Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 77-85

DANIELA MONTEVERDI (*)

Funtori biaggiunti in categorie dell'ordine (**)

1 - Introduzione

Nella nota « Doppie aggiunzioni e funtori biaggiunti » [2] C. Reggiani introduce il concetto di « coppia di funtori $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$: $A \to B$ biaggiunti » e osserva che non ogni biaggiunzione è sottogiacente ad una doppia aggiunzione. Per chiarire, si chiamerà *quadrupla* ogni quaterna $\mathfrak{Q} = (A, B, \mathscr{F}, \mathscr{G})$ con $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$: $A \to B$ e $\mathscr{F} \dashv\vdash \mathscr{G}$ ($\mathscr{F}$ biaggiunto di $\mathscr{G}$). Si chiamerà *quadrupla speciale* (abbreviato q.s.) una quadrupla tale che esiste un funtore $\mathscr{H}$: $B \to A$ con $\mathscr{F} \dashv \mathscr{H} \dashv \mathscr{G}$; si dirà anche che $\mathscr{H}$ è un funtore di ritorno per $\mathfrak{Q}$. L'affermazione precedente si traduce allora nel fatto che non ogni quadrupla è una q.s. Il problema che si vuole indagare è se, tuttavia, ogni quadrupla sia « immergibile » in una q.s. Nella presente nota si affronta la questione per quanto riguarda le categorie dell'ordine e si dimostra che il problema, almeno in questo caso, ammette soluzioni. Più precisamente, data una quadrupla $\mathfrak{Q} = (A, B, f, g)$ dell'ordine (cioè con A e B categorie dell'ordine) è possibile estenderla ad una q.s. dell'ordine $Q_* = (A_*, B_*, f_*, g_*)$. Si fornisce dapprima una costruzione per $\mathfrak{Q}_*$. Si mostra poi, attraverso un esempio, che tale costruzione non costituisce l'unica soluzione del problema; si pone allora la questione dell'esistenza di una soluzione universale. Anche a tale questione si risponde positivamente, fornendo una costruzione $\mathfrak{Q}^*$, ottenuta da $\mathfrak{Q}_*$ con alcune semplici modifiche.

2 - Premesse

D'ora in poi con « quadrupla » si intenderà sempre « quadrupla dell'ordine ».

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 10-III-1981.

Osservazione 2.1. Data una quadrupla $\mathcal{Q} = (A, B, f, g)$ essa può essere una q.s. in un solo modo, cioè è unico, se esiste, il funtore di ritorno $h: B \to A$.

Osservazione 2.2. Se $\mathcal{Q} = (A, B, f, g)$ è una quadrupla, allora per ogni $a, c \in A$ e per ogni $b \in B$ si ha

$$f(a) \leqslant b \quad \text{se e solo se } \forall x \in A \ \big(b \leqslant g(x) \Rightarrow a \leqslant x\big)\,, \tag{1}$$

$$b \leqslant g(c) \quad \text{se e solo se } \forall x \in A \ \big(f(x) \leqslant b \Rightarrow x \leqslant c\big)\,. \tag{2}$$

Da (1), o indifferentemente da (2), segue

$$\forall a, a' \in A \quad \big(f(a) \leqslant g(a') \Rightarrow a \leqslant a'\big)\,. \tag{3}$$

Def. 2.1. Date le quadruple $\mathcal{Q} = (A, B, f, g)$ e $\mathcal{Q}' = (A', B', f', g')$ si dice che una coppia $k = (k_1, k_2)$ è un *morfismo da* $\mathcal{Q}$ *a* $\mathcal{Q}'$, e si scrive $k: \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$, se $k_1: A \to A'$ e $k_2: B \to B'$ sono crescenti, e

$$k_2 f = f' k_1\,, \qquad k_2 g = g' k_1\,. \tag{4}$$

Si noti che se $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono q.s. (con funtori di ritorno h e h' rispettivamente) un morfismo di quadruple $(k_1, k_2): \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ conserva anche il funtore di ritorno, cioè $k_1 h = h' k_2$. In altri termini si ha la seguente

Proposizione 2.1. *La categoria delle* q.s. *è sottocategoria piena di quella delle quadruple.*

Dim. Usando le due aggiunzioni, la crescenza di k_2 e le (4) si ha successivamente: $fh(b) \leqslant b \leqslant gh(b)$; $k_2 fh(b) \leqslant k_2(b) \leqslant k_2 gh(b)$; $fk_1 h(b) \leqslant k_2(b) \leqslant gk_1 h(b)$; $k_1 h(b) \leqslant hk_2(b) \leqslant k_1 h(b)$.

Def. 2.2. Un morfismo di quadruple $k = (k_1, k_2)$: $\mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ è un'*immersione* se k_1 e k_2 sono funzioni iniettive e bicrescenti. In tal caso diremo che $\mathcal{Q}'$ *estende* $\mathcal{Q}$, o anche che $\mathcal{Q}$ *si immerge in* $\mathcal{Q}'$.

3 - Costruzione di Q_*

Lemma 3.1. *Se* $f \dashv g$, *dati* $b, b' \in B$, *sono equivalenti*

$$\forall x \in A \quad \big(f(x) \leqslant b \Rightarrow f(x) \leqslant b'\big)\,, \tag{5}$$

$$\forall x \in A \quad \big(b' \leqslant g(x) \Rightarrow b \leqslant g(x)\big)\,. \tag{6}$$

Dim. Sia $x \in A$ tale che $b' \leqslant g(x)$; si deve provare che, sotto la (5), $b \leqslant g(x)$. In virtù di (2) ciò si riduce a dimostrare che se y in A è tale che $f(y) \leqslant b$, allora $y \leqslant x$. Da $f(y) \leqslant b$ per la (5) segue $f(y) \leqslant b'$ e, da $b' \leqslant g(x)$, segue $f(y) \leqslant g(x)$. L'asserto segue allora da (3). L'implicazione inversa si dimostra per simmetria.

Allo scopo di costruire la q.s. $\mathfrak{Q}_*$, introduciamo un nuovo simbolo, h, e due insiemi A' e B' di scritture formali definiti come segue:

$$A' = A \cup \{hb \colon b \in B\}\,, \tag{7}$$

$$B' = B \cup \{fhb \colon b \in B\} \cup \{ghb \colon b \in B\} \text{ (1)}\,. \tag{8}$$

Per evitare inutili ripetizioni, conveniamo che i simboli a, a', a'' indichino sempre elementi di A e b, b', b'' elementi di B.

Proposizione 3.1. *L'insieme A' definito da (7) è preordinato dalla relazione $\models$ così definita*

(A1) $a \models a'$ sse $a \leqslant a'$

(A2) $a \models hb$ sse $f(a) \leqslant b$

(A3) $hb \models a$ sse $b \leqslant g(a)$

(A4) $hb \models hb'$ sse vale la (5).

Dim. La relazione $\models$ è banalmente riflessiva. Per dimostrare che $\models$ è transitiva si utilizzano la (3), il Lemma 3.1 e la monotonia di $f, g \colon A \to B$. Ci limitiamo a svolgere i calcoli per tre elementi $\alpha, \alpha', \alpha'' \in A'$ con $\alpha'' \in A$ e $\alpha, \alpha' \notin A$. Siano dunque

(I) $hb \models hb'$, (II) $hb' \models a$.

Da (I), per il Lemma 3.1 e $x = g(a)$, si ha $b' \leqslant g(a) \Rightarrow b \leqslant g(a)$, quindi, per (II), $b \leqslant g(a)$ e, per (A3), $hb \models a$.

(1) Naturalmente A e B potrebbero non essere insiemi di simboli; ma è chiaro che il considerarli tali non costituisce una perdita di generalità. Per lo stesso motivo possiamo introdurre in B' due nuovi simboli, che per abuso di linguaggio indichiamo ancora con f e g rispettivamente.

Da (A4), per la transitività di $\leqslant$, segue banalmente la

Osservazione 3.1. Per ogni $b, b' \in B$ si ha

$$\text{se } b \leqslant b' \quad \text{allora } hb \models hb' . \tag{9}$$

Proposizione 3.2. *L'insieme B' definito dalla* (8) *è preordinato dalla relazione $\models$ estesa come segue*

(B1) $b \models b'$ sse $b \leqslant b'$

(B2) $fhb \models b'$ sse $hb \models hb'$

(B3) $b \models ghb'$ sse $hb \models hb'$

(B4) $fhb \models fhb'$ sse $hb \models hb'$

(B5) $ghb \models ghb'$ sse $hb \models hb'$

(B6) $fhb \models ghb'$ sse $hb \models hb'$

(B7) $b \models fhb'$ sse $\forall y \in B \ (hb' \models hy \Rightarrow b \leqslant y)$

(B8) $ghb \models b'$ sse $\forall y \in B \ (hy \models hb \Rightarrow y \leqslant b')$

(B9) $ghb \models fhb'$ sse $\forall y \in B \ (hy \models hb \Rightarrow y \models fhb')$.

Dim. La relazione $\models$ è banalmente riflessiva su B'. La transitività di $\models$ si basa sul fatto che sono transitive $\leqslant$ e $\models$ ristretta ad A' e che, da (B2) e (B3) rispettivamente, seguono immediatamente per ogni $b \in B$ le

$$fhb \models b \models ghb . \tag{10}$$

Si noti inoltre, per comodità di calcolo, che la condizione espressa in (B9) è equivalente alla seguente

(B9)$'$ $ghb \models fhb'$ sse $\forall y \in B \ (hb' \models hy \Rightarrow ghb \models y)$.

Per il seguito conviene osservare che, dalle definizioni di $\models$ segue il

Lemma 3.2. *Per ogni $a \in A$ valgono le seguenti*

$$hg(a) \models a \models hf(a) \tag{11}$$

$$f(a) \models fhf(a) \models f(a) , \quad g(a) \models ghg(a) \models g(a) . \tag{12}$$

Siano ora A e B gli insiemi ordinati ottenuti dagli insiemi preordinati A' e B' per quoziente canonico: $\alpha \mathrel{|\!\!=\!\!|} \alpha'$ se e solo se $\alpha \models \alpha'$ e $\alpha' \models \alpha$ e, indicata con $[\alpha]_*$ la classe di equivalenza di α rispetto a $\mathrel{|\!\!=\!\!|}$,

$$(13) \qquad [\alpha]_* \leqslant [\alpha']_* \quad \text{se e solo se } \alpha \models \alpha' .$$

Lemma 3.3. (i) *Se* $a \models hb$ *allora* $f(a) \models fhb$ *e* $g(a) \models ghb$.

(ii) *Se* $hb \models a$ *allora* $fhb \models f(a)$ *e* $ghb \models g(a)$.

(iii) *Se* $hb \models hb'$ *allora* $fhb \models fhb'$ *e* $ghb \models ghb'$.

Dim. Dalle definizioni (B4) e (B5) segue (iii). La dimostrazione di (i) e (ii) si riduce a facili calcoli, tenuto conto che la relazione è transitiva e che valgono le (11).

Come ovvio corollario del Lemma 3.3 si ha la seguente

Proposizione 3.3. *Le formule*

$$(14) \qquad f_*([x]_*) = \begin{cases} [f(a)]_* & \text{se } x = a \in A \\ [fhb]_* & \text{se } x = hb\ ,\ b \in B, \end{cases}$$

$$(15) \qquad g_*([x]_*) = \begin{cases} [g(a)]_* & \text{se } x = a \in A \\ [ghb]_* & \text{se } x = hb\ ,\ b \in B \end{cases}$$

definiscono due funzioni crescenti $f_*, g_*: A \to B$.

Lemma 3.4. (i) *Se* $b \models fhb'$ *allora* $hb \models hb'$.

(ii) *Se* $ghb \models b'$ *allora* $hb \models hb'$.

(iii) *Se* $ghb \models fhb'$ *allora* $hb \models hb'$.

Dim. Ovvia da (11) e (9).

Proposizione 3.4. $\mathfrak{Q}_* = (A_*, B_*, f_*, g_*)$ *è una* q.s. *che estende* $\mathfrak{Q} = (A, B, f, g)$.

Dim. In virtù di (9), delle clausole (B2)-(B6) della definizione di $\models$ e del Lemma 3.4, possiamo definire la funzione crescente $h\colon B \to A$ come segue

$$h_*([y]_*) = \begin{cases} [hb]_* & \text{se } y = b \in B \\ [hb]_* & \text{se } y = fhb \text{ o } y = ghb\,,\ b \in B\,. \end{cases}$$

Utilizzando le formule (10), (11), (13), (14), (15), il Lemma 3.3 e le clausole (A2)-(A4) e (B2)-(B6) della definizione di $\models$, si prova che $f_* \dashv h_* \dashv g_*$. Inoltre $\mathfrak{Q}$ si immerge in $\mathfrak{Q}_*$ mediante $i = (i_1, i_2)$, definita da $i_1(a) = [a]_*$ e $i_2(b) = [b]_*$, essendo i_1 e i_2 ovviamente bicrescenti e iniettive.

Def. 3.1. Una q.s. $\mathfrak{Q}'$ si dice *generata* da una quadrupla $\mathfrak{Q}$ se $\mathfrak{Q}'$ estende $\mathfrak{Q}$ e se, per ogni q.s. $\overline{\mathfrak{Q}}$ tale che esistano due immersioni $i\colon \mathfrak{Q} \to \overline{\mathfrak{Q}}$ e $j\colon \overline{\mathfrak{Q}} \to \mathfrak{Q}'$, j è un isomorfismo.

Proposizione 3.4. *$\mathfrak{Q}_*$ è generata da $\mathfrak{Q}$.*

Dim. Omettiamo la facile dimostrazione; del resto si osservi che gli elementi di A_* che non appartengono a $i_1[A] \cup i_2[B]$ si ottengono da questi applicando h_*, f_*, g_*.

4 - Un esempio

Sia A l'insieme ordinato discreto con due elementi a_1 e a_2. Sia B l'insieme ordinato con tre elementi b_1, b_2, b_3 e $b_3 \leqslant b_2$. Le funzioni costanti $f, g\colon A \to B$ tali che $f(a_i) = b_1$ e $g(a_i) = b_2$ sono biaggiunti. La quadrupla $\mathfrak{Q} = (A, B, f, g)$ non è speciale perchè non esiste un $h\colon B \to A$ che sia aggiunto destro per f. La costruzione precedente fornisce un'estensione $\mathfrak{Q}_* = (A_*, B_*, f_*, g_*)$, cosiffatta: A_* è l'insieme ordinato costituito dagli elementi $\alpha_1 = i_1(a_1)$, $\alpha_2 = i_1(a_2)$, α_3, α_4, ordinati come segue: $\alpha_4 < \alpha_1 < \alpha_3$ e $\alpha_4 < \alpha_2 < \alpha_3$; B_* è l'insieme ordinato costituito da $\beta_1 = i_2(b_1)$, $\beta_2 = i_2(b_2)$, $\beta_3 = i_2(b_3)$, β_4, β_5 tali che $\beta_5 < \beta_1 < \beta_4$ e $\beta_5 < \beta_3 < \beta_2 < \beta_4$. Inoltre $f_*\colon A_* \to B_*$ è tale che $f_*(\alpha_3) = \beta_1$ e $f_*(\alpha_4) = \beta_5$ mentre $g_*\colon A_* \to B_*$ è tale che $g_*(\alpha_3) = \beta_4$ e $g_*(\alpha_4) = \beta_2$. Il funtore di ritorno $h_*\colon B_* \to A_*$ è così definito: $h_*(\beta_1) = h_*(\beta_4) = \alpha_3$ e $h_*(\beta_2) = h_*(\beta_3) = h_*(\beta_5) = \alpha_4$.

Costruiamo ora una seconda q.s. che estende $\mathfrak{Q}$, dimostrando così che il problema posto può avere soluzioni diverse da quelle del paragrafo **3**.

Sia A^* l'insieme ordinato costituito dagli elementi $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ tali che $\alpha_5 < \alpha_4 < \alpha_1 < \alpha_3$ e $\alpha_4 < \alpha_2 < \alpha_3$; sia B^* costituito da $\beta_1, \ldots, \beta_7$ ordinato come segue: $\beta_7 < \beta_5 < \beta_1 < \beta_4$, $\beta_5 < \beta_2$ e $\beta_7 < \beta_3 < \beta_6 < \beta_2 < \beta_4$. Sia $f^*: A^* \to B^*$ tale tale $f^*(\alpha_1) = f^*(\alpha_2) = f^*(\alpha_3) = \beta_1$, $f^*(\alpha_4) = \beta_5$ e $f^*(\alpha_5) = \beta_7$; sia $g^*: A^* \to B^*$ tale che $g^*(\alpha_1) = g^*(\alpha_2) = g^*(\alpha_4) = \beta_2$, $g^*(\alpha_3) = \beta_4$ e $g^*(\alpha_5) = \beta_6$. Allora $\mathcal{Q}^* = (A^*, B^*, f^*, g^*)$ è una q.s. con funtore di ritorno $h^*: B^* \to A^*$ così definito: $h^*(\beta_1) = h^*(\beta_4) = \alpha_3$, $h^*(\beta_2) = h^*(\beta_5) = \alpha_4$ e $h^*(\beta_3) = h^*(\beta_6) = h^*(\beta_7) = \alpha_5$. Inoltre $\mathcal{Q}^*$ estende $\mathcal{Q}$ con $j = (j_1, j_2)$ tale che $j_1(a_i) = \alpha_i$ e $j_2(b_i) = \beta_i$. Si prova che anche $\mathcal{Q}^*$ è generata da $\mathcal{Q}$ e che esiste un morfismo $k = (k_1, k_2)$: $\mathcal{Q}^* \to \mathcal{Q}_*$ tale che $kj = i$ e k_1 e k_2 sono suriettive.

5 - La q.s. universale

Sia $\mathcal{Q} = (A, B, f, g)$. Riprendiamo in esame la costruzione di $\mathcal{Q}_*$ del paragrafo **3** per apportarvi alcune modifiche ed ottenere così una nuova q.s. che indicheremo con $\mathcal{Q}^*$.

Anzitutto, siano A' e B' definiti come in (7) e (8). Modifichiamo poi la definizione di $\models$ come segue: le clausole (A1)-(A3) e (B1)-(B6) restano inalterate, mentre le (A4) e le (B7), (B8), (B9) vengono sostituite rispettivamente da

(A4)* $hb \models hb'$ sse $b \leqslant b' \vee \exists a \in A \ \big(b \leqslant g(a) \wedge f(a) \leqslant b'\big)$

(B7)* $b \models fhb'$ sse $\exists a \in A \ \big(b \leqslant f(a) \leqslant b'\big)$

(B8)* $ghb \models b'$ sse $\exists a \in A \ \big(b \leqslant g(a) \leqslant b'\big)$

(B9)* $ghb \models fhb'$ sse $\exists a, a' \in A \ \big(b \leqslant g(a) \leqslant f(a') \leqslant b'\big)$.

Proposizione 5.1. *La relazione $\models$ definita come sopra preordina A' e B'.*

Dim. La $\models$ è banalmente riflessiva su A' e B'. La transitività si prova tenendo conto di (3) e della monotonia di f e g. Per comodità di calcolo si noti inoltre che valgono ancora le (10), (11) e (12) del paragrafo **3**. Ci limitiamo a svolgere i calcoli per alcuni casi. Sia dunque $hb \models hb' \models a$. Da (A4)* e (A3), se $b \leqslant b'$, poichè $b' \leqslant g(a)$, segue subito $hb \models a$, mentre, se esiste $a' \in A$ tale che $b \leqslant g(a')$ e $f(a') \leqslant b'$, essendo sempre $b' \leqslant g(a)$, da (3) segue $a' \leqslant a$, da cui $g(a') \leqslant g(a)$ e quindi $b \leqslant g(a)$, cioè $hb \models a$. Sia ora $b \models ghb' \models fhb''$. Allora, per (B3), è $hb \models hb'$ e, per (B9)*, esistono $a, a' \in A$ tali che $hb' \models a$ e $g(a) \leqslant f(a') \leqslant b''$. Da quanto si è appena dimostrato segue che $hb \models a$ e quindi, per (A3) e la transitività di $\leqslant$, è $b \leqslant f(a') \leqslant b''$. Allora, per (B7)*, si ha $b \models fhb''$.

Nella presente costruzione, per distinguerla da quella del paragrafo **3**, indichiamo con A^* e B^* i quozienti canonici di A' e B' rispettivamente, e con $[\alpha]^*$ le classi di equivalenza.

Proposizione 5.2. *Siano* $f^*, g^*: A^* \to B^*$ *e* $h^*: B^* \to A^*$ *definite formalmente come* f_*, g_* *e* h_* *del paragrafo* **3**. *Allora* $\mathfrak{Q}^* = (A^*, B^*, f^*, g^*)$ *è una* q.s. *che estende* $\mathfrak{Q}$.

Dim. Considerato che si possono facilmente dimostrare anche in questo caso le proprietà enunciate nei lemmi 3.3 e 3.4, la monotonia di f^*, g^*, h^* si riduce ad una semplice verifica. Per dimostrare la doppia aggiunzione $f^* \dashv h^* \dashv g^*$ si procede quindi esattamente come nel caso di $\mathfrak{Q}_*$. Inoltre $\mathfrak{Q}^*$ estende $\mathfrak{Q}$ con l'immersione $i = (i_1, i_2)$ definita da $i_1(a) = [a]^*$ e $i_2(b) = [b]^*$.

Proposizione 5.3. *L'immersione* $i = (i_1, i_2): \mathfrak{Q} \to \mathfrak{Q}^*$ *è universale.*

Dim. Sia $\overline{\mathfrak{Q}} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{f}, \bar{g})$ una q.s. qualunque ordinata da $\leqslant$, con funtore di ritorno $\bar{h}$, e sia $j = (j_1, j_2): \mathfrak{Q} \to \overline{\mathfrak{Q}}$ un morfismo. Si deve provare che esiste uno ed un solo morfismo $k = (k_1, k_2): \mathfrak{Q}^* \to \overline{\mathfrak{Q}}$ tale che $ki = j$. Le seguenti formule

$$(16) \qquad k_1([x]^*) = \begin{cases} j_1(a) & \text{se } x = a \in A \\ \bar{h}j_2(b) & \text{se } x = hb\,,\ b \in B \end{cases}$$

$$(17) \qquad k_2([y]^*) = \begin{cases} j_2(b) & \text{se } y = b \in B \\ \bar{f}\bar{h}j_2(b) & \text{se } y = fhb\,,\ b \in B \\ \bar{g}\bar{h}j_2(b) & \text{se } y = ghb\,,\ b \in B \end{cases}$$

definiscono due funzioni crescenti $k_1: A^* \to \bar{A}$ e $k_2: B^* \to \bar{B}$, come si dimostra utilizzando in modo essenziale le clausole (A4)*, (B7)*-(B9)* della definizione di $\models$. La verifica si articola, come al solito, in più casi dei quali consideriamo solo il seguente, da noi giudicato tra i più significativi. Sia $[b^*] \leqslant [fhb']^*$ e dimostriamo che $k_2([b]^*) \leqslant k_2([fhb']^*)$. Per (16) e (B7) esiste $a \in A$ tale che $b \leqslant f(a) \leqslant b'$ da cui, essendo j un morfismo tra quadruple, segue che $j_2(b) \leqslant \bar{f}j_1(a) \leqslant j_2(b')$. Quindi per aggiunzione, monotonia di $\bar{f}$ e transitività di $\leqslant$, è $j_2(b) \leqslant \bar{f}\bar{h}j_2(b')$, cioè l'asserto. È routine algebrica dimostrare che $k = (k_1, k_2)$ è un morfismo. Le definizioni (16) e (17) stesse equivalgono poi al fatto che $ki = j$.

Bibliografia

[**1**] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag 1972.

[**2**] C. Reggiani, *Doppie aggiunzioni e funtori biaggiunti*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **9** (1983), 191-196.

Summary

An « order quadruple » is a quadruple $\mathcal{Q} = (A, B, f, g)$ *such that* A *and* B *are partially ordered sets,* f *and* g *are monotonic functions from* A *into* B *with* $f \dashv\vdash g$ *(see* [**2**]*). A quadruple* $\mathcal{Q}$ *is « special » if there exists a map* $h\colon B \to A$ *such that* $f \dashv h \dashv g$*. We give a universal solution to the problem of embedding an arbitrary order quadruple into a special one.*

* * *