Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 483-494

T. MANACORDA (*)

Teoria macroscopica della radiazione interna nei continui (**)

Introduzione

La teoria della propagazione del calore per irraggiamento in un gas è basata su considerazioni di carattere microscopico e su varie approssimazioni suggerite dai fenomeni fisici che intervengono. Appare spontanea la domanda se tale teoria non possa invece inquadrarsi, come dovrebbe, nella moderna termomeccanica dei continui nella sua formulazione ormai divenuta classica. In realtà, una risposta a tale domanda è già contenuta nei lavori di Gurtin e Williams [**3**]$_{1,2}$ si veda anche [**2**]. Nella presente nota si espone una versione diversa e approfondita di tale teoria che appare promettente negli sviluppi che permette.

Dopo aver richiamato, nella forma modificata che appare qui conveniente, la teoria di Gurtin e Williams, si sviluppa una nuova trattazione intesa ad ottenere le equazioni generali di bilancio. Il risultato più interessante sembra quello della introduzione spontanea di una quinta equazione di bilancio per l'energia radiativa. Come applicazione, si precisano le approssimazioni che conducono a risultati noti della teoria microscopica, ottenute senza fare appello ad alcuna considerazione intuitiva nell'ambito molecolare.

1 – C_0 è la configurazione di riferimento di un corpo $\mathscr{C}$, C quella istantanea, $\mathbf{X}$ e $\boldsymbol{x}$ sono i posizionamenti, in C_0 e C rispettivamente, di una stessa particella di $\mathscr{C}$; A_0, B_0, ... sono sottoinsiemi connessi, disgiunti, aperti di C_0;

(*) Indirizzo: Istituto di Matematiche Applicate « U. Dini », Facoltà di Ingegneria, Università, Via Bonanno 25, 56100 Pisa, Italy.

(**) Ricevuto: 28-V-1981.

$f(A_0)$ è una funzione di insieme per $A_0 \subset C_0$. Si indica con A^* la chiusura del complemento di A_0 in C_0, mentre A^e è l'esterno di A_0, $A^e = A^* \cup C^c$, C^c complementare di C_0 in tutto lo spazio. Sono sottintese le varie ipotesi di regolarità su ∂A_0, ∂C_0, $f(A_0)$, ecc. che si renderanno necessarie.

Assioma (*Primo principio della Termodinamica* [**2**], n. 3). Esistono funzioni $E(A_0, t)$, $Q(A_0, B_0, t)$, per ogni $A_0, B_0 \subset C_0$, $t \in [0, T]$, ed ogni campo vettoriale $\boldsymbol{v}$ definito in C_0, con E differenziabile rispetto a t, Q e P biadditive (1), P lineare in $\boldsymbol{v}$ tali che

$$\dot{E}(A_0, t) = Q(A_0, A^e, t) + P(A_0, A^e; \dot{\boldsymbol{x}}, t) \text{ (2)}, \tag{1.1}$$

con $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ velocità della particella in $\boldsymbol{x}$ nell'istante t.

$Q(A_0, B_0)$ è la potenza termica di B_0 su A_0; $P(A_0, B_0, \boldsymbol{v})$ la potenza meccanica di B_0 su A_0 corrispondente al campo di velocità $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}, t)$, E l'energia interna.

Def. (*Potenza termica di legame dissipata tra A_0 e B_0*).

$$Q(A_0, B_0) + Q(B_0, A_0) + Q_b(A_0, B_0) = 0 . \tag{1.2}$$

Osservazioni. (a) $Q_b \equiv 0$ allora e allora soltanto che la potenza termica tra A_0 e B_0 sia bilanciata (3); (b) $Q_b(A_0, B_0) = Q_b(B_0, A_0)$; (c) $Q_b(A_0, B_0)$ è biadditiva.

Def. (*Potenza meccanica dissipata tra A_0 e B_0*).

$$P(A_0, B_0; \boldsymbol{v}) + P(B_0, A_0; \boldsymbol{v}) + P_b(A_0, B_0; \boldsymbol{v}) = 0 . \tag{1.3}$$

Osservazioni. (a) $P_b \equiv 0$ allora e allora soltanto che la potenza tra A_0 e B_0 sia bilanciata; (b) $P_b(A_0, B_0; \boldsymbol{v}) = P_b(B_0, A_0; \boldsymbol{v})$; (c) P_b è biadditiva.

Def. (*Energia interna di legame* [**2**]).

$$E_b(A_0, B_0) = E(A_0 \cup B_0) - E(A_0) - E(B_0) . \tag{1.4}$$

Osservazione. $E_b = 0$ allora e solo allora che E sia additiva.

---

(1) Cioè $Q(A \cup D, B) = Q(A, B) + Q(D, B)$; $Q(A, B \cup D) = Q(A, B) + Q(A, D)$.

(2) D'ora innanzi, per semplicità, la dipendenza esplicita dal tempo sarà sottintesa.

(3) Cioè $Q(B_0, A_0) = -Q(A_0, B_0)$.

Teorema ([**2**], Th. 3.3). *Da* (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) *segue*

$$\dot{E}_b(A_0, B_0) = Q_b(A_0, B_0) + P_b(A_0, B_0; \dot{\boldsymbol{x}}) . \tag{1.5}$$

Osservazione. $\dot{E}_b$ è biadditiva.

2 – Assioma (*Secondo principio della Termodinamica* [**2**], n. 4 ([4])).

(a) Esiste una funzione differenziabile $H(A_0)$, una funzione $\Sigma(A_0)$ ed una funzione biadditiva $M(A_0, B_0)$ tali che, per ogni processo, è

$$\dot{H}(A_0) = M(A_0, A^e) + \Sigma(A_0) , \qquad \Sigma(A_0) \geqslant 0 , \qquad \forall A_0 \subset C_0 . \tag{2.1}$$

(b) Se A_0 è termicamente isolato da B_0, è $M(A_0, B_0) = 0$.

Osservazione. La (2.1) equivale a

$$\dot{H}(A_0) \geqslant M(A_0, A^e) \qquad \forall t \geqslant 0 , \ \forall A_0 \subset C_0 . \tag{2.2}$$

Def. (*Entropia di legame* [**3**]$_2$).

$$H_b(A_0, B_b) = H(A_0 \cup B_0) - H(A_0) - H(B_0) . \tag{2.3}$$

Def. (*Flusso di legame dissipato di entropia*).

$$M_b(A_0, B_0) + M(A_0, B_0) + M(B_0, A_0) = 0 . \tag{2.4}$$

Osservazione. M_b è biadditivo e simmetrico, nullo allora e allora soltanto che il flusso di entropia sia bilanciato.

Teorema *Da* (2.1), (2.3) *e* (2.4) *segue*

$$\begin{aligned} \dot{H}_b(A_0, B_0) &= M_b(A_0, B_0) + \Sigma_b(A_0, B_0) , \\ \Sigma_b(A_0, B_0) &= \Sigma(A_0 \cup B_0) - \Sigma(A_0) - \Sigma(B_0) . \end{aligned} \tag{2.5}$$

3 - Forma locale per le equazioni meccaniche di bilancio ([**2**] n. 5)

Assioma (*Forma di* $P(A_0, B_0, \boldsymbol{v})$). Esiste un tensore di Kirckhoff $\boldsymbol{T}_K$

([4]) In una forma un poco modificata rispetto a [**2**], n. 4.

degli sforzi ed un campo di azioni mutue tali che

$$P(A_0, B_0, \boldsymbol{v}) = \int_I \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{T}_K \boldsymbol{N}\, \mathrm{d}\Sigma + \int_{B_0} \mathrm{d}m_Y \int_{A_0} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\cdot \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\, \mathrm{d}m_X \qquad \forall A_0, B_0 \subset C_0, \tag{3.1}$$

ove $I = \partial A_0 \cap \partial B_0$, $\mathrm{d}m = \varrho_0\, \mathrm{d}V$, ϱ_0 densità di massa, $\boldsymbol{N}$ normale esterna ad A_0 nei punti di I, $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ sono particelle rispettivamente di A_0 e B_0 e $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ rappresenta la forza esercitata sulla particella $\boldsymbol{X}$ da $\boldsymbol{Y}$. Come al solito, la dipendenza eventuale dal tempo è sottintesa.

Inoltre

$$P(A_0, C^e, \boldsymbol{v}) = \int_I \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{T}_K \boldsymbol{N}\, \mathrm{d}\Sigma + \int_{A_0} \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{b}_e\, \mathrm{d}m_X\,, \qquad I = \partial A_0 \cap \partial C^e\,. \tag{3.2}$$

Osservazione. In convenienti condizioni per $\boldsymbol{b}$, l'ultimo termine di (3.1) si può anche scrivere nella forma $\int_{A_0} \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{b}_*\, \mathrm{d}m_X$ con $\boldsymbol{b}_*(\boldsymbol{X}) = \int_{B_0} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\, \mathrm{d}m_Y$.

Teorema ([**2**], n. 5). Sotto opportune condizioni di regolarità, (3.1) e (3.2) conducono alla forma tradizionale delle equazioni meccaniche di bilancio

$$\mathrm{Div}\, \boldsymbol{T}_K + \varrho_0 \boldsymbol{b}^* = 0\,, \qquad \boldsymbol{T}_K \boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{T}_K^T\,, \qquad \boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{b}_e(\boldsymbol{X}) + \int_{C_0} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\, \mathrm{d}m_Y\,, \tag{3.3}$$

con, in più,

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = -\boldsymbol{b}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})\,, \qquad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = 0\,. \tag{3.4}$$

4 - Forma locale del principio dell'energia

Def. ([**2**]). *Densità* $f(\boldsymbol{X})$ *di una funzione* $F(A_0)$ è

$$f(\boldsymbol{X}) = \lim_{r\to 0} \frac{F(\Omega(\boldsymbol{X}, r))}{m(\Omega(\boldsymbol{X}, r))}\,, \tag{4.1}$$

ove $\Omega(\boldsymbol{X}, r)$ è un intorno sferico di $\boldsymbol{X}$ di raggio r, ed m la sua massa.

Assioma 1 [**2**]. $E(A_0)$ e $\dot{E}(A_0)$ hanno densità e ed $\dot{e}$; inoltre e è funzione differenziabile di t ed è

$$\dot{e} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e\,. \tag{4.2}$$

Assioma 2 (*Forma di* $Q(A_0, B_0)$).

$$Q(A_0, B_0) = -\int_I \boldsymbol{q}_0^e \cdot \boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\Sigma - \int_{B_0} \mathrm{d}m_Y \int_{\partial A_0} \boldsymbol{q}_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \cdot \boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\Sigma + \int_{B_0} \mathrm{d}m_Y \int_{A_0} r(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\,\mathrm{d}m_X\,, \tag{4.3}$$

$$I = \partial A_0 \cap \partial B_0\,,$$

ove $\boldsymbol{q}_0^e$ rappresenta il flusso di *ogni forma* di potenza termica attraverso la frontiera di A_0 e $r(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ il calore radiativo. Inoltre

$$Q(A_0, C_0^e) = -\int_I \boldsymbol{q}_0^e \cdot \boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\Sigma + \int_{A_0} r^e(\boldsymbol{X})\,\mathrm{d}m\,, \qquad I = \partial A_0 \cap \partial C^e\,, \tag{4.4}$$

$\boldsymbol{N}$ è la normale esterna ad A_0 nei punti di ∂A_0.

Sostituendo nell'equazione dell'energia (1.1) e prendendo le densità, si perviene a

$$\varrho_0 \dot{e} = \boldsymbol{T}_K \cdot \dot{\boldsymbol{F}} - \operatorname{Div} \boldsymbol{q}_0 + \varrho_0 r\,, \tag{4.5}$$

con

$$\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{q}_0^e + \int_{C_0} \boldsymbol{q}_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\,\mathrm{d}m_Y\,, \qquad r = r^e + \int_{C_0} r(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\,\mathrm{d}m_Y\,. \tag{4.6}$$

Nella (4.4) e (4.6) $\boldsymbol{q}_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ individua il calore che fluisce attraverso ∂A_0 dovuto alle particelle di B_0, mentre $\boldsymbol{q}_0^e$ è la densità del flusso di origine esterna.

5 - Forma locale per l'equazione di bilancio dell'energia di legame

Def. ([**2**], n. 6). *Densità doppia di una funzione* $\Phi(A_0, B_0)$ è

$$\varphi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \lim_{r \to 0} \frac{\Phi(\Omega(\boldsymbol{X}, r), \Omega(\boldsymbol{Y}, r))}{m(\Omega(\boldsymbol{X}, r))\, m(\Omega(\boldsymbol{Y}, r))}\,, \qquad \boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{Y}\,. \tag{5.1}$$

Assioma. E_b ed $\dot{E}_b$ possiedono densità doppia $-e_b$ e $-\dot{e}_b$, inoltre, e_b è differenziabile e si ha $\dot{e}_b = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)e_b$ per ogni $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ con $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{Y}$.

Si riprende (1.5), tenendo presenti le definizioni di Q_b e P_b, e le ipotesi sulla forma di Q e P adottate in **4**. Prendendo le densità, nelle ipotesi accettate, si ottiene

$$\begin{aligned} -\dot{e}_b(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = {} & \frac{1}{\varrho_0(\boldsymbol{X})} \operatorname{Div}_X \boldsymbol{q}_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) + \frac{1}{\varrho_0(\boldsymbol{Y})} \operatorname{Div}_Y \boldsymbol{q}_0(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) \\ & - [r(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) + r(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})] + [\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{Y}) - \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X})] \cdot \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\,, \qquad \boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{Y}\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Osservazione. $\dot{e}_b(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \dot{e}_b(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$.

6 - Forma locale per l'equazione di bilancio dell'energia di legame integrata

Sia $\boldsymbol{X} \in A_0$, e $\Omega(\boldsymbol{X}, r)$ un intorno sferico di centro $\boldsymbol{X}$ e raggio r, appartenente ad A_0; si accetta il seguente

Assioma. Esiste la densità (parziale) $-e^R(\boldsymbol{X})$ di $E_b(\Omega(\boldsymbol{X}, r),\ \Omega^*(\boldsymbol{X}, r))$ così come quella, $-\dot{e}^R$, di $\dot{E}_b$, e si ha $\dot{e}^R = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\, e^R$.

Dalla (1.5), prendendo le densità parziali, si ottiene

$$-\varrho_0(\boldsymbol{X})\,\dot{e}^R(\boldsymbol{X}) = \operatorname{Div} \boldsymbol{q}_0^R(\boldsymbol{X}) + \varrho_0 f(\boldsymbol{X}) + \varrho_0(\boldsymbol{X}) \int_{C_0} \{\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{Y}) - \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X})\} \cdot \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\, \mathrm{d}m_Y, \tag{6.1}$$

con

$$\left\{\begin{aligned} &\boldsymbol{q}_0^R = \int_{C_0} \boldsymbol{q}_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\, \mathrm{d}m_Y, \\ &f(\boldsymbol{X}) = \int_{C_0} \frac{1}{\varrho_0(\boldsymbol{Y})} \operatorname{Div}_Y \boldsymbol{q}_0(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})\, \mathrm{d}m_Y - \int_{C_0} \{r(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) + r(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})\}\, \mathrm{d}m_Y. \end{aligned}\right. \tag{6.2}$$

Alla funzione (di $\boldsymbol{X}$ e di t) e^R si dà il nome di *densità integrata di energia di legame*.

7 - Forma locale del principio dell'entropia

Assioma [2]. Le funzioni H e $\dot{H}$ hanno densità η ed $\dot{\eta}$, inoltre η è differenziabile e si ha $\dot{\eta} = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\eta$.

Assioma (*Forma della funzione* $M(A_0, B_0)$). Per ogni A_0 e $B_0 \subset C_0$

$$\begin{aligned} M(A_0, B_0) = &-\int_{B_0} \mathrm{d}m_Y \int_{\partial A_0} \frac{\boldsymbol{q}_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \cdot \boldsymbol{N}}{\theta(\boldsymbol{X})}\, \mathrm{d}\Sigma - \int_I \frac{\boldsymbol{q}_0^e \cdot \boldsymbol{N}}{\theta}\, \mathrm{d}\Sigma \\ &+ \int_{B_0} \mathrm{d}m_Y \int_{A_0} \frac{r(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})}{\theta(\boldsymbol{X})}\, \mathrm{d}m_X, \qquad I = \partial A_0 \cap \partial B_0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$M(A_0, C^e) = -\int_I \frac{\boldsymbol{q}_0^e \cdot \boldsymbol{N}}{\theta}\, \mathrm{d}\Sigma + \int_{A_0} \frac{r^e(\boldsymbol{X})}{\theta(\boldsymbol{X})}\, \mathrm{d}m_X, \qquad I = \partial A_0 \cap \partial C_0. \tag{7.2}$$

$\boldsymbol{N}$ è la normale esterna ad A_0 nei punti ∂A_0, θ è la temperatura assoluta. Dalla

(2.2) si ottiene, nelle ipotesi ammesse,

$$\varrho_0(X)\dot{\eta} \geqslant -\operatorname{Div}\frac{\boldsymbol{q}_0}{\theta} + \varrho_0\frac{r}{\theta}, \tag{7.3}$$
$$\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{q}_0^e + \int_{C_0} \boldsymbol{q}_0(X, Y)\,\mathrm{d}m_Y, \qquad r = r^e(X) + \int_{C_0} r(X, Y)\,\mathrm{d}m_Y.$$

8 - Forma locale per la disequazione dell'entropia di legame ([3]$_2$)

Assioma. Le funzioni H_b, $\dot{H}_b$ e Σ_b hanno densità doppia η_b, $\dot{\eta}_b$ e σ_b, η_b è derivabile e si ha $\dot{\eta}_b = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\eta_b$, e, per ogni processo ammissibile, è $\sigma_b \geqslant 0$.

Dalla (2.4) si ottiene

$$-\dot{\eta}_b(X, Y) = \frac{1}{\varrho_0(X)}\operatorname{Div}_X \frac{\boldsymbol{q}_0(X, Y)}{\theta(X)} + \frac{1}{\varrho_0(Y)}\operatorname{Div}_Y \frac{\boldsymbol{q}_0(Y, X)}{\theta(Y)} - \frac{r(X, Y)}{\theta(X)} - \frac{r(Y, X)}{\theta(Y)} - \sigma_b(X, Y), \tag{8.1}$$

la quale, nelle ipotesi ammesse, equivale alla disequazione

$$\dot{\eta}_b(X, Y) \geqslant -\frac{1}{\varrho_0(X)}\operatorname{Div}_X \frac{\boldsymbol{q}_0(X, Y)}{\theta(X)} - \frac{1}{\varrho_0(Y)}\operatorname{Div}_Y \frac{(Y, X)}{\theta(Y)} + \frac{r(X, Y)}{\theta(X)} + \frac{r(Y, X)}{\theta(Y)}, \tag{8.2}$$

da valere lungo ogni processo ammissibile.

9 - Forma locale per la disequazione dell'entropia integrata

Assioma. Le funzioni $H_b(\Omega, \Omega^*)$, $\dot{H}_b(\Omega, \Omega^*)$, $\Sigma_b(\Omega, \Omega^*)$ ammettono densità parziali $-\eta^R(X)$, $-\dot{\eta}^R(X)$, $-\sigma^R(X)$, ed inoltre η è differenziabile e si ha $\dot{\eta}^R = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\eta^R$.

Dopo ciò, da (2.4) si ottiene facilmente

$$-\varrho_0\dot{\eta}^R = \operatorname{Div}_X \frac{\boldsymbol{q}_0^R}{\theta(X)} - \varrho_0 g(X) - \sigma^R(X), \tag{9.1}$$

con (cfr. (6.2))

$$g(X) = \int_{C_0} \left\{ \frac{r(X, Y)}{\theta(X)} + \frac{r(Y, X)}{\theta(Y)} \right\} \mathrm{d}m_Y - \int_{C_0} \frac{1}{\varrho_0(Y)} \mathrm{Div}_Y \frac{\boldsymbol{q}_0(Y, X)}{\theta(Y)} \mathrm{d}m_Y \,, \tag{9.2}$$

$$\boldsymbol{q}_0^R(X) = \int_{C_0} \boldsymbol{q}_0(X, Y)\, \mathrm{d}m_Y \,.$$

Assioma. Per ogni processo ammissibile è $\sigma^R \geqslant 0$.

Da (9.1) si ottiene

$$\varrho_0 \dot{\eta}^R \geqslant -\mathrm{Div}\, \frac{\boldsymbol{q}_0^R}{\theta} + \varrho_0 g(X) \,. \tag{9.3}$$

Osservazione. Se $\theta(X) = \text{cost}$ è $g(X) = -f(X)/\theta$.

Osservazione. Si sottraggono membro a membro (4.5) e (6.1); si ottiene

$$\varrho_0(\dot{e} - \dot{e}^R) = \boldsymbol{T}_K \cdot \dot{\boldsymbol{F}} - \mathrm{Div}\, \boldsymbol{q}_0^c + \varrho_0 r^e + \varrho_0(X) \int_{C_0} \frac{1}{\varrho_0(Y)} \mathrm{Div}_Y\, \boldsymbol{q}_0(Y, X)\, \mathrm{d}m_Y \tag{9.4}$$

$$- \varrho_0(X) \int_{C_0} r(Y, X)\, \mathrm{d}m_Y - \varrho_0(X) \int_{C_0} [\dot{\boldsymbol{x}}(Y) - \dot{\boldsymbol{x}}(X)] \cdot \boldsymbol{b}(Y, X)\, \mathrm{d}m_Y \,.$$

Questa si presta a qualche considerazione. $\boldsymbol{T}_K$ contiene anche la parte degli sforzi dovuta alla radiazione, $\boldsymbol{T}_K = \boldsymbol{T}_K^R + \boldsymbol{T}_K^M$; il secondo termine è dovuto al flusso, in X, del calore di conduzione, mentre $r^e(X)$ è la densità delle sorgenti esterne. Il terzo termine è uguale a $\int_{\partial C_0} \boldsymbol{q}_0(Y, X) \cdot \boldsymbol{N}\, \mathrm{d}\Sigma$ ed è dunque il flusso totale uscente da C_0 e dovuto ad X, mentre $\int_{C_0} r(Y, X)\, \mathrm{d}m_Y$ è il calore radiativo assorbito da tutte le particelle di C_0 e dovuto ad X. Infine, l'ultimo termine dà la potenza delle forze mutue, dovute ad X ed agenti su Y, in relazione alla velocità relativa di Y rispetto ad X.

10 - Forma euleriana delle equazioni dell'energia e delle disequazioni dell'entropia

Per semplicità, d'ora innanzi si assume $\boldsymbol{b}(X, Y) = 0$, $r(X, Y) = r(Y, X) = 0$. Basta assumere ($\boldsymbol{F}$ è il gradiente di deformazione $C_0 \to C$)

$$\boldsymbol{q} = J^{-1} \boldsymbol{F} \boldsymbol{q}_0 \,, \qquad J = \det \boldsymbol{F} > 0 \,, \tag{10.1}$$

di modo che è, per ogni superficie regolare chiusa, $\int_{\partial c_0} \boldsymbol{q}_0 \cdot \boldsymbol{N}\, \mathrm{d}\Sigma = \int_{\partial c} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma$, per ottenere le equazioni dell'energia (4.5) e (6.1) in forma euleriana

$$(10.2)\qquad \begin{aligned} &\varrho\dot{e} = \boldsymbol{T}\cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v} - \operatorname{div} \boldsymbol{q} + \varrho r\,, \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^e + \boldsymbol{q}^R\,,\\ &\varrho\dot{e}^R = -\operatorname{div} \boldsymbol{q}^R - \varrho f(\boldsymbol{x})\,,\ \ \boldsymbol{q}^R = \int_c \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, \mathrm{d}m_Y\,,\ \ f(\boldsymbol{x}) = \int_c \operatorname{div}_Y \boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, \mathrm{d}v_Y\,, \end{aligned}$$

e le disequazioni dell'entropia

$$(10.3)\qquad \begin{aligned} &\varrho\dot{\eta} \geqslant -\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{q}}{\theta} + \varrho \frac{r}{\theta}\,,\\ &\varrho\dot{\eta}^R \geqslant -\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{q}^R}{\theta} + \varrho g(\boldsymbol{x})\,, \qquad g(\boldsymbol{x}) = -\int_c \operatorname{div}_Y \frac{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}{\theta(\boldsymbol{y})}\, \mathrm{d}v_Y\,. \end{aligned}$$

Osservazione. Dalle $(10.2)_{1,2}$ si ottiene (cfr. **9**, Osservazione 2)

$$(10.4)\qquad \varrho(\dot{e} - \dot{e}^R) = \boldsymbol{T}^M\cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v} - \operatorname{div} \boldsymbol{q}^e + \varrho r^e + \varrho f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{T}^R \operatorname{grad} \boldsymbol{v}\,,$$

nella quale la parte termomeccanica classica, costituita dai primi tre termini a secondo membro, è in qualche modo separata da quella radiativa.

11 - Materiali ideali

Sono quelli per i quali

$$(11.1)\qquad \varrho\theta\dot{\eta} = -\operatorname{div} \boldsymbol{q} + \varrho r\,, \qquad \varrho\theta\dot{\eta}^R = -\operatorname{div} \boldsymbol{q}^R - \varrho f(\boldsymbol{x})\,,$$

cioè (cfr. (10.2))

$$(11.2)\qquad \varrho\theta\dot{\eta} = \varrho\dot{e} - \boldsymbol{T}\cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v}\,, \qquad \varrho\theta\dot{\eta}^R = \varrho\dot{e}^R\,.$$

Osservazione. Si riprenda la (10.4) ponendo $e^M = e - e^R$, perciò

$$(11.3)\qquad \varrho\dot{e} = \varrho(\dot{e}^M + \dot{e}^R) = \boldsymbol{T}\cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v} - \operatorname{div} \boldsymbol{q}^e - \operatorname{div} \boldsymbol{q}^R + \varrho r\,.$$

Si ponga ora $e^M = E$, $\varrho e^R = E^R$, $\boldsymbol{T} = -(p + p^R)\boldsymbol{1}$. Essendo

$$\dot{E}^R = \varrho\dot{e}^R + \dot{\varrho}e^R = \varrho\dot{e}^R - E^R \operatorname{div} \boldsymbol{v}\,,$$

si ottiene

$$\varrho\dot{E} + \dot{E}^R + E^R \operatorname{div} \boldsymbol{v} = -p \operatorname{div} \boldsymbol{v} - p^R \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \operatorname{div} \boldsymbol{q}^e - \operatorname{div} \boldsymbol{q}^R + \varrho r ,$$

e se si pone (ipotesi di Milne-Eddington [**6**]) $p^R = \frac{1}{3} E^R$, si perviene a

$$\varrho\dot{E} + \dot{E}^R + \tfrac{4}{3} E^R \operatorname{div} \boldsymbol{v} + p \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \operatorname{div} \boldsymbol{q}^R = -\operatorname{div} \boldsymbol{q}^e + \varrho r . \tag{11.4}$$

Ove si trascuri $\boldsymbol{q}^e$ nei confronti di $\boldsymbol{q}^R$ e si ponga $r = 0$, si ottiene una relazione nota [**5**]$_2$. Se per di più si ammette l'esistenza di una funzione s tale che

$$\varrho\theta\dot{s} = \varrho\dot{E} + p \operatorname{div} \boldsymbol{v} , \tag{11.5}$$

si ottiene l'equazione dell'energia in forma nota ([**5**]$_2$, (4.8)).

Osservazione. In analogia a (10.4), da (11.2) si ha

$$\varrho\theta(\dot{\eta} - \dot{\eta}^R) = \varrho(\dot{e} - \dot{e}^R) - \boldsymbol{T}\cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v} = \varrho\dot{e}^M - \boldsymbol{T}\cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v} ,$$

e cioè

$$\varrho\theta\dot{\eta}^M = \varrho\dot{e}^M - \boldsymbol{T}\cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v} , \qquad \eta^M = \eta - \eta^e . \tag{11.6}$$

Nelle ipotesi sopra indicate

$$\varrho\theta\dot{\eta}^M = \varrho\dot{e}^M + (p + p^R) \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \varrho\dot{E} + p \operatorname{div} \boldsymbol{v} + p^R \operatorname{div} \boldsymbol{v} ,$$

e dunque l'ipotesi (11.5) equivale a

$$\varrho\theta\dot{\eta}^M - p^R \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \varrho\theta\dot{s} . \tag{11.7}$$

12 - Equazioni di bilancio: l'approssimazione differenziale

(a) D'ora innanzi, per semplicità, si porrà $r=0$, $\boldsymbol{b}_e = 0$ (cfr. (3.3) e (10.2)). Con ciò, le equazioni di bilancio, in forma euleriana, sono

$$\begin{aligned} &\varrho\ddot{\boldsymbol{x}} = \operatorname{div} \boldsymbol{T} , \qquad \varrho\dot{e} = \boldsymbol{T} \operatorname{grad} \boldsymbol{v} - \operatorname{div} \boldsymbol{q} , \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^e + \boldsymbol{q}^R , \\ &\varrho\dot{e}^R = -\operatorname{div} \boldsymbol{q}^R - \varrho f(\boldsymbol{x}) , \qquad f(\boldsymbol{x}) = \int_C \operatorname{div}_y \boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, dv_y . \end{aligned} \tag{12.1}$$

La presenza di una quinta equazione accanto alle quattro tradizionali, suggerisce che si debba scegliere cinque variabili fondamentali mediante le quali esprimere, con l'intervento di opportune equazioni costitutive, tutte le altre grandezze in gioco. Le variabili fondamentali della termomeccanica sono, naturalmente, lo spostamento (quindi $\boldsymbol{x}$) e la temperatura: ad esse va aggiunta una quinta variabile la cui scelta è largamente arbitraria.

(b) Si scelga, come quinta variabile, e^R, e si ammetta, che $\boldsymbol{q}^R$ sia un funzionale solo di e^R e della storia integrata $\bar{e}^R{}_t(s)$ (¹) di e^R. Tanto basta per poter concludere che, per piccoli processi e subordinatamente alla scelta di una opporruna funzione di memoria (²), l'equazione costitutiva per $\boldsymbol{q}^R$ è

$$\dot{\boldsymbol{q}}^R + \beta \boldsymbol{q}^R = - k\beta \operatorname{grad} e^R . \tag{12.2}$$

Si tratta, esattamente, dell'equazione costitutiva della approssimazione differenziale [4] nella teoria della radiazione in un gas ideale, che si ottiene per $\beta = \alpha C$, $k = C/3\alpha$, α coefficiente di assorbimento medio, C velocità della luce nel vuoto. Alla (12.2) va naturalmente aggiunta la (12.1), che, insieme alla (12.2), per una opportuna scelta della funzione $f(\boldsymbol{x})$, costituisce il sistema delle equazioni fondamentali della approssimazione differenziale.

Bibliografia

[1] J. P. Cox and R. T. Giuli, *Principles of stellar structure*, I, Physical Principles, Gordon Breach, New York 1968.

[2] M. E. Gurtin, *Modern continuum Thermodynamics, in Mechanics today*, I, Pergamon Press, New York (1972), 168-213.

[3] M. E. Gurtin and W.O. Williams: [•]₁ *On the first law of thermodynamics*, Arch. Rational Mech. Anal. **42** (1971), 77-92; [•]₂ *On continuum thermodynamics with mutual body forces and internal radiation*, Z. Angew Math. Phys. **22** (1971), 293-298.

[4] J. B. Helliwell, *The propagation of small disturbances in radiative magnetohydrodynamics*, Arch. Rational Mech. Anal. **47** (1972), 380-388.

(¹) Sia $f^t(s) = f(t-s)$, $0 \leqslant s < +\infty$, la storia fino all'istante t di $f(\xi)$, storia integrata è [**6**] la funzione $\bar{f}^t(s) = \int_0^s f^t(\lambda)\, d\lambda = \int_{t-s}^t f(\tau)\, d\tau$.

(²) Si dimostra che si ha $\boldsymbol{q}^R = -\int_0^{+\infty} \alpha(s) \operatorname{grad} \bar{e}_t^R\, ds$, con $\lim_{s \to +\infty} \alpha(s) = 0$. Basta assumere $\alpha(s) = k\beta e^{-\beta s}$, $k, \beta > 0$, per ottenere (12.2).

[5] G. Mattei: [•]$_1$ *Radiative magnetogasdynamics; basic equations and non-linear wave propagation*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **10** (1974), 150-173; [•]$_2$ *Irraggiamento termico in magnetogasdinamica*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **12** (1975), 262-279.

[6] A. C. Pipkin and M. E. Gurtin, *A general theory of heat conduction with finite wave speeds*, Arch. Rational Mech. Anal. **31** (1968), 113-126.

Summary

In the present paper, a theory of internal radiation in continua is proposed, based on the classical principles of thermomechanics.

* * *