

ALDO ASCARI ◦ RAFFAELLA PAVANI (\*)

## Uno schema alle differenze esplicito per un problema parabolico a frontiera mobile (\*\*)

### 1 - Posizione del problema

Il problema studiato in questa nota è relativo all'equazione del calore, in una particolare formulazione a due dimensioni spaziali; esso è estratto ed isolato da un problema fisico-matematico più ampio, del quale è necessario premettere una sommaria enunciazione per meglio inquadrare l'argomento del presente lavoro.

Gran parte dei comuni oggetti rigidi di plastica è fabbricata mediante la iniezione di materiale fuso in uno stampo. Il processo di riempimento dello stampo costituisce un evento fluidodinamico a frontiera mobile, non isoterma (perchè il fluido si raffredda rapidamente) e di solito non newtoniano; la sua descrizione matematica conduce quindi, in generale, ad un problema al contorno per un sistema alle derivate parziali, comprendente le consuete equazioni meccaniche (di continuità e di Navier-Stokes), una legge costitutiva, ed una equazione di temperatura (con termini diffusivi e convettivi). La complessità del problema induce ovviamente a cercare formulazioni approssimate, per lo più impicanti metodi numerici: in alcune di queste, con finalità « progettuali », viene offerta una soluzione totalmente numerica (quasi sempre con il metodo degli elementi finiti) per « pezzi » di geometria anche molto complicata; in altre formulazioni, invece, più orientate alla ricerca tecnologica, ci si limita a geometrie particolarmente semplici per consentire una trattazione semianalitica.

---

(\*) Indirizzi degli AA.: ASCARI, Istituto « Guido Donegani » (Gruppo Montedison), 28100 Novara e Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy; R. PAVANI, Istituto « Guido Donegani » (Gruppo Montedison), 28100 Novara, Italy.

(\*\*) Ricevuto: 28-IX-1981.

Esempio del secondo tipo è lo stampo a disco, cioè un cilindro circolare il cui diametro  $2R$  sia apprezzabilmente maggiore dell'altezza  $2H$  (almeno 10 volte). L'iniezione del materiale fuso avviene di fatto da un foro centrale su una base, ma per semplicità si suppone che avvenga in direzione radiale, a partire dalla superficie di un cilindro coassiale di raggio  $R_0$ . Il problema è allora dotato di simmetria cilindrica e di simmetria rispetto al piano equatoriale; se  $r, z$  sono coordinate cilindriche con l'origine sul centro di una base, esso va risolto nel dominio  $R_0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq H$ .

Adottiamo qui, in modo del tutto acritico, una formulazione data in [5], e già reperibile, nell'essenziale, in lavori precedenti (cfr. [4] e la bibliografia in [5]). Essa è caratterizzata dal supporre non nulle la sola componente radiale  $v_r$  della velocità e la sola componente di scorrimento  $\tau_{rz}$  del tensore degli sforzi (componenti che d'ora in poi scriveremo semplicemente  $v$  e  $\tau$ ). Queste grandezze entrano come termini noti nell'equazione per la temperatura  $T$  (funzione di  $r, z$  e del tempo  $t$ )

$$(1) \quad \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \tau \frac{\partial v}{\partial z},$$

dove  $\rho, c_p, \kappa$  denotano la densità, il calore specifico e la conducibilità termica, supposte tutte costanti. Alla (1) si devono affiancare, come s'è detto, le equazioni meccaniche e costitutive; ma noi omettiamo qui di farlo, perchè vogliamo occuparci esclusivamente dell'integrazione numerica della (1), quando  $v, \partial v / \partial z$  e  $\tau$  siano assegnate (almeno numericamente) in funzione di  $r, z, t$ . Consideriamo cioè l'integrazione della (1) come « segmento » di un procedimento iterativo per la risoluzione del problema completo.

Si possono assegnare le seguenti condizioni al contorno.

Sulla base del disco, la legge di scambio termico di Newton (lineare)

$$(2) \quad T(r, 0, t) - T_p = \alpha \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0},$$

dove  $\alpha$  è una costante, e  $T_p$  la temperatura della parete (mantenuta costante e abbastanza elevata per evitare la solidificazione prematura); sul piano equatoriale, la condizione di simmetria

$$(3) \quad \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=H} = 0;$$

il fluido entra dalla superficie  $r = R_0$  a temperatura uniforme e costante  $T_0$  ( $> T_p$ )

$$(4) \quad T(R_0, z, t) = T_0 .$$

Altre condizioni scaturiscono dal carattere a frontiera mobile del problema. Non c'è una condizione iniziale, perchè per  $t = 0$  lo stampo è vuoto. Invece, assegnando la portata volumetrica  $Q(t)$  di alimentazione, e ammettendo che — per la piccolezza dello spessore del disco — il fronte di avanzamento nello stampo possa essere considerato cilindrico di raggio  $r = r_a(t)$ , si determina questo raggio con la relazione

$$(5) \quad 2\pi[r_a^2(t) - R_0^2]H = \int_0^t Q(t') dt' .$$

Il valore  $t_f$  di  $t$  per il quale risulta  $r_a(t_f) = R$  è l'istante finale del processo.

Dopo ciò, si può scrivere una condizione di scambio termico attraverso il fronte di avanzamento  $r = r_a$ . Non è facile precisarla in modo realistico; ci si può accontentare di scriverla come condizione di adiabaticità, ottenendo verosimilmente una limitazione superiore per la temperatura

$$(6) \quad \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_a} = 0 .$$

Come si vedrà, l'interesse di questa condizione sta piuttosto nel fatto che essa può essere tenuta o non tenuta in conto a seconda del procedimento risolutivo che si adotta.

## 2 - Uno schema esplicito a frontiera mobile

Per ragioni « esogene » rispetto alla formulazione del problema, ci si è proposti di integrare la (1) mediante uno schema alle differenze finite di tipo esplicito, preparandosi con ciò ad affrontare le questioni di stabilità che ne sarebbero emerse. La presenza nella (1) delle due derivate prime  $\partial T/\partial t$ ,  $\partial T/\partial r$  permette di scegliere fra  $t$  ed  $r$  la variabile indipendente di avanzamento; ma l'assenza, già rilevata, di una condizione iniziale rende del tutto spontanea la scelta della  $r$ , anche se ne consegue una costruzione meno intuitiva della soluzione. Precisamente, questa sarà costruita per successivi valori di  $r$  (in ordine crescente da  $R_0$  ad  $R$ ), e, per ciascun valore di  $r$ , nel dominio  $[0, H] \times [t_a, t_f]$  del piano  $(z, t)$ , dove  $t_f$  è l'istante finale già definito, mentre  $t_a$  è

l'istante in cui  $r_a(t)$  ha il generico valore assegnato  $r$ . In altre parole, di ogni punto interno dello stampo si costruisce, in un'unica sequenza ininterrotta, l'intera biografia termica, dall'istante  $t_a$  in cui il fluido raggiunge il punto all'istante finale  $t_f$ .

Poniamo ora

$$(7) \quad r = R_0 + i \Delta r, \quad z = j \Delta z, \quad t = k \Delta t,$$

dove  $i \in [0, I]$ ,  $j \in [0, J]$ ,  $k \in [0, K]$  sono variabili intere. Si ha intanto  $H = J \Delta z$ , quindi scelto arbitrariamente l'intero  $J$  resta assegnato il passo  $\Delta z$ . Analogamente  $\Delta t$  si determina scegliendo  $K$  e ponendo  $t_f = K \Delta t$ . Riguardo a  $\Delta r$  occorre invece prima precisare lo schema alle differenze. Indicando al solito con  $T_{i,j,k}$  il valore approssimato di  $T$  nel punto  $(r, z, t)$  di coordinate (7), ed assumendo: la differenza in avanti per approssimare  $\partial T / \partial r$ , la differenza all'indietro per  $\partial T / \partial t$ , la differenza (seconda) centrale per  $\partial^2 T / \partial z^2$ , si ottiene lo schema esplicito

$$(8) \quad T_{i+1,j,k} = A_0 + A_1 T_{i,j-1,k} + A_2 T_{i,j,k} + A_3 T_{i,j+1,k} + A_4 T_{i,j,k-1},$$

dove

$$(9) \quad A_0 = -\frac{1}{\rho c_p} \frac{\tau}{v} \frac{\partial v}{\partial z} \Delta r, \quad (10) \quad A_1 = A_3 = \frac{\alpha}{\rho c_p} \frac{1}{v} \frac{\Delta r}{\Delta z^2},$$

$$(11) \quad A_2 = 1 - \frac{1}{v} \frac{\Delta r}{\Delta t} - \frac{2\alpha}{\rho c_p} \frac{1}{v} \frac{\Delta r}{\Delta z^2}, \quad (12) \quad A_4 = \frac{1}{v} \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

Coerentemente con lo schema, le condizioni al contorno (2), (3), (4) si scrivono rispettivamente

$$(13) \quad T_{i,0,k} = \frac{1}{1 + \alpha / \Delta z} (T_p + \frac{\alpha}{\Delta z} T_{i,1,k}),$$

$$(14) \quad T_{i,J,k} = T_{i,J-1,k}, \quad (15) \quad T_{0,j,k} = T_0.$$

Mediante queste, lo schema (8) determina univocamente  $T_{i,j,k}$  in ogni punto del dominio assegnato. Infatti, con la (15), si ottiene  $T_{i,j,k}$  per  $j \in [1, J-1]$ ,  $k \in [1, K]$ ; indi la (13) e la (14) completano l'intervallo  $j \in [0, J]$ . Mancano solo i valori  $T_{1,j,0}$ , per  $k = 0$ ; ma questi non solo non occorrono, ma neppure esistono, perchè per  $t = 0$  il fluido ovviamente non può aver raggiunto la super-

ficie cilindrica  $r = R_0 + \Delta r$ . Perciò la (8) è ora applicabile, per  $i = 1$ , al dominio  $[0, J] \times [1, K]$  di  $(j, k)$ , e analogamente determinerà  $T_{2,j,k}$  in  $[0, J] \times [2, K]$ ; e così via, riducendo progressivamente la larghezza del dominio in  $t$  (cioè la durata delle biografie termiche). In questo modo si viene finalmente a determinare (seppure provvisoriamente, come sarà chiarito più avanti) anche il passo  $\Delta r$ , rimasto finora imprecisato: infatti, avendosi  $r = R_0 + \Delta r$  per  $i = 1$ , e  $t = \Delta t$  per  $k = 1$ , ed essendo d'altra parte  $r = r_a(t)$  la posizione del fronte di avanzamento all'istante  $t$ , ne segue che per passare dal piano  $i = 0$  (cioè  $r = R_0$ ) al piano  $i = 1$  occorre usare il passo

$$\Delta r_1 = r_a(\Delta t) - R_0.$$

In modo analogo, per passare dal piano  $i$  al piano  $i + 1$  occorre il passo

$$(16) \quad \Delta r_k = r_a((k + 1) \Delta t) - r_a(k \Delta t).$$

Pertanto  $\Delta r$  dipende da  $\Delta t$ , ed è variabile con  $k$ ; gli interi  $i, j, k$  descrivono gli intervalli rispettivi

$$(17) \quad i \in [0, I = K], \quad j \in [0, J], \quad k \in [i, K],$$

e la (16) si applica per  $k \in [i, K - 1]$ .

A questo punto si è in possesso di uno schema formale di integrazione, adattato al dominio a frontiera mobile, ma senza alcuna cautela per le questioni di stabilità dello schema stesso; inoltre la condizione (6) sul fronte di avanzamento non ha ricevuto alcuna attenzione. Entrambi i punti verranno ora in esame.

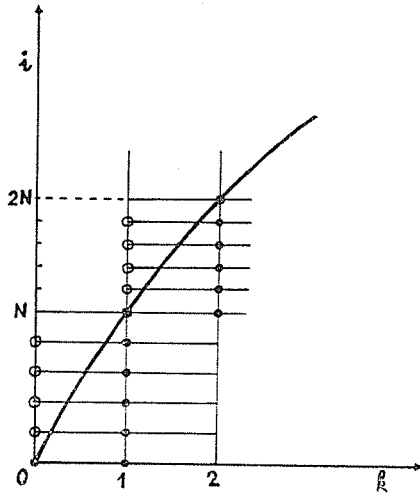
### 3 - Modifica dello schema per ottenerne la stabilità

Una analisi di stabilità dello schema (8), secondo una linea ormai classica, sarà brevemente sviluppata più avanti. Ma già prima di una qualsiasi analisi è evidente che lo schema, come è stato definito finora, non offre alcuna possibilità di controllo della propagazione degli errori, perchè non consente di agire sul valore del rapporto incrementale  $\Delta r / \Delta t$  (come mostra la (16), questo rapporto è una approssimazione di  $(dr_a/dt)_{t=k\Delta t}$ , che non dipende dai parametri della discretizzazione).

Per rimediare all'inconveniente è sufficiente, scelto un intero  $N$  opportuno, sostituire la (16) con

$$(18) \quad \Delta r_k = \frac{1}{N} [r_a((k + 1) \Delta t) - r_a(k \Delta t)];$$

in tal modo i rapporti  $\Delta r/\Delta t$ ,  $\Delta r/\Delta z^2$  (cfr. le (10)-(12)) possono essere resi arbitrariamente piccoli. Si presenta però un'altra difficoltà; è opportuno esaminarla con l'aiuto della figura, che rappresenta una generica sezione  $j = \text{costante}$  dello spazio reticolare  $(i, j, k)$ . Vi è tracciata la curva di equazione  $r = r_a(t)$ ;



con lo schema determinato dalla (16), su tale curva venivano a trovarsi i punti  $i = k$ , che costituivano appunto, per ogni  $j$ , la frontiera (mobile) del dominio di integrazione. Con la sub-reticolazione nella direzione  $i$ , attuata mediante la (18), i punti  $i = k$  vengono invece ad allontanarsi sempre più dalla frontiera del dominio, verso l'interno. Per evitare ciò è necessario che, salvo per i valori di  $i$  multipli di  $N$ , il numero di punti nella direzione  $k$  rimanga inalterato passando da  $i$  ad  $i+1$ ; cioè che il minimo valore di  $k$ , anziché  $i$  come voleva la terza (17), sia  $k = [i/N] = \text{parte intera di } i/N$ . Bisogna allora determinare,

per tutti i punti  $(i, j, k)$  per i quali  $i/N$  non è intero e  $k = [i/N]$ , un appropriato valore di  $T_{i,j,k}$ , che la (8) non può dare.

La condizione al contorno (6), finora ignorata, offre una risposta a questo ultimo problema. In forma discretizzata essa si scrive

$$T_{i+1,j,k} = T_{i,j,k} \quad (k = [i/N])$$

e fornisce quindi gli  $N$  valori eguali

$$T_{i,j,k} = T_{kN,j,k} \quad (i = kN, \dots, (k+1)N - 1).$$

In conclusione la definizione (17) del dominio di integrazione nello spazio reticolare  $(i, j, k)$  riesce modificata come segue

$$i \in [0, I = KN], \quad j \in [0, J], \quad k \in [[i/N], K],$$

e corrispondentemente la (18) si applica per  $k \in [[i/N], K - 1]$ .

#### 4 - Sulla stabilità dello schema

Il metodo detto di von Neumann è comunemente impiegato per l'analisi

di stabilità di schemi alle differenze finite a coefficienti costanti [1]; fra i quali *non* rientra lo schema (8), i cui coefficienti dipendono da  $v$  e  $\tau$ , funzioni del posto. Malgrado ciò, applicheremo egualmente il metodo suddetto al presente caso, ammettendo che le conclusioni valgano per opportune maggiorazioni dei coefficienti.

Nella (8) possiamo trascurare  $A_0$ , che è infinitesimo con  $\Delta r$  (ossia riferirci alla forma omogenea della (1)), e, notando che  $A_2 = 1 - 2A_1 - A_4$ , riscriverla nella forma (direttamente ricavabile anche dalla (1) stessa)

$$T_{i+1,j,k} = T_{i,j,k} + A_1(T_{i,j+1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j-1,k}) - A_4(T_{i,j,k} - T_{i,j,k-1}).$$

Con la posizione

$$T_{i,j,k} = \lambda^i \exp[\sqrt{-1}(2\alpha j + \beta k)],$$

si ottiene

$$\lambda = 1 - 4A_1 \sin^2 \alpha - A_4 + A_4(\cos \beta - \sqrt{-1} \sin \beta),$$

da cui

$$|\lambda|^2 = (1 - 4A_1 \sin^2 \alpha - A_4 + A_4 \cos \beta)^2 + A_4^2 \sin^2 \beta,$$

e per la stabilità è richiesto che sia  $|\lambda|^2 < 1$  per  $|\alpha| \leq \pi/2$ ,  $|\beta| \leq \pi$ . Osservando che  $A_1, A_4$  sono positivi (con  $v$ ), la condizione più restrittiva che se ne ricava è

$$(19) \quad 2A_1 + A_4 < 1.$$

Per il modo in cui è dedotta, questa dovrebbe riuscire una condizione soltanto *sufficiente* di stabilità. Alcune prove numeriche hanno confermato la circostanza: ad esempio, lo schema risulta stabile per le seguenti coppie di valori (massimi) di  $A_1, A_4$ : (0.23, 0.70), (0.46, 1.44), (0.58, 4.15), mentre non è stabile per (0.91, 2.89).

È notevole come la stabilità non sia compromessa dalla violazione della (19) soltanto quando il rapporto

$$\frac{A_1}{A_4} = \frac{z}{\rho c_p} \frac{\Delta t}{\Delta z^2}$$

viene mantenuto relativamente piccolo. Se la (19) è rispettata, invece, lo schema riesce invariabilmente stabile.

Infine, è quasi ovvio notare che il rispetto della (19) è garantito dall'espedito di sub-reticolazione descritto in **3**, potendosi prendere grande quanto occorre l'intero arbitrario  $N$ ; e che l'incremento di durata del calcolo indotto da tale espediente può essere verosimilmente tollerato in molti casi per un problema come il presente, che descrive un evento fisicamente breve.

### 5 - Sull'intervento della condizione relativa alla frontiera mobile

Il punto di maggiore interesse del problema esaminato è costituito forse dall'ambiguità che si presenta riguardo alla condizione di scambio termico sulla frontiera mobile (sia tale condizione nella forma adiabatica qui adottata, sia in altra forma più generale). È ben noto che, in casi del genere, la plausibilità fisica di una condizione non ha molta rilevanza ai fini della decisione di farla intervenire nella risoluzione, perchè tale plausibilità può essere neutralizzata da altri aspetti semplificativi del modello (quale, nel caso in esame, la rozza ipotesi sulla forma del fronte mobile). L'incertezza permane passando a considerare il problema sotto il profilo della formulazione analitica: una analisi tendente ad appurare se esso si possa ritenere ben posto non avrebbe molto senso se riferita alla sola equazione della temperatura, scissa dal sistema di cui in realtà fa parte; e le domande relative alla regolarità da esigere per grandezze come le componenti della velocità e dello sforzo non otterrebbero facilmente risposte univoche.

La questione si trasferisce allora sul problema discretizzato, ed è naturale rifarsi a note analisi in cui si è riconosciuta l'opportunità, e si sono discusse le conseguenze, dell'accoglimento di condizioni al contorno sovra-determinanti o addirittura sbagliate per rendere operanti schemi alle differenze finite (cfr. p. es. [2], [3]). A questo ordine di idee può essere ricondotto il presente lavoro; esso può valere come esempio di una condizione al contorno in soprannumero, il cui contributo è reso possibile dall'effetto congiunto di due circostanze: la natura a frontiera mobile del problema, e la esigenza di stabilità di uno schema alle differenze esplicito.

### Bibliografia

- [1] E. ISAACSON and H. B. KELLER, *Analysis of numerical methods* (Ch. 9), Wiley, New York 1966.
- [2] H.-O. KREISS and E. LUNDQUIST, *On difference approximations with wrong boundary conditions*, *Math. Comp.* **22** (1968), 1-12.



- [3] S. V. PARTER, *Stability, convergence and pseudo-stability of finite-difference equations for an over-determined problem*, Numer. Math. **4** (1962), 277-292.
- [4] J. R. A. PEARSON, *Mechanical principles of polymer melt processing*, Pergamon Press, New York 1966.
- [5] P.-C. WU, C. F. HUANG and C. G. GOGOS, *Simulation of the mold-filling process*, Polymer Engineering and Science **14** (1974), 223-230.

#### A b s t r a c t

*An explicit finite difference scheme is proposed and analysed for the heat equation in a particular two-space-dimensional, moving boundary domain. The stability of the scheme is obtained by means of an over-determined formulation of the boundary value problem to be solved.*

\* \* \*

