Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 27-46

F. DAL FABBRO e A. FURIOLI MARTINOLLI (*)

Teoremi di esistenza in grande, nel campo analitico, per il sistema lineare $z_y = x^n A(y) z_x + B(x,y)z + f(x,y)$ (**)

1 - Introduzione

Date due variabili complesse $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, poniamo: $R_\alpha = \{x: |x| < \alpha\}$, $S_\beta(y_0) = \{y: |y - y_0| < \beta\}$, $S_{\gamma,\delta}(y_0) = \{y: \gamma < |y - y_0| < \delta\}$, con $0 < \alpha, \beta, \delta \leqslant +\infty$, $\gamma \geqslant 0$.

Consideriamo, per il seguente sistema lineare nel vettore incognito complesso $z(x, y) = [z_i(x, y)]$ $(i = 1, ..., N)$, il problema di Cauchy

$$
(1) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial y} = x^n A(y) \frac{\partial z}{\partial x} + B(x, y)z + f(x, y), \\ &z(x, \bar{y}) = \varphi(x) \qquad (n \geqslant 1, \text{ intero}; \ \bar{y} \in \Omega), \end{aligned}
$$

nell'ipotesi che la matrice dei coefficienti $A(y) = [a_{ij}(y)]$ $(i, j = 1, ..., N)$ sia analitica in un *aperto Ω connesso di ordine di connessione* (*finito*) *qualsiasi*, la matrice $B(x, y) = [b_{ij}(x, y)]$ e il termine noto $f(x, y) = [f_i(x, y)]$ siano analitici in $R_\alpha \times \Omega$ e infine il dato $\varphi(x) = [\varphi_i(x)]$ sia analitico in R_α.

Partendo dall'osservazione che sulla retta $x = 0$ gli integrali del sistema (1) soddisfano un sistema lineare ordinario a coefficienti e termine noto analitici in Ω e quindi sono essi stessi analitici in tutto Ω, ci siamo posti il problema di stabilire se questa proprietà continua ad essere valida nell'intorno di $x = 0$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Facoltà di Ingegneria, Politecnico, P.za Leonardo da Vinci, 32, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 10-II-1981.

Abbiamo ottenuto che i sistemi del tipo studiato godono della seguente proprietà: *considerata una qualsiasi soluzione, ad ogni aperto limitato* Ω', *con* $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, *è possibile associare un intorno di* $x = 0$, $R_{\alpha(\Omega')}$, *tale che essa sia analitica in* $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$.

Problemi di questo tipo sono stati studiati in precedenti lavori; in [**1**], [**3**] e [**4**] ci si limita a considerare coefficienti e termini noti dotati di singolarità polari e quindi monodromi. Nel presente lavoro, come già in [**2**], parlando di funzioni analitiche si fa riferimento alla definizione di Weierstrass; pertanto coefficienti e termine noto possono presentare, più in generale, *singolarità di tipo qualsiasi e quindi anche polidromie.*

Fissato $\bar{y} \in \Omega$ e, in corrispondenza, rami monodromi dei coefficienti e del termine noto, prendiamo in esame la corrispondente soluzione del problema (1) e ne otteniamo dapprima un teorema di rappresentazione in serie di potenze di x, i cui coefficienti risultano analitici in tutto Ω; determiniamo quindi il campo di analiticità di tale soluzione utilizzando il *metodo delle funzioni maggioranti di Cauchy e la teoria delle caratteristiche* (nel campo analitico). A questo scopo si costruisce un opportuno problema di Cauchy, maggiorante del problema (1) in un intorno di $(0, \bar{y})$; integrando il sistema ordinario delle caratteristiche si studia il campo di analiticità della soluzione maggiorante e, utilizzando il risultato ottenuto per un numero finito di problemi maggioranti del tipo precedente, si dimostra che è possibile prolungare analiticamente la soluzione del problema (1), $\forall y \in \Omega$, in un opportuno intorno $R_{\alpha(y)} \times S_{\beta(y)}(y)$.

Il teorema di Heine-Borel permette infine di concludere che, *per ogni aperto limitato* Ω', *con* $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, *esiste un numero positivo* $\alpha(\Omega')$ *tale che la soluzione sia analitica in* $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$.

Se $n = 1$, vale un risultato più forte nell'ipotesi che i dati $\varphi_i(x)$ siano trascendenti intere e che la matrice $B(x, y)$ e il termine noto $f(x, y)$ siano analitici in $R_\infty \times \Omega$; in tal caso infatti *è possibile prolungare la soluzione in tutto il campo* $R_\infty \times \Omega$ *di analiticità dei coefficienti e del termine noto*, come avviene nel caso dei sistemi lineari ordinari.

Se $n > 1$, nelle stesse ipotesi, *tale prolungamento non è invece possibile in generale*, come mette in luce un semplice esempio di problema di Cauchy del tipo (1) per un'equazione lineare del primo ordine.

Si studia inoltre il seguente *problema di Cauchy*, *singolare* perchè assegnato su $x = 0$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^n A(y) \dfrac{\partial z}{\partial x} + B(x, y)z + f(x, y) \qquad (n \geqslant 1, \text{ intero}), \\ z(0, y) = \psi(y) , \end{cases}$$

nelle stesse ipotesi del problema (1) per le matrici $A(y)$, $B(x, y)$ e il vettore $f(x, y)$. Si ottiene una condizione necessaria per l'esistenza di soluzioni; se tale condizione è soddisfatta, si dimostra l'esistenza di infinite soluzioni analitiche in campi $R_{\alpha(\Omega')}\times\Omega'$, del tipo sopra precisato (e di infinite soluzioni analitiche in $R_\infty\times\Omega$, se $n = 1$ ed $\alpha = +\infty$).

Il presente lavoro generalizza risultati precedenti ottenuti da A. Furioli Martinolli nel caso particolare in cui la matrice $B(x, y)$ non dipenda da x ed inoltre si abbia $n = 1$ ([2]). Tale generalizzazione è stata possibile per la scelta di un diverso procedimento dimostrativo. Infatti in [2] si riesce a determinare il campo di analiticità della soluzione dallo sviluppo in serie di potenze della soluzione di un opportuno problema maggiorante. Questo procedimento non permette di ottenere analoghi risultati nel caso del sistema più generale. Nel presente lavoro, costruito un problema maggiorante analogo al precedente, per superare la difficoltà si utilizza lo studio nel campo complesso del sistema ordinario delle caratteristiche che permette appunto di determinare il campo di analiticità della soluzione.

Ricordiamo infatti che *la possibilità di effettuare il prolungamento analitico è connessa alla natura delle caratteristiche*; tali caratteristiche, diverse a seconda che sia $n = 1$ oppure $n > 1$, determinano il diverso comportamento della soluzione nel caso in cui i dati siano trascendenti intere.

Il loro ruolo essenziale giustifica il fatto che *il sistema* (1) *è caratterizzato dalla particolare forma dei coefficienti delle derivate parziali, mentre i coefficienti delle incognite ed il termine noto sono completamente arbitrari.*

I risultati ottenuti sono precisati dai seguenti teoremi.

Teorema 1 (di rappresentazione). *Siano verificate le seguenti ipotesi:*

(1.1) *la matrice $A(y)$ sia analitica in un aperto Ω connesso di ordine di connessione (finito) qualsiasi, la matrice $B(x, y)$ e il termine noto $f(x, y)$ siano analitici in $R_\alpha\times\Omega$, con $\alpha > 0$, oppure $\alpha = +\infty$;*

(1.2) *il dato $\varphi(x)$ sia analitico in R_α.*

La soluzione del problema (1) *è allora dotata del seguente sviluppo in serie di potenze di x: $z(x, y) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k\, z_k(y)x^k$, dove i coefficienti $z_k(y) = [z_{k,i}(y)]$ $(i = 1, \dots, N)$ sono analitici in tutto Ω, in quanto risolvono i seguenti problemi di Cauchy per equazioni lineari ordinarie (dipendenti da k):*

$$(3) \qquad z_k'(y) = \sum_{0}^{k}{}_l\, B_l(y)z_{k-l}(y) + f_k(y)\,, \quad z_k(\bar{y}) = \varphi_k\,, \quad se\ k=0, 1, \dots, n-1\,,$$

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
&z'_k(y) = (k - n + 1)A(y)z_{k-n+1}(y) + \sum_0^k {}_l\, B_l(y)z_{k-l}(y) + f_k(y) \,, \\
&z_k(\bar{y}) = \varphi_k \,, \qquad se\ k = n, n+1, \ldots
\end{aligned}
$$

(*si è posto*

$$
B_l(y) = [\frac{1}{l!}\,\frac{\partial^l b_{ij}}{\partial x^l}(0, y)],\ f_k(y) = [\frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k f_i}{\partial x^k}(0, y)],\ \varphi_k = [\frac{1}{k!}\,\frac{d^k \varphi_i}{dx^k}(0)] \,,
$$

con $i, j = 1, \ldots, N;\ k, l = 0, 1, \ldots$).

Teorema 2 (di prolungamento). *Nelle stesse ipotesi* (1.1) *e* (1.2) *del Teorema* 1, *sia dato il problema di Cauchy* (1).

Per ogni aperto limitato Ω', *con* $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, *esiste un numero positivo* $\alpha(\Omega')$ *tale che la soluzione sia analitica* (*in generale polidroma*) *in* $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$.

Osservazione 1. Si osserva che, nelle ipotesi del Teorema 2, *non esiste* in generale *un numero positivo* $\alpha(\Omega)$ *tale che la soluzione sia analitica in tutto il campo* $R_{\alpha(\Omega)} \times \Omega$.

Consideriamo infatti, come semplice esempio, il seguente problema di Cauchy

$$
z_y = \frac{x^n}{y}\, z_x \,, \quad z(x, \bar{y}) = \varphi(x) \qquad (n > 1;\ \bar{y} \neq 0) \,,
$$

nell'ipotesi che il dato $\varphi(x)$ sia analitico in R_α, con $\alpha > 0$, oppure $\alpha = +\infty$. La soluzione $z(x, y) = \varphi(x/[1 + (1-n)x^{n-1} \log(y/\bar{y})]^{1/n-1})$ presenta, $\forall y^*$ nel piano forato $S_{0,\infty}(0)$, $y^* \neq \bar{y}$ (per ogni sua fissata determinazione) un punto singolare in (x^*, y^*), dove $x^* = 1/[(n-1)\log(y^*/\bar{y})]^{1/n-1}$; risulta inoltre $\inf \{1/[(n-1)|\log(y/\bar{y})|]^{1/n-1} \colon y \in S_{0,\infty}(0)\} = 0$.

Ne segue che $z(x, y)$ *è dotata di singolarità in* $R_{\alpha(S_{0,\infty}(0))} \times S_{0,\infty}(0)$, *comunque si scelga* $\alpha(S_{0,\infty}(0)) > 0$; essa soddisfa l'enunciato del Teorema 2 (cfr. anche l'Osservazione 5).

Il prossimo teorema stabilisce che, nel caso particolare in cui $n = 1$ ed $\alpha = +\infty$, è invece possibile prolungare analiticamente la soluzione del problema (1) in tutto il campo $R_\infty \times \Omega$.

Teorema 3 (di prolungamento). *Nel caso* $n = 1$, *siano verificate le seguenti ipotesi*:

(3.1) *la matrice* $A(y)$ *sia analitica in un aperto* Ω *connesso di ordine di connessione (finito) qualsiasi, la matrice* $B(x, y)$ *e il termine noto* $f(x, y)$ *siano analitici in* $R_\infty \times \Omega$;

(3.2) *il dato* $\varphi(x)$ *sia analitico in* R_∞.

La soluzione del problema (1) *è allora analitica (in generale polidroma) in tutto il campo* $R_\infty \times \Omega$.

Osservazione 2. È opportuno osservare che *l'ipotesi* $\alpha = +\infty$ *nell'enunciato del Teorema 3 non può essere indebolita* in quanto, nel caso $\alpha > 0$, non vale in generale un risultato analogo, come mostra un semplice esempio.

Considerato il problema di Cauchy

$$z_y = \frac{x}{y} z_x, \qquad z(x, \bar{y}) = \varphi(x) \qquad (\bar{y} \neq 0),$$

nell'ipotesi che il dato $\varphi(x)$ sia analitico in R_α, con $\alpha > 0$, *la soluzione* $z(x, y) = \varphi(xy/\bar{y})$ è analitica per $|xy| < \alpha|\bar{y}|$; essa *non è pertanto prolungabile analiticamente in tutto il campo* $R_\alpha \times S_{0,\infty}(0)$.

Si nota che $z(x, y)$ è invece olomorfa sulla retta singolare $y = 0$; inoltre, fissato comunque un disco $S_\beta(0)$, con $\beta > 0$, è prolungabile analiticamente in $R_{\alpha(\beta)} \times S_\beta(0)$, dove $\alpha(\beta) = \alpha|\bar{y}|/\beta$. Ne segue che, in generale, per ogni aperto limitato Ω' (anche contenente $y = 0$) esiste, in accordo con il Teorema 2, un numero positivo $\alpha(\Omega')$ tale che $z(x, y)$ sia analitica in $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$.

Osservazione 3. Se i coefficienti e il termine noto del sistema (1) presentano nel piano della y una *singolarità* in $y = 0$, dai teoremi 2 e 3 si deducono, per quanto riguarda il *disco forato* $S_{0,\beta}(0)$, i seguenti corollari.

Corollario 1. *Siano verificate le seguenti ipotesi:*

(1.1)' *la matrice* $A(y)$ *sia analitica in un disco forato* $S_{0,\beta}(0)$, *con* $\beta > 0$, *oppure* $\beta = +\infty$; *la matrice* $B(x, y)$ *e il termine noto* $f(x, y)$ *siano analitici in* $R_\alpha \times S_{0,\beta}(0)$, *con* $\alpha > 0$, *oppure* $\alpha = +\infty$;

(1.2) *il dato* $\varphi(x)$ *sia analitico in* R_α.

Assegnato il problema di Cauchy (1), *con* $\bar{y} \in S_{0,\beta}(0)$, *la soluzione è prolungabile in modo da risultare analitica (in generale polidroma) in ogni campo del tipo* $R_{\alpha(\gamma,\delta)} \times S_{\gamma,\delta}(0)$, *dove* γ *e* δ *sono arbitrari, con* $0 < \gamma < \delta < \beta$ *e* $\alpha(\gamma, \delta)$ *è un conveniente numero positivo che dipende da* γ *e* δ.

Corollario 2. *Nel caso* $n = 1$, *siano verificate le seguenti ipotesi:*

(3.1)′ *la matrice* $A(y)$ *sia analitica in un disco forato* $S_{0,\beta}(0)$, *con* $\beta > 0$, *oppure* $\beta = +\infty$; *la matrice* $B(x, y)$ *e il termine noto* $f(x, y)$ *siano analitici in* $R_\infty \times S_{0,\beta}(0)$;

(3.2) *il dato* $\varphi(x)$ *sia analitico in* R_∞.

La soluzione del problema (1), *con* $\bar{y} \in S_{0,\beta}(0)$, *è allora analitica* (*in generale polidroma*) *in tutto il campo* $R_\infty \times S_{0,\beta}(0)$.

Osservazione 4. È opportuno sottolineare che, *se* $n > 1$, *il Teorema* 3 *e, di conseguenza, il Corollario* 2 *non valgono in generale.* Il prossimo teorema fornisce infatti un esempio di problema del tipo (1) (con $n > 1$) la cui soluzione, nelle ipotesi del Corollario 2, con $\beta = +\infty$, non è prolungabile analiticamente in $R_\infty \times \Omega^*$, per nessun aperto $\Omega^* \subseteq S_{0,\infty}(0)$.

Teorema 4. *Si consideri, per la seguente equazione lineare del primo ordine, il problema di Cauchy del tipo* (1)

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^n}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)z + f(x, y)\,, \\[2ex] z(x, \bar{y}) = \varphi(x)\,, \end{cases} \qquad (n > 1,\ \textit{intero};\ \bar{y} \neq 0)$$

nell'ipotesi che il coefficiente $b(x, y)$ *e il termine noto* $f(x, y)$ *siano funzioni analitiche* $\forall (x, y)$, *con* $y \neq 0$ *ed inoltre il dato* $\varphi(x)$ *sia una trascendente intera.*

La soluzione del problema (5) *presenta delle singolarità in* $R_\infty \times \Omega^*$, *qualunque sia l'aperto* $\Omega^* \subseteq S_{0,\infty}(0)$.

Osservazione 5. Nella dimostrazione del Teorema 4 si vede che *la soluzione del problema* (5), $\forall y^* \in S_{0,\infty}(0)$, $y^* \neq \bar{y}$, *presenta* (*per ogni sua fissata determinazione*) *un punto singolare* (x^*, y^*), *dove* $x^* = 1/[(n-1)\log(y^*/\bar{y})]^{1/n-1}$, *e non vi sono altri punti singolari.*
Ne segue che, considerati in particolare *i dischi* $S_\beta(\bar{y})$, *con* $\beta < |\bar{y}|$, la soluzione è prolungabile analiticamente (in accordo con il Teorema 2) in $R_{\alpha(\beta)} \times S_\beta(\bar{y})$, dove per il raggio

$$\alpha(\beta) \overset{\text{def}}{=} \inf\left\{\frac{1}{[(n-1)\,|\log(y/\bar{y})\,|]^{1/n-1}} : y \in \overline{S_\beta(\bar{y})}\right\},$$

facendo riferimento alla determinazione principale delle funzioni che intervengono, valgono le seguenti limitazioni

$$\frac{1}{\{(n-1)[(\log^*(|\bar{y}|-\beta)/|\bar{y}|)^2+(\arcsin \beta/|\bar{y}|)^2]^{1/2}\}^{1/n-1}}$$
$$<\alpha(\beta)\leqslant\frac{1}{[(n-1)\log^*(|\bar{y}|/(|\bar{y}|-\beta))]^{1/n-1}}\,.$$

(Queste disuguaglianze possono essere stabilite in base a semplici considerazioni geometriche).

Prese inoltre in esame *le corone circolari* $S_{\gamma,\delta}(0)$, con $0<\gamma<\delta<+\infty$, la soluzione è prolungabile analiticamente (in accordo con il Corollario 1) in $R_{\alpha(\gamma,\delta)}\times S_{\gamma,\delta}(0)$, dove

$$\alpha(\gamma,\delta)=\inf\left\{\frac{1}{[(n-1)|\log(y/\bar{y})|]^{1/n-1}}:y\in\overline{S_{\gamma,\delta}(0)}\right\}$$
$$=\frac{1}{[(n-1)(\mu^2(\gamma,\delta)+\pi^2)^{1/2}]^{1/n-1}}\,,$$

facendo sempre riferimento alla determinazione principale ed avendo posto $\mu(\gamma,\delta)=\max\{|\log^*(\gamma/|\bar{y}|)|,\ |\log^*(\delta/|\bar{y}|)|\}$.

In generale, considerato *un qualsiasi aperto limitato* Ω', *tale che* $\overline{\Omega'}\subset S_{0,\infty}(0)$, è possibile, in modo analogo, dare una valutazione del raggio $\alpha(\Omega')$ che definisce, come prevede il Teorema 2, il campo $R_{\alpha(\Omega')}\times\Omega'$ di analiticità della soluzione (in generale polidroma). Basta infatti osservare che ogni aperto Ω' del tipo precisato si può sempre pensare come contenuto in una corona circolare $S_{\gamma,\delta}(0)$, con $0<\gamma<\delta<+\infty$ convenienti.

Teorema 5. *Nell'ipotesi* (1.1) *del Teorema* 1, *sia dato il problema singolare di Cauchy* (2). *Tale problema non ammette soluzione se il vettore* $\psi(y)$ *non soddisfa l'equazione lineare ordinaria*

$$\psi'(y)=B(0,y)\psi(y)+f(0,y)\,. \tag{6}$$

Se $\psi(y)$ *è integrale della* (6), *è possibile assegnare il dato iniziale* $z(x,\bar{y})=\varphi(x)$ $\bar{y}\in\Omega$, *in modo largamente (ma non del tutto) arbitrario. Si ottengono in corrispondenza infinite soluzioni analitiche in campi* $R_{\alpha(\Omega')}\times\Omega'$ *del tipo precisato nel Teorema* 2; *se* $n=1$ *ed* $\alpha=+\infty$ *si ottengono anche infinite soluzioni analitiche in* $R_\infty\times\Omega$.

2 – Dimostrazione del Teorema 1. La soluzione del problema (1), analitica in base al teorema di Cauchy-Kowalewski in un conveniente intorno di $(0, \bar{y})$, è ivi dotata del seguente sviluppo in serie di potenze: $z(x, y) = \sum_0^{+\infty}{}_k\, z_k(y) x^k$, dove $z_k(\bar{y}) = \varphi_k$. Si ha pertanto

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sum_0^{+\infty}{}_k\, z_k'(y) x^k\,, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \sum_0^{+\infty}{}_k\, k z_k(y) x^{k-1}$$

$$\left(\Rightarrow x^n \frac{\partial z}{\partial x} = \sum_0^{+\infty}{}_k\, k z_k(y) x^{k+n-1} = \sum_n^{+\infty}{}_k\, (k - n + 1) z_{k-n+1}(y) x^k\right).$$

Osserviamo che in $R_\alpha \times \Omega$ si ha $f(x, y) = \sum_0^{+\infty}{}_k\, f_k(y) x^k$, $B(x, y) = \sum_0^{+\infty}{}_k\, B_k(y) x^k$ e quindi, nell'intorno di $(0, \bar{y})$ sopra considerato,

$$B(x, y) z = \sum_0^{+\infty}{}_k \sum_0^{k}{}_l\, B_l(y) z_{k-l}(y)\, x^k.$$

Sostituendo nel sistema (1) si ottiene allora

$$\sum_0^{+\infty}{}_k\, z_k'(y) x^k \equiv A(y) \sum_n^{+\infty}{}_k\, (k - n+1) z_{k-n+1}(y) x^k + \sum_0^{+\infty}{}_k \sum_0^{k}{}_l\, B_l(y) z_{k-l}(y) x^k + \sum_0^{+\infty}{}_k\, f_k(y) x^k\,,$$

da cui segue (utilizzando il principio di identità delle serie di potenze) che i coefficienti $z_k(y)$ risolvono necessariamente i problemi di Cauchy (3) e (4), per equazioni lineari ordinarie (dipendenti da k). Essi risultano pertanto individuati; inoltre sono analitici in tutto il campo Ω di analiticità dei coefficienti e termini noti delle equazioni lineari ordinarie (3) e (4) (come è immediato verificare procedendo per induzione).

Dimostrazione del Teorema 2. In base al teorema di Cauchy-Kowalewski il problema (1) ammette un'unica soluzione analitica in un conveniente intorno di $(0, \bar{y})$. Partiamo da questo intorno per effettuare il prolungamento analitico, limitandoci per il momento a ragionare nel campo $R_\alpha \times S_\beta(\bar{y})$, dove β è la distanza di $\bar{y}$ dal contorno $\delta\Omega$ di Ω.

Fissati arbitrariamente due numeri positivi $\alpha' < \alpha$ *e* $\beta' < \beta$, osserviamo che al problema (1) è possibile associare il seguente problema maggiorante in $R_{\alpha'} \times S_{\beta'}(\bar{y})$:

$$(7)_1 \quad Z_y = x^n \frac{M}{1-(y-\bar{y})/\beta'} \begin{bmatrix} 11\cdots1 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ 11\cdots1 \end{bmatrix} Z_x + \frac{MM_0}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')} \begin{bmatrix} 11\cdots1 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ 11\cdots1 \end{bmatrix} Z + \frac{MM_0}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')} \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(7)_2 \quad Z(x, \bar{y}) = \Phi(x) \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove $Z(x, y) = [Z_i(x, y)]$ $(i = 1, \dots, N)$; $M = M(\beta')$ e $M_0 = M_0(\alpha', \beta')$ sono opportune costanti; $\Phi(x)$ è una funzione analitica in R_α, maggiorante di tutti i dati $\varphi_i(x)$ (ad esempio, posto $\varphi_i(x) = \sum_0^{+\infty}{}_k \varphi_{ik} x^k$, si può definire $\Phi(x) = \sum_0^{+\infty}{}_k \Phi_k x^k$, con $\Phi_k = \max\{|\varphi_{ik}| : i = 1, \dots, N\}$). Infatti i coefficienti $a_{ij}(y)$, $b_{ij}(x, y)$ e i termini noti $f_i(x, y)$ sono maggiorati in $R_{\alpha'} \times S_{\beta'}(\bar{y})$ rispettivamente da

$$\frac{M_{ij}(\beta')}{1-(y-\bar{y})/\beta'}, \quad \frac{M_{ij}(\alpha', \beta')}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')}, \quad \frac{M_i(\alpha', \beta')}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')},$$

con $M_{ij}(\beta')$, $M_{ij}(\alpha', \beta')$, $M_i(\alpha', \beta')$ opportune costanti; pertanto posto $M = M(\beta') = \max\{M_{ij}(\beta') : i, j = 1, \dots, N\}$, $M_1 = M_1(\alpha', \beta') = \max\{M_{ij}(\alpha', \beta'), M_i(\alpha', \beta') : i, j = 1, \dots, N\}$ e definito $M_0 = M_0(\alpha', \beta') = M_1(\alpha', \beta')/M(\beta')$, si ottiene la forma del problema maggiorante (7).

La soluzione $Z(x, y)$ di tale problema sarà quindi maggiorante della soluzione $z(x, y)$ del problema di partenza (1). Ora è immediato verificare che $Z(x, y)$, analitica sempre per il teorema di Cauchy-Kowalewski in un conveniente intorno di $(0, \bar{y})$, ha tutte le componenti uguali alla funzione $w(x, y)$ che risolve il seguente problema di Cauchy (per un'equazione lineare del primo ordine)

$$(8)_1 \quad w_y = x^n \frac{NM}{1-(y-\bar{y})/\beta'} w_x + \frac{NMM_0}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')} w + \frac{MM_0}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')},$$

$$(8)_2 \quad w(x, \bar{y}) = \Phi(x).$$

Conviene osservare, in vista di successive considerazioni, che, se in particolare la matrice $B(x, y)$ non dipende da x, e inoltre, se anche il termine noto $f(x, y)$ non dipende da x, il problema (8) assume, rispettivamente nei due casi, le seguenti più semplici forme:

$$(9)\quad \begin{aligned} &w_y = x^n \frac{NM}{1-(y-\bar{y})/\beta'} w_x + \frac{NM}{1-(y-\bar{y})/\beta'} w + \frac{MM_0}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')}, \\ &w(x, \bar{y}) = \Phi(x), \end{aligned}$$

$$(10)\quad \begin{aligned} &w_y = x^n \frac{NM}{1-(y-\bar{y})/\beta'} w_x + \frac{NM}{1-(y-\bar{y})/\beta'} w + \frac{M}{1-(y-\bar{y})/\beta'}, \\ &w(x, \bar{y}) = \Phi(x), \end{aligned}$$

dove $M = M(\beta')$ e $M_0 = M_0(\alpha', \beta')$ sono, come sopra, opportune costanti.

Integrando il sistema delle caratteristiche si riesce ad ottenere esplicitamente la soluzione $w(x, y)$ dei problemi (9) e (10) nel caso $n = 1$, del problema (10) nel caso $n > 1$ e quindi a determinarne direttamente in questi casi il campo di analiticità in $R_{\alpha'} \times S_{\beta'}(\bar{y})$; per quanto riguarda il problema (8) e il problema (9) nel caso $n > 1$, si deduce un'espressione integrale di $w(x, y)$ che permette ancora di studiarne il campo di analiticità in $R_{\alpha'} \times S_{\beta'}(\bar{y})$.

Infatti il sistema caratteristico associato al problema (8) è il seguente:

$$(11)_1 \qquad x'(t) = \frac{NM}{1-(y-\bar{y})/\beta'} x^n(t),$$

$$(11)_2 \qquad y'(t) = -1,$$

$$(11)_3 \qquad w'(t) = -\frac{NMM_0}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')} w(t) - \frac{MM_0}{(1-(y-\bar{y})/\beta')(1-x/\alpha')},$$

con le condizioni iniziali: $x(0) = \tau$, $y(0) = \bar{y}$, $w(0) = \Phi(\tau)$.

Ne segue che, *nel caso* $n = 1$, la soluzione del problema (8), in forma parametrica, è data da [1]:

$$(12)_1 \qquad x(t, \tau) = \tau \left(1 + \frac{t}{\beta'}\right)^{NM\beta'},$$

$$(12)_2 \qquad y(t, \tau) = -t + \bar{y},$$

$$(12)_3 \qquad w(t, \tau) = \left[\frac{\alpha' - \tau(1 + t/\beta')^{NM\beta'}}{(1 + t/\beta')^{NM\beta'}}\right]^{M_0} \left\{\frac{\Phi(\tau)}{(\alpha' - \tau)^{M_0}} - M M_0 \alpha' \int_0^t \frac{(1 + u/\beta')^{NMM_0\beta' - 1}}{[\alpha' - \tau(1 + u/\beta')^{NM\beta'}]^{M_0+1}} du\right\}.$$

Tale soluzione può anche essere posta nella forma $w = w(x, y)$, osservato che, esplicitando le prime due delle equazioni (12) rispetto a t e τ, si ha

$$(13) \qquad t(x, y) = \bar{y} - y, \qquad \tau(x, y) = x \left(1 + \frac{\bar{y} - y}{\beta'}\right)^{-NM\beta'}.$$

In modo analogo, integrando i sistemi caratteristici associati ai problemi (9) e (10) (aventi in comune con il sistema (11) le prime due equazioni) con le condizioni iniziali sopra precisate, si ottengono rispettivamente le seguenti soluzioni

$$(14) \qquad w(t, \tau) = \left(1 + \frac{t}{\beta'}\right)^{-NM\beta'} \left[\Phi(\tau) + \frac{M_0 \alpha'}{N\tau} \log \frac{1 - (\tau/\alpha')(1 + t/\beta')^{NM\beta'}}{1 - \tau/\alpha'}\right],$$

$$(15) \qquad w(t, \tau) = \left(1 + \frac{t}{\beta'}\right)^{-NM\beta'} \left[\Phi(\tau) + \frac{1}{N} - \frac{1}{N} \left(1 + \frac{t}{\beta'}\right)^{NM\beta'}\right],$$

dove $t(x, y)$ e $\tau(x, y)$ sono ancora date dalle (13).

Dimostriamo ora che *la soluzione* $w(x, y)$ *di ciascuno dei problemi maggioranti* (8), (9) *o* (10) *è analitica*, $\forall \tilde{\beta} < \beta'$ *fissato, in un intorno* $R_{\alpha(\tilde{\beta})} \times S_{\tilde{\beta}}(\bar{y})$, *con* $\alpha(\tilde{\beta}) < \alpha'$ *conveniente.*

A tale scopo osserviamo che la funzione $w(t, \tau)$, definita dalle $(12)_3$, (14) e (15), è analitica nel campo $\{|t| < \beta'\} \times \{|\tau| < \alpha'/2^{NM\beta'}\}$. (Ivi infatti risulta $|\tau(1 + t/\beta')^{NM\beta'}| < \alpha'$).

---

[1] In questa e nelle successive formule relative alla soluzione del problema (8), (9) o (10) facciamo riferimento alla determinazione principale delle funzioni polidrome che intervengono.

Tenuto inoltre conto che le funzioni $t(x, y)$ e $\tau(x, y)$ sono analitiche in tutto $R_{\alpha'} \times S_{\beta'}(\bar{y})$, si deduce che la soluzione $w(t(x, y), \tau(x, y))$ è analitica nel campo, contenuto in $R_{\alpha'} \times S_{\beta'}(\bar{y})$, immagine inversa secondo la trasformazione (13) di $\{|t| < \beta'\} \times \{|\tau| < \alpha'/2^{NM\beta'}\}$, cioè nel campo

$$\{(x, y) \in R_{\alpha'} \times S_{\beta'}(\bar{y}) \colon |t(x, y)| < \beta', \ |\tau(x, y)| < \frac{\alpha'}{2^{NM\beta'}}$$

$$= \{(x, y) \colon |x| < \alpha', \ |y - \bar{y}| < \beta', \ |x| < \frac{\alpha'}{2^{NM\beta'}} \left|1 + \frac{\bar{y} - y}{\beta'}\right|^{NM\beta'}\} .$$

Ne segue che, $\forall \tilde{\beta} < \beta'$ *fissato*, esiste in corrispondenza $\alpha(\tilde{\beta}) < \alpha'$ tale che $w(x, y)$ sia analitica in $R_{\alpha(\tilde{\beta})} \times S_{\tilde{\beta}}(\bar{y})$; precisamente risulta

$$(16) \qquad \alpha(\tilde{\beta}) = \inf \left\{\frac{\alpha'}{2^{NM\beta'}} \left|\frac{(\beta' + \bar{y}) - y}{\beta'}\right|^{NM\beta'} \colon y \in \overline{S_{\tilde{\beta}}(\bar{y})}\right\} = \alpha' \left(\frac{\beta' - \tilde{\beta}}{2\beta'}\right)^{NM\beta'} .$$

Veniamo ora al *caso* $n > 1$.

Integrando il sistema (11) con le condizioni iniziali precisate, si ottiene per la soluzione del problema (8) la seguente forma parametrica

$$(17)_1 \qquad x(t, \tau) = \frac{\tau}{[1 + (1 - n) NM\beta' \tau^{n-1} \log(1 + t/\beta')]^{1/n-1}} ,$$

$$(17)_2 \qquad y(t, \tau) = -t + \bar{y} ,$$

$$(17)_3 \qquad w(t, \tau) = \left(1 + \frac{t}{\beta'}\right)^{-NM_1\beta'} \exp\left[-NM_1\tau \int_0^t \frac{du}{(1 + u/\beta')(\alpha' d(u, \tau) - \tau)}\right]$$

$$\{\Phi(\tau) - M_1\alpha' \int_0^t \left(1 + \frac{u}{\beta'}\right)^{NM_1\beta' - 1} \frac{d(u, \tau)}{\alpha' d(u, \tau) - \tau}$$

$$\exp\left[NM_1\tau \int_0^u \frac{dv}{(1 + v/\beta')(\alpha' d(v, \tau) - \tau)}\right] du\} ,$$

dove si è usata, per brevità, la notazione

$$d(t, \tau) = \left[1 + (1 - n) NM\beta' \tau^{n-1} \log\left(1 + \frac{t}{\beta'}\right)\right]^{1/n-1}$$

e, come abbiamo precedentemente definito, $M_1 = MM_0$.

La soluzione del problema (8) può anche essere posta nella forma $w = w(x, y)$, osservato che, esplicitando le prime due delle equazioni (17) rispetto a t e τ, si ha

$$(18)\quad t(x, y) = \bar{y} - y, \quad \tau(x, y) = \frac{x}{[1+(n-1)\,NM\beta' x^{n-1}\log(1+(\bar{y}-y)/\beta')]^{1/n-1}}\,.$$

In modo analogo, integrando i sistemi caratteristici associati ai problemi (9) e (10) (aventi in comune con il sistema (11) le prime due equazioni) con le condizioni iniziali precisate, si ottengono rispettivamente le seguenti soluzioni:

$$(19)\quad w(t, \tau) = (1+\frac{t}{\beta'})^{-NM\beta'}\,[\Phi(\tau) + \frac{M_0}{N} - \frac{M_0}{N}\,(1+\frac{t}{\beta'})^{NM\beta'}$$

$$- MM_0\tau\int_0^t \frac{(1+u/\beta')^{NM\beta'-1}}{\alpha'\,d(u, \tau) - \tau}\,du]\,,$$

$$(20)\quad w(t, \tau) = (1+\frac{t}{\beta'})^{-NM\beta'}\,[\Phi(\tau) + \frac{1}{N} - \frac{1}{N}\,(1+\frac{t}{\beta'})^{NM\beta'}]\,,$$

dove $t(x, y)$ e $\tau(x, y)$ sono ancora date dalle (18).

Dimostriamo ora che, *come nel caso* $n = 1$, *la soluzione* $w(x, y)$ *di ciascuno dei problemi maggioranti* (8), (9) *o* (10) *è analitica*, $\forall\tilde{\beta} < \beta'$ *fissato, in un intorno* $R_{\alpha(\tilde{\beta})}\times S_{\tilde{\beta}}(\bar{y})$, *con* $\alpha(\tilde{\beta}) < \alpha'$ *conveniente.*

Infatti la funzione $w(t, \tau)$ definita dalle $(17)_3$, (19) e (20), $\forall\tilde{\beta} < \beta'$, è analitica nel campo $\{|t| < \tilde{\beta}\}\times\{|\tau| < \alpha_1(\tilde{\beta})\}$, dove

$$\alpha_1(\tilde{\beta}) = \frac{1}{\{1/(\alpha')^{n-1} + (n-1)NM\beta'[(\log^*((\beta'-\tilde{\beta})/\beta'))^2 + (\arcsin(\tilde{\beta}/\beta'))^2]^{1/2}\}^{1/n-1}}$$

$$< \inf\Big\{\frac{1}{[(n-1)NM\beta'\,|\log(1+t/\beta')|]^{1/n-1}}\,,$$

$$\frac{1}{|1/(\alpha')^{n-1} + (n-1)NM\beta'\log(1+t/\beta')|^{1/n-1}} : |t| \leqslant \tilde{\beta}\Big\}\,.$$

(Valgono infatti in tale intorno le disuguaglianze: $|\tau| < \alpha'$, $|\mathrm{d}(t, \tau)| > 0$, $|d(t, \tau)| > |\tau|/\alpha'$, come si può facilmente verificare).

Si osserva inoltre che le funzioni $t(x, y)$ e $\tau(x, y)$, $\forall\tilde{\beta} < \beta'$, sono analitiche in $R_{\alpha_2(\tilde{\beta})} \times S_{\tilde{\beta}}(\bar{y})$, dove

$$\alpha_2(\tilde{\beta}) = \frac{1}{\{(n-1)NM\beta'[(\log^*((\beta'-\tilde{\beta})/\beta'))^2 + (\arcsin(\tilde{\beta}/\beta'))^2]^{1/2}\}^{1/n-1}}$$

$$< \inf\left\{ \frac{1}{[(n-1)NM\beta'|\log(1+(\bar{y}-y)/\beta')|]^{1/n-1}} : y \in \overline{S_{\tilde{\beta}}(\bar{y})} \right\}.$$

Ne segue che la soluzione $w(t(x, y), \tau(x, y))$, $\forall\tilde{\beta} < \beta'$, è analitica nel campo, contenuto in $R_{\alpha_2(\tilde{\beta})} \times S_{\tilde{\beta}}(\bar{y})$, immagine inversa secondo la trasformazione (18) di $\{|t| < \tilde{\beta}\} \times \{|\tau| < \alpha_1(\tilde{\beta})\}$ e cioè nel campo

$$\{(x, y) \in R_{\alpha_2(\tilde{\beta})} \times S_{\tilde{\beta}}(\bar{y}) : |t(x, y)| < \tilde{\beta}, |\tau(x, y)| < \alpha_1(\tilde{\beta})\}$$

$$= \{(x, y) : |x| < \alpha_2(\tilde{\beta}), |y - \bar{y}| < \tilde{\beta},$$

$$|x| < \alpha_1(\tilde{\beta})|1 + (n-1)NM\beta' x^{n-1}\log(1 + \frac{\bar{y}-y}{\beta'})|^{1/n-1}\}. \tag{21}$$

Si osserva infine che tale campo contiene l'intorno $R_{\alpha(\tilde{\beta})} \times S_{\tilde{\beta}}(\bar{y})$ con

$$\alpha(\tilde{\beta}) = \frac{\alpha'\alpha_2(\tilde{\beta})}{[\alpha_2(\tilde{\beta})^{n-1} + 2(\alpha')^{n-1}]^{1/n-1}} \ (< \alpha'). \tag{22}$$

(Infatti risulta $\alpha(\tilde{\beta}) < \alpha_2(\tilde{\beta})$; inoltre la relazione (21) è certamente verificata in $(0, y)$, $\forall y \in S_{\tilde{\beta}}(\bar{y})$; per $0 < |x| < \alpha(\tilde{\beta})$, $|y - \bar{y}| < \tilde{\beta}$, si ha

$$\left|\frac{1}{x^{n-1}} + (n-1)NM\beta'\log(1 + \frac{\bar{y}-y}{\beta'})\right|$$

$$\geqslant \left|\frac{1}{|x|^{n-1}} - (n-1)NM\beta'\left|\log(1 + \frac{\bar{y}-y}{\beta'})\right|\right|$$

$$> \left|\frac{1}{\alpha(\tilde{\beta})^{n-1}} - \frac{1}{\alpha_2(\tilde{\beta})^{n-1}}\right| = \frac{1}{(\alpha')^{n-1}} + \frac{1}{\alpha_2(\tilde{\beta})^{n-1}} = \frac{1}{\alpha_1(\tilde{\beta})^{n-1}}).$$

Si può pertanto concludere che, *sia nel caso* $n = 1$ *come* $n > 1$, la soluzione $z(x, y)$ del problema di partenza (1) è anch'essa analitica, $\forall\tilde{\beta} < \beta'$, nell'intorno $R_{\alpha(\tilde{\beta})} \times S_{\tilde{\beta}}(\bar{y})$, dove il raggio $\alpha(\tilde{\beta})$ è dato dalle (16) e (22), rispettivamente nei due casi.

Dall'arbitrarietà di $\beta' < \beta$ segue inoltre che, *fissato comunque* $\tilde{\beta} < \beta$, *la soluzione* $z(x, y)$ *è analitica in un intorno* $R_{\alpha(\tilde{\beta})} \times S_{\tilde{\beta}}(\bar{y})$, *con* $\alpha(\tilde{\beta}) < \alpha$ *conveniente.*

Prendiamo ora in esame *l'aperto* Ω' di cui si parla nell'enunciato, supponendo dapprima che esso sia *semplicemente connesso* (*insieme a* $\bar{\Omega}'$); qualora Ω' non contenga $\bar{y}$, possiamo prolungarlo in un aperto limitato, che indichiamo ancora con lo stesso simbolo Ω', semplicemente connesso (insieme a $\bar{\Omega}'$), contenente $\bar{y}$ e inoltre tale che $\bar{\Omega}' \subset \Omega$.

Considerato un *punto qualsiasi* $y^* \in \bar{\Omega}'$ e detta β^* la distanza di y^* dal contorno $\delta\Omega$ di Ω, dimostriamo che, $\forall \tilde{\beta}^* < \beta^*$, *la soluzione* $z(x, y)$ *del problema* (1) *è prolungabile analiticamente in un intorno* $R_{\alpha(\tilde{\beta}^*)} \times S_{\tilde{\beta}^*}(y^*)$, *con* $\alpha(\tilde{\beta}^*) < \alpha$ *conveniente.*

Infatti, essendo $\bar{\Omega}'$ connesso, è possibile congiungere $\bar{y}$ ad y^* con una linea $\Gamma \subset \bar{\Omega}'$ generalmente regolare.

Ricopriamo Γ con un numero finito di cerchi $S_{\tilde{\beta}_1}(y_1 = \bar{y})$, $S_{\tilde{\beta}_2}(y_2)$, ..., $S_{\tilde{\beta}_L = \tilde{\beta}^*}(y_L = y^*)$, aventi i centri su Γ, tali che ciascuno contenga il centro del successivo ed inoltre risulti, $\forall l = 1, \ldots, L$, $\tilde{\beta}_l < \beta_l$, avendo indicato con β_l la distanza di y_l da $\delta\Omega$.

Assegnato il nuovo problema di Cauchy con dato $z(x, y_2)$ analitico in $R_{\alpha(\tilde{\beta}_1)}$ essendo $y_2 \in S_{\tilde{\beta}_1}(\bar{y})$), si ottiene che la soluzione $z(x, y)$ del problema (1) è prolungabile analiticamente in $R_{\alpha(\tilde{\beta}_2)} \times \{S_{\tilde{\beta}_1}(\bar{y}) \cup S_{\tilde{\beta}_2}(y_2)\}$, con $\alpha(\tilde{\beta}_2) < \alpha(\tilde{\beta}_1) < \alpha$ conveniente.

Considerando successivamente gli $(L-1)$ problemi di Cauchy con dati $z(x, y_l)$ analitici in $R_{\alpha(\tilde{\beta}_{l-1})}$ $(l = 2, \ldots, L)$, si riesce a prolungare analiticamente la soluzione $z(x, y)$ nel campo $R_{\alpha(\tilde{\beta}^*)} \times \{\bigcup_{l=1}^{L} S_{\tilde{\beta}_l}(y_l)\}$ (con $\alpha(\tilde{\beta}^*) < \alpha$ conveniente) che contiene in particolare l'intorno $R_{\alpha(\tilde{\beta}^*)} \times S_{\tilde{\beta}^*}(y^*)$.

Osserviamo che, *essendo* $\bar{\Omega}'$ *semplicemente connesso, tale prolungamento di* $z(x, y)$ *nell'intorno di* $(0, y^*)$ *è indipendente dalla scelta della* linea $\Gamma \subset \bar{\Omega}'$ generalmente regolare, congiungente $\bar{y}$ ad y^* (cfr. [**5**], Cap. 1, § 6, p. 43).

Associamo quindi ad ogni $y^* \in \bar{\Omega}'$ l'intorno $R_{\alpha(\tilde{\beta}^*)} \times S_{\tilde{\beta}^*}(y^*)$.

Dimostriamo ora che *esiste un numero positivo* $\alpha(\Omega') < \alpha$, *dipendente da* Ω', *tale che* $z(x, y)$ *sia prolungabile analiticamente in* $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$. Si osserva infatti che la famiglia di intorni $\{S_{\tilde{\beta}^*}(y^*) \colon y^* \in \bar{\Omega}'\}$ costituisce una copertura aperta di $\bar{\Omega}'$ e quindi, in base al teorema di Heine-Borel, da essa è possibile estrarre una sotto-copertura finita $\{S_{\tilde{\beta}_p}(y_p) \colon p = 1, \ldots, P\}$.

Posto $\alpha(\Omega') = \min \{\alpha(\tilde{\beta}_p) \colon p = 1, \ldots, P\}$, si deduce l'analiticità di $z(x, y)$ in $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$.

Sia ora *l'aperto* Ω' *molteplicemente connesso.*

Nel caso in cui Ω' non contenga $\bar{y}$ oppure abbia ordine di connessione infinito è sempre possibile estendere Ω' ad un aperto limitato (che indichiamo ancora con lo stesso simbolo Ω'), di ordine di connessione finito ($\leqslant$ dell'ordine di connessione di Ω), che contenga $\bar{y}$ ed inoltre verifichi $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.

Detto $m(\geqslant 2)$ l'ordine di connessione di Ω', si può allora pensare Ω' come unione di $(m-1)$ (se $m \geqslant 3$, 2 se $m=2$) aperti limitati Ω'_s, semplicemente connessi (insieme a $\overline{\Omega'_s}$), tutti contenenti $\bar{y}$ e tali che $\overline{\Omega'_s} \subset \Omega$. Per quanto abbiamo visto sopra, ad ogni aperto Ω'_s si può associare un raggio $\alpha(\Omega'_s)$ tale che la soluzione $z(x, y)$ del problema (1) sia analitica e monodroma in $R_{\alpha(\Omega'_s)} \times \Omega'_s$.

Posto $\alpha(\Omega') = \min\limits_s \{\alpha(\Omega'_s)\}$, si conclude che $z(x, y)$ *è analitica secondo Weierstrass, in generale polidroma, in* $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$.

Dimostrazione del Teorema 3. Nella dimostrazione del Teorema 2 abbiamo già fatto notare che, *nel caso* $n=1$, la soluzione maggiorante $w(x, y)$ è analitica, $\forall \tilde{\beta} < \beta'$ *fissato*, in $R_{\alpha(\tilde{\beta})} \times S_{\tilde{\beta}}(\bar{y})$, dove $\alpha(\tilde{\beta}) = \alpha'\big((\beta' - \tilde{\beta})/2\beta'\big)^{NM\beta'}$ (cfr. (16)).

Essendo ora per ipotesi $\alpha = +\infty$, al problema di partenza (1) è possibile associare problemi maggioranti del tipo (8), (9) o (10) *con* α' *arbitrario* e $\beta' < \beta$ fissato.

Si ottiene pertanto che la soluzione $z(x, y)$ del problema (1) è analitica, $\forall \tilde{\beta} < \beta'$, in $R_{\alpha(\tilde{\beta})} \times S_{\tilde{\beta}}(\bar{y})$, dove nell'espressione sopra precisata di $\alpha(\tilde{\beta})$ si ha α' arbitrario. Ne segue, data l'indipendenza dell'esponente $NM\beta'$ da α' $\big(M = M(\beta')\big)$, che $z(x, y)$ è analitica in $R_\infty \times S_{\tilde{\beta}}(\bar{y})$ e quindi in $R_\infty \times S_{\beta'}(\bar{y})$.

Dall'arbitrarietà di $\beta' < \beta$ si deduce infine che $z(x, y)$ è analitica in tutto il campo $R_\infty \times S_\beta(\bar{y})$.

Prendiamo ora in esame *l'aperto* Ω, supponendo dapprima che esso sia *semplicemente connesso.*

Consideriamo un *punto qualsiasi* $y^* \in \Omega$ e, detta β^* la distanza di y^* dal contorno $\delta\Omega$ di Ω, dimostriamo che $z(x, y)$ *è prolungabile analiticamente in* $R_\infty \times S_{\beta^*}(y^*)$.

A questo scopo, in modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione del Teorema 2, congiungiamo $\bar{y}$ ad y^* con una linea Γ generalmente regolare, contenuta in Ω e ricopriamo Γ con un numero finito di cerchi $S_{\beta_1 = \beta}(y_1 = \bar{y})$ $S_{\beta_2}(y_2), \ldots, S_{\beta_L = \beta^*}(y_L = y^*)$, aventi i centri su Γ, raggi uguali alla distanza dei centri da $\delta\Omega$ e tali che ciascuno contenga il centro del successivo.

Considerati gli L problemi di Cauchy che si ottengono assumendo successivamente come dati i vettori $z(x, y_l)$ $(l = 1, \ldots, L)$, tutti analitici in R_∞, si stabilisce che la soluzione $z(x, y)$ del problema di partenza (1) è prolungabile analiticamente nel campo $R_\infty \times \{\bigcup\limits_{l=1}^{L} S_{\beta_l}(y_l)\}$, che contiene in particolare l'intorno $R_\infty \times S_{\beta^*}(y^*)$.

Se ne deduce immediatamente che, essendo Ω semplicemente connesso, *la soluzione* $z(x, y)$ *è analitica e monodroma in tutto* $R_\infty \times \Omega$.

Sia ora *l'aperto* Ω *di ordine di connessione* $m(\geqslant 2)$. È possibile in questo caso ricoprire Ω con $(m-1)$ (se $m \geqslant 3$, 2 se $m = 2$) aperti $\Omega_s \subset \Omega$ semplicemente connessi, contenenti $\bar{y}$. Per quanto visto sopra la soluzione $z(x, y)$ del problema (1) è allora prolungabile in modo da risultare analitica e monodroma in ciascun campo $R_\infty \times \Omega_s$. Ne segue che *$z(x, y)$ è analitica nel senso di Weierstrass, in generale polidroma, in tutto $R_\infty \times \Omega$.*

Dimostrazione del Teorema 4. Per determinare il campo di analiticità della soluzione del problema di Cauchy (5) integriamo il sistema caratteristico associato

$$x'(t) = \frac{1}{y} x^n(t)\,, \qquad y'(t) = -1\,, \qquad z'(t) = -b(x, y)z(t) - f(x, y)\,,$$

con le condizioni iniziali $x(0) = \tau$, $y(0) = \bar{y}$, $z(0) = \varphi(\tau)$.

Si ottiene per la soluzione la seguente forma parametrica (con riferimento alla determinazione principale del logaritmo):

$$(23)_1 \qquad x(t, \tau) = \frac{\tau}{[1 + (n-1)\tau^{n-1} \log(1 - t/\bar{y})]^{1/n-1}}\,,$$

$$(23)_2 \qquad y(t, \tau) = -t + \bar{y}\,,$$

$$(23)_3 \qquad z(t, \tau) = \exp[-\int_0^t \hat{b}(u, \tau)\,du]\{\varphi(\tau) - \int_0^t \hat{f}(u, \tau) \exp[\int_0^u \hat{b}(v, \tau)\,dv]\,du\}\,,$$

avendo usato, per brevità, la notazione $\hat{b}(t, \tau) = b\big(x(t, \tau), y(t, \tau)\big)$, $\hat{f}(t, \tau) = f\big(x(t, \tau), y(t, \tau)\big)$.

Tale soluzione può anche essere posta nella forma $z = z(x, y)$, osservato che, esplicitando le prime due delle equazioni (23) rispetto a t e τ, si ha

$$(24) \qquad t(x, y) = \bar{y} - y\,, \qquad \tau(x, y) = \frac{x}{[1 + (1-n)x^{n-1} \log(y/\bar{y})]^{1/n-1}}\,.$$

Studiamo dapprima il campo di analiticità della funzione $z(t, \tau)$. A questo scopo ricordiamo che per ipotesi il coefficiente $b(x, y)$ e il termine noto $f(x, y)$ sono analitici $\forall(x, y)$, con $y \neq 0$; ne segue che le funzioni $\hat{b}(t, \tau)$ e $\hat{f}(t, \tau)$ sono analitiche nel campo $\{(t, \tau): t \neq \bar{y}, 1 + (n-1)\tau^{n-1} \log(1 - t/\bar{y}) \neq 0\}$.

Nello stesso campo sarà analitica anche la funzione $z(t, \tau)$, essendo per ipotesi $\varphi(\tau)$ una trascendente intera.

Tenuto inoltre conto che le funzioni $t(x, y)$ e $\tau(x, y)$ sono analitiche nel campo $\{(x, y): y \neq 0, 1 + (1-n)x^{n-1} \log(y/\bar{y}) \neq 0\}$, si deduce che il campo di analiticità della soluzione $z(x, y)$, in generale polidroma, coincide con quello delle funzioni $t(x, y)$e $\tau(x, y)$ appena definito. (Si osserva infatti che l'immagine inversa secondo la trasformazione (24) del campo di analiticità della $z(t, \tau)$ coincide con lo stesso campo di analiticità delle $t(x, y)$ e $\tau(x, y)$).

Ne segue che $\forall y^* \in S_{0,\infty}(0)$, $y^* \neq \bar{y}$, la soluzione $z(x, y)$ presenta un punto singolare (x^*, y^*), con $x^* = 1/[(n-1) \log (y^*/\bar{y})]^{1/n-1}$, donde la tesi.

Dimostrazione del Teorema 5. Sia $z(x, y)$ una soluzione del problema singolare (2); dall'equazione (1) in cui si ponga $x = 0$ segue allora che il dato $\psi(y)$ soddisfa necessariamente l'equazione lineare ordinaria (6).

Ricordiamo che per ipotesi la matrice $B(x, y)$ e il termine noto $f(x, y)$ sono analitici in $R_\alpha \times \Omega$; se ne deduce che il vettore $\psi(y)$, in quanto risolve un'equazione lineare ordinaria a coefficiente e termine noto analitici in Ω, è anch'esso analitico in tutto Ω.

Fissato ora un punto $\bar{y} \in \Omega$, definiamo un vettore $\varphi(x) = \sum_{k\,0}^{+\infty} z_{k0} x^k$, con i coefficienti $z_{k0} = [z_{k0,i}]$ $(i = 1, \ldots, N)$ soggetti alle sole condizioni che risulti $\varphi(0) = z_{00} = \psi(\bar{y})$ ed inoltre la serie converga in R_α.

Considerato quindi il problema di Cauchy (1) con il dato $z(x, \bar{y}) = \varphi(x)$ appena definito, esso ammette un'unica soluzione $z(x, y)$ prolungabile analiticamente, in base al Teorema 2, in ogni campo $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$ del tipo ivi precisato.

Dimostriamo che tale soluzione soddisfa anche il problema singolare (2). A questo scopo osserviamo che, in un conveniente intorno di $(0, \bar{y})$, essa è sviluppabile in serie doppia di potenze

$$z(x, y) = \sum_{k,n\,0}^{+\infty} z_{kn} x^k (y - \bar{y})^n .$$

Considerata la funzione $z(0, y) = \sum_{n\,0}^{+\infty} z_{0n}(y - \bar{y})^n$, essa è analitica in tutto Ω, in base al Teorema 1 e risolve necessariamente l'equazione (6); è immediato ora constatare che risulta $z(0, y) \equiv \psi(y)$ in Ω. Infatti $z(0, y)$ e $\psi(y)$ sono entrambe soluzioni, per l'equazione lineare ordinaria (6), dello stesso problema di Cauchy $z(0, \bar{y}) = z_{00} = \psi(\bar{y})$.

Dall'arbitrarietà con cui si è costruito il vettore $\varphi(x)$ segue l'esistenza di infinite soluzioni per il problema (2), analitiche (in generale polidrome) in campi $R_{\alpha(\Omega')} \times \Omega'$ del tipo precisato nel Teorema 2.

Se $n = 1$ ed $\alpha = +\infty$ a queste si aggiungono le infinite soluzioni analitiche (in generale polidrome) in $R_\infty \times \Omega$, ottenute partendo da dati iniziali $z(x, \bar{y}) = \varphi(x)$ analitici in R_∞ e soddisfacenti la sola condizione $z(0, \bar{y}) = \varphi(0) = \psi(\bar{y})$.

Bibliografia

[1] F. Dal Fabbro e A. Furioli Martinolli: [•]$_1$ *Sull'analiticità delle soluzioni di alcune equazioni differenziali a derivate parziali nell'intorno di punti singolari*, (I) e (II), Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **111** (1977), 281-295 e A **113** (1979), 18-44; [•]$_2$ *Analisi delle soluzioni di un'equazione differenziale a derivate parziali del tipo ipergeometrico rispetto ad una variabile*, (I) e (II), Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **112** (1978), 246-260 e A **114** (1980).

[2] A. Furioli Martinolli, *Teoremi di esistenza in grande delle soluzioni di problemi di Cauchy per il sistema lineare* $\partial z_i/\partial y = \sum_{1}^{N} {}_j \{x a_{ij}(y)(\partial z_j/\partial x) + b_{ij}(y) z_j\} + c_i(x, y)$ $(i = 1, \ldots, N)$, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **8** (1982), 135-147.

[3] J. Kajiwara: [•]$_1$ *Some systems of partial differential equations in the theory of soil mechanics*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. (A) **24** (1970), 147-230; [•]$_2$ *Some systems of partial differential equations in complex domains*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. (A) **25** (1971), 21-143; [•]$_3$ *Cauchy-Kowalewski theorem for a partial differential equation of mixed type*, RNMTAN (VI) **6** (1973), 183-192; [•]$_4$ *On a holomorphic solution of a singular partial differential equation with many simple poles*, Czechoslovak Math. J. **24** (99), 1974, 359-368; [•]$_5$ *Holomorphic solutions of singular Darboux problems*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **1** (1975), 17-31.

[4] M. L. Ricci, *Soluzioni quasi-periodiche di un'equazione a derivate parziali del tipo di Fuchs*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **73** (1966), 367-404.

[5] V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of functions of many complex variables*, The M.I.T. Press 1966.

Summary

Let us consider, the following Cauchy-problem for a linear system of partial differential equations

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^n A(y)\frac{\partial z}{\partial x} + B(x, y) z + f(x, y)\,, \qquad z(x, \bar{y}) = \varphi(x) \qquad (n \geqslant 1,\ \text{integer};\ \bar{y} \in \Omega)\,,$$

where x, y are complex variables and $z(x, y)$ is the complex, unknown vector. The matrix $A(y)$ is analytic in some open, simply or multiply-connected region Ω, the matrix $B(x, y)$ and the vector $f(x, y)$ are analytic in an open region $\{(x, y)\colon |x| < \alpha,\ y \in \Omega\}$ ($\alpha > 0$ or $\alpha = +\infty$). The initial datum $\varphi(x)$ is analytic in the open disk $\{|x| < \alpha\}$.

When referring to analytic functions we mean the Weierstrass' definition; therefore the coefficients and the known terms may have singularities of any type, even branch-points.

We investigate the analytic continuation of the solution of the above problem starting from the neighborhood of $(0, \bar{y})$, where it exists according to the Cauchy-Kowalewski theorem.

By using the method of majorants and the theory of characteristic curves we prove two analytic-continuation theorems. Our results stress the following analogies between solutions

of the above system and of ordinary linear differential equation systems: (1) *given an arbitrary solution* $z(x, y)$, *in correspondence to every open bounded set* Ω', *with* $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, *a neighborhood of* $x = 0$, $\{|x| < \alpha(\Omega')\}$, *can be found such that* $z(x, y)$ *is analytic in the open region* $\{(x, y): |x| < \alpha(\Omega'), y \in \Omega'\}$; (2) *if* $n = 1$, $B(x, y)$ *and* $f(x, y)$ *are analytic in the cylinder* $\{(x, y): y \in \Omega\}$ *and if the initial data are analytic* $\forall x$, *then also the solutions are analytic everywhere in the cylinder.*

We consider also the following singular Cauchy-problem

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^n A(y) \frac{\partial z}{\partial x} + B(x, y) z + f(x, y) \qquad (n \geqslant 1, \ \textit{integer}) , \qquad z(0, y) = \psi(y) ,$$

under the same hypotheses for $A(y)$, $B(x, y)$ *and* $f(x, y)$.

We give a necessary condition for the existence of solutions; if it is satisfied, we prove the set of solutions is infinite.

* * *