' rappresentano operatori differenziali invarianti rispetto al gruppo $\mathcal{R}$. Ciò segue immediatamente dalle (10.10).

Dal teorema I segue subito il teorema

II. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore differenziale* $L^{(s)}$, *definito dalle* (8.4), (8.5), *sia invariante rispetto al gruppo* $\mathcal{G}$ *è che la matrice* $F^{(s)}(x, y)$, *ad esso associata, sia del tipo* (10.2) *con* $p_i(x, y)$ *e* $q_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ *polinomi omogenei di grado* s *e* $s-1$ *rispettivamente, nelle variabili* y_1, y_2, *a coefficienti continui in* A, *ed inoltre* $p_1(x, y)$ *e* $q_1(x, y)$ *funzioni invarianti rispetto a* $\mathcal{G}$, *e* $p_2(x, y)$ e $q_2(x, y)$ *funzioni semivarianti rispetto a* $\mathcal{G}$ ([10]).

Osservazione 3. I polinomi omogenei nelle variabili y_1, y_2, a coefficienti continui in A, invarianti e seminvarianti rispetto a un gruppo $\mathcal{G}$, sono già stati caratterizzati mediante i teoremi I e II del n. **6**.

11 – Consideriamo infine il caso di operatori differenziali lineari vettoriali (omogenei) *a coefficienti costanti.*

([10]) La parte sufficiente di questo teorema sussiste per tutti i gruppi $\mathcal{G}$, compresi i sottogruppi di $\mathcal{G}_{16}^*$.

Sia dunque $L^{(s)}$ definito dalle (8.4) mediante operatori

$$D_{ij}^{(s)} = \sum_{\substack{h,k=0 \\ h+k=s}}^{s} \alpha_{ij,hk} \frac{\partial^s}{\partial x_1^h \partial x_2^k} \tag{11.1}$$

a coefficienti $\alpha_{ij,hk}$ costanti. Le componenti $F_{ij}^{(s)}(y)$ della matrice $F^{(s)}(y)$ associata ad $L^{(s)}$ sono perciò polinomi omogenei in y_1, y_2.

Valgono i seguenti teoremi che non seguono immediatamente dal teorema II del n. **10**.

I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè un operatore differenziale lineare vettoriale $L^{(s)}$ a coefficienti costanti sia invariante rispetto al gruppo $\mathcal{R}$ è che s sia pari e, posto $s = 2p$, la matrice $F^{(s)}(y)$ che rappresenta l'operatore sia del tipo*

$$\begin{aligned} F^{(s)}(y) \\ = c_1(y_1^2+y_2^2)^p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_2(y_1^2+y_2^2)^p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c_3(y_1^2+y_2^2)^{p-1} \begin{pmatrix} y_1^2-y_2^2 & 2y_1y_2 \\ 2y_1y_2 & -y_1^2+y_2^2 \end{pmatrix} \\ + c_4(y_1^2+y_2^2)^{p-1} \begin{pmatrix} -2y_1y_2 & y_1^2-y_2^2 \\ y_1^2-y_2^2 & 2y_1y_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{11.2}$$

con c_1, c_2, c_3, c_4, costanti arbitrarie.

Dim. Sia ϱ la matrice ortogonale, data da (2.2), che definisce una rotazione attorno all'origine di ampiezza ϑ; consideriamo l'identità

$$F^{(s)}(\varrho y) \equiv \varrho F^{(s)}(y) \varrho^{-1} . \tag{11.3}$$

Procedendo come nel teorema I.10 (con ϱ anzichè γ) si ottengono quattro polinomi omogenei, di grado s, p_1, p_2, r e t, tali che

$$p_1(\varrho y) = p_1(y) , \qquad p_2(\varrho y) = p_2(y) , \tag{11.4}$$

e, in base al sistema (10.5), r e t polinomi almeno di secondo grado (come si verifica direttamente) entrambi del tipo

$$q_1(y) y_1 y_2 + q_2(y)(y_1^2 - y_2^2) . \tag{11.5}$$

Infatti, dal sistema (10.5), si deduce che $r(y)$ e $t(y)$ devono risolvere l'equazione

$$z(\varrho^2 y) - 2 \cos 2\vartheta \, z(\varrho y) + z(y) = 0 , \tag{11.6}$$

che ammette le due soluzioni linearmente indipendenti $y_1 y_2$ e $y_1^2 - y_2^2$ (11).

---

(11) Si osservi che (11.6), in coordinate polari, è una equazione alle differenze finite, lineare del secondo ordine.

Sostituendo allora in (10.5) funzioni del tipo (11.5) si ha

$$
\begin{aligned}
r(y) &= 2q_1(y)\,y_1 y_2 + q_2(y)(y_1^2 - y_2^2)\,, \\
t(y) &= -2q_2(y)\,y_1 y_2 + q_1(y)(y_1^2 - y_2^2)\,,
\end{aligned}
\tag{11.7}
$$

con $q_1(y)$, $q_2(y)$ polinomi omogenei di grado $s-2$ tali che

$$
q_1(\varrho y) = q_1(y)\,, \qquad q_2(\varrho y) = q_2(y)\,. \tag{11.8}
$$

Dovendo (11.4), (11.8) valere per ogni $\varrho \in \mathscr{R}$, tenuto conto dei risultati del n. **7**, si ha che $F^{(s)}(y)$ deve essere della forma (11.2).

Viceversa si osservi che le due matrici

$$
\overline{M} = \begin{pmatrix} y_1^2 - y_2^2 & 2y_1y_2 \\ 2y_1y_2 & -y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\overline{M}} = \begin{pmatrix} -2y_1y_2 & y_1^2 - y_2^2 \\ y_1^2 - y_2^2 & 2y_1y_2 \end{pmatrix}, \tag{11.9}
$$

che figurano nella (11.2), rappresentano operatori differenziali a coefficienti costanti invarianti rispetto al gruppo $\mathscr{R}$. Di conseguenza ogni $F^{(s)}(y)$ della forma (11.2), con $s = 2p$, rappresenta un operatore a coefficienti costanti invariante rispetto ad $\mathscr{R}$.

Dal teorema precedente si deduce facilmente quest'altro.

II. *Condizioni necessaria e sufficiente perchè un operatore differenziale lineare vettoriale $L^{(s)}$, a coefficienti costanti, sia invariante rispetto al gruppo $\mathcal{O}$, è che s sia pari e, posto $s = 2p$, la matrice $F^{(s)}(y)$ associata all'operatore sia del tipo*

$$
F^{(s)}(y) = c_1(y_1^2 + y_2^2)^p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_3(y_1^2 + y_2^2)^{p-1} \begin{pmatrix} y_1^2 - y_2^2 & 2y_1y_2 \\ 2y_1y_2 & -y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix}, \tag{11.10}
$$

con c_1 e c_3 costanti arbitrarie.

Dim. Basta osservare che, delle 4 matrici che compaiono in (11.2) solo la matrice identica e $\overline{M}$ rappresentano operatori invarianti rispetto ad $\mathcal{O}$, mentre risulta, per ogni $\gamma \in \mathcal{O}$, $\overline{\overline{M}}(\gamma y)\cdot \det \gamma = \gamma \overline{\overline{M}}(y)\gamma^{-1}$.

Bibliografia

[1] G. Ascoli, *Sopra i sistemi lineari isotropi e le loro proprietà integrali*, Comm. Acc. Pontificia **7** (1942), 207-281.

[2] L. Bassotti: $[\cdot]_1$ *Sottospazi invarianti per operatori differenziali lineari a coefficienti costanti*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **22** (1973), 157-184; $[\cdot]_2$ *Operatori lineari invarianti rispetto a un gruppo di congruenze*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **5** (1979), 453-470.

[3] A. O. Guelfond, *Calcul des différences finies*, Dunod, Paris 1963.

[4] E. P. Wigner, *Group theory*, Acad. Press, New York 1959.

Summary

Let A be an open subset of $\boldsymbol{R}^2$, $\mathcal{O}$ the group of all orthogonal transformations of $\boldsymbol{R}^2$, $\mathcal{G}$ a subgroup of $\mathcal{O}$, consisting of transformations of A into itself.

In this paper characterization theorems for linear differential operators, $\mathcal{G}$-invariant by L. Bassotti, are obtained.

* * *