Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 87-93

MARIA LUIGIA DIVICCARO (*)

Teoremi di punto fisso comune per famiglie di funzioni, in insiemi ordinati (**)

È scopo di questa nota presentare alcuni teoremi di punto fisso comune per famig'ie di funzioni di un insieme ordinato $(X, \leqslant)$ in sè, nonchè alcuni teoremi di minimo, o di massimo, punto fisso comune per famiglie di funzioni crescenti di X in sè.

Vengono, tra l'altro, generalizzati un teorema di A. Bakhtin (1) ed un altro di H. Amann (2), e viene ritrovato un teorema di A. Tarski (3).

1 – In questo numero e nei successivi indichiamo con $(X, \leqslant)$ un insieme ordinato.

Si prova il seguente teorema.

(T_1). *Se $F = (f_\alpha)_{\alpha \in I}$ è una famiglia di funzioni di X in sè per la quale è non vuoto l'insieme $\{x \in X : x \leqslant f_\alpha(x),\ \forall \alpha \in I\}$ (risp., $\{x \in X : x \geqslant f_\alpha(x),\ \forall \alpha \in I\}$) ed X' è una parte non vuota di quest'insieme tale che ogni sua catena è superiormente (risp., inferiormente) limitata in X', e si verifica*

$$f_\alpha(X') \subseteq X' \qquad \forall \alpha \in I\,,$$

esiste in X' almeno un punto fisso comune per F.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Facoltà di Architettura, Via Monteoliveto 3, 80134 Napoli, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 11-III-1981.

(1) Cfr. n. **2**.

(2) Cfr. n. **3**.

(3) Cfr. n. **4**.

Dim. Consideriamo soltanto il primo caso, il secondo potendo trattarsi analogamente.

Orbene, per il lemma di Zorn applicato ad X', esiste in tale insieme un elemento massimale m; poichè $m \leqslant f_\alpha(m)$ $\forall \alpha \in I$, si ha $m = f_\alpha(m)$ $\forall \alpha \in I$.

Consegue dal teorema (T_1) il seguente

$(T_{1.1})$. *Se* $F = (f_\alpha)_{\alpha \in I}$ *è una famiglia di funzioni di* $(X, \leqslant)$ *in sè e si verifica che*

$(a_{1.1})$ *ogni catena di* X *è superiormente (risp., inferiormente) limitata,*

$(b_{1.1})$ $x \leqslant f_\alpha(x)$ $\forall x \in X$, $\forall \alpha \in I$ (*risp.*, $x \geqslant f_\alpha(x)$ $\forall x \in X$, $\forall \alpha \in I$),

per ogni $x_0 \in X$ *esiste in* X *almeno un punto fisso comune per* F *e* $\geqslant x_0$ (*risp.*, $\leqslant x_0$).

Dim. Riferendoci per comodità soltanto al primo caso e posto $S_+(x_0) = \{x \in X : x_0 \leqslant x\}$, si prova, mediante l'ipotesi $(b_{1.1})$, che $f_\alpha(S_+(x_0)) \subseteq S_+(x_0)$ $\forall \alpha \in I$; inoltre, la $(a_{1.1})$ implica che ogni catena di $S_+(x_0)$ è superiormente limitata in $S_+(x_0)$: per questo basta osservare che se $\mathscr{C}$ è una catena di $S_+(x_0)$, si ha per la $(a_{1.1})$ che $\exists l \in X$: $x_0 \leqslant c \leqslant l$ $\forall c \in \mathscr{C}$.

L'asserto consegue pertanto dal teorema (T_1).

Osserviamo che il teorema $(T_{1.1})$ consente di provare che

$(T_{1.2})$. *Se* $F = (f_\alpha)_{\alpha \in I}$ *è una famiglia commutativa di funzioni di* X *in sè per la quale*

$(a_{1.2})$ *esiste un* $\alpha_0 \in I$ *tale che per ogni catena* $\mathscr{C}$ *di* X *tale che* $f_{\alpha_0}(\mathscr{C})$ *è una catena, esiste il* $\sup f_{\alpha_0}(\mathscr{C})$ (*risp., l'*$\inf f_{\alpha_0}(\mathscr{C})$),

$(b_{1.2})$ $x \leqslant f_\alpha(x)$ $\forall x \in X$, $\forall \alpha \in I$ (risp., $x \geqslant f_\alpha(x)$ $\forall x \in X$, $\forall \alpha \in I$),

per ogni $x_0 \in X$ *esiste un punto fisso comune per* F *e* $\geqslant x_0$ (*risp.*, $\leqslant x_0$) ([4]).

2 – Proviamo anzitutto, in questo numero, che fruendo dei teoremi (T_1) e $(T_{1.1})$ si ottiene il seguente teorema.

([4]) Invero, introdotta in X la nuova relazione d'ordine $\preccurlyeq$ così definita

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \leqslant y \quad \text{e} \quad f_{\alpha_0}(x) \leqslant f_{\alpha_0}(y),$$

si prova che la $(a_{1.1})$ e la $(b_{1.1})$ del precedente Teorema $(T_{1.1})$ sono soddisfatte da $(X, \preccurlyeq)$ e da F. Il risultato espresso dal $(T_{1.2})$ è stato in effetti già ottenuto da Bakhtin (cfr. [**2**], dim. del teor. 1).

Va peraltro osservato, e ciò si deduce dal procedimento di Bakhtin, che nel nostro Teorema $(T_{1.2})$ l'ipotesi della commutatività della famiglia F non è essenziale.

($T_{2.1}$). *Se* $F = (f_\alpha)_{\alpha \in I}$ *è una famiglia di funzioni crescenti di* $(X, \leqslant)$ *in sè per la quale*

($a_{2.1}$) *per ogni catena* $\mathscr{C}$ *di* X *non dotata dell'estremo superiore (risp., inferiore) esiste almeno un* $\alpha \in I$ *per il quale esiste il* $\sup f_\alpha(\mathscr{C})$ *(risp., l'*$\inf f_\alpha(\mathscr{C})$*)*,

($b_{2.1}$) $x \leqslant f_\alpha(x)$ $\forall x \in X$, $\forall \alpha \in I$ *(risp.,* $x \geqslant f_\alpha(x)$ $\forall x \in X$, $\forall \alpha \in I$*)*,

per ogni $x_0 \in X$ *esiste in* X *il minimo (risp., il massimo) punto fisso comune per* F *e* $\geqslant x_0$ *(risp.,* $\leqslant x_0$*)*.

Dim. (5). Consideriamo per brevità soltanto il primo caso.

L'esistenza di almeno un punto fisso comune per F e $\geqslant x_0$ si ricava dal teorema ($T_{1.1}$), in quanto la ($a_{2.1}$) implica la ($a_{1.1}$).

Proviamo inoltre che esiste il minimo punto fisso comune per F e $\geqslant x_0$.

Indicato infatti con $\mathrm{Fix}(F)$ l'insieme dei punti fissi comuni per F e $\geqslant x_0$, e posto $Y = \{y \in X : x_0 \leqslant y \leqslant x \ \forall x \in \mathrm{Fix}(F)\}$, è evidente che l'esistenza del minimo punto fisso comune per F, che sia $\geqslant x_0$, è equivalente all'esistenza in Y di un punto fisso comune per F.

Orbene, allo scopo di usufruire del teorema (T_1), osserviamo che è $f_\alpha(Y) \subseteq Y$ $\forall \alpha \in I$, dato che, in virtù della crescenza delle f_α, si ha

$$(x_0 \leqslant y \leqslant x \ \ \forall x \in \mathrm{Fix}(F)) \Rightarrow (x_0 \leqslant y \leqslant f_\alpha(y) \leqslant f_\alpha(x) = x \ \ \forall \alpha \in I).$$

Inoltre, detta $\mathscr{C}$ una catena di Y, se $\mathscr{C}$ è dotata dell'estremo superiore in X si ha, per la definizione stessa di estremo superiore, che $\sup \mathscr{C} \leqslant x$ $\forall x \in \mathrm{Fix}(F)$; se invece $\mathscr{C}$ non è dotata dell'estremo superiore in X, esistendo, per la ($a_{2.1}$), un $\alpha \in I$ per il quale esiste il $\sup f_\alpha(\mathscr{C})$, si ha $\sup f_\alpha(\mathscr{C}) \leqslant x$ $\forall x \in \mathrm{Fix}(F)$, in quanto, essendo $f_\alpha(\mathscr{C}) \subseteq Y$, è $f_\alpha(c) \leqslant x$ $\forall x \in \mathrm{Fix}(F)$.

In ogni caso, $\mathscr{C}$ è superiormente limitata in Y.

Per il teorema (T_1) esiste pertanto almeno un punto fisso comune per F in Y.

È chiaro che il nostro teorema ($T_{2.1}$) rappresenta una generalizzazione della proposizione seguente, dovuta a Bakhtin (cfr. [**2**], dim. del teor. 3).

($T_{2.2}$). *Se* $F = (f_\alpha)_{\alpha \in I}$ *è una famiglia di funzioni crescenti di* $(X, \leqslant)$ *in sè per la quale*

---

(5) Questa dimostrazione mi è stata suggerita dalla dimostrazione di un teorema di Amann (cfr. [**1**], teor. (1.4) a p. 8) che nel n. **3** di questa nota viene generalizzato.

($a_{2.2}$) *esiste un* $\alpha_0 \in I$ *tale che per ogni catena* $\mathscr{C}$ *di* X *esiste il* $\sup f_{\alpha_0}(\mathscr{C})$ (*risp.*, *l'*$\inf f_{\alpha_0}(\mathscr{C})$),

($b_{2.2}$) $x \leqslant f_\alpha(x)$ $\forall x \in X$, $\forall \alpha \in I$ (*risp.*, $x \geqslant f_\alpha(x)$ $\forall x \in X$, $\forall \alpha \in I$),

per ogni $x_0 \in X$ *esiste il minimo* (*risp.*, *il massimo*) *punto fisso comune per* F, *che sia* $\geqslant x_0$ (*risp.*, $\leqslant x_0$).

La indicata generalizzazione è peraltro «reale». Ciò viene messo in luce, ad esempio, dal caso in cui F sia costituita dalle funzioni così definite:

$$f_1 \colon x \in [0, 1] - \{1/4, 1/2\} \to \left[\begin{array}{ll} x & x \in [0, (1/4)[\\ (4x + 5)/12 & x \in]1/4, 1/2[\\ 2/3 & x \in]1/2, 2/3] \\ (4x + 5)/9 & x \in]2/3, 1], \end{array}\right.$$

$$f_2 \colon x \in [0, 1] - \{1/4, 1/2\} \to \left[\begin{array}{ll} 3/8 & x \in [0, (1/4)[\\ (2x + 1)/4 & x \in]1/4, 1/2[\\ x & x \in]1/2, 2/3] \\ 1 & x \in]2/3, 1]. \end{array}\right.$$

3 – È ancora un caso particolare del teorema ($T_{2.1}$) il seguente teorema di punto fisso per una funzione.

($T_{3.1}$). *Se* f *è una funzione crescente di* $(X, \leqslant)$ *in sè per la quale*

($a_{3.1}$) *per ogni catena* $\mathscr{C}$ *di* X *non dotata di estremo superiore* (*risp.*, *inferiore*), *esiste almeno un* $n \in N$ *per il quale esiste il* $\sup f^n(\mathscr{C})$ (*risp.*, *l'*$\inf f^n(\mathscr{C})$) (6),

($b_{3.1}$) $x \leqslant f(x)$ $\forall x \in X$ (*risp.*, $x \geqslant f(x)$ $\forall x \in X$),

per ogni $x_0 \in X$ *esiste il minimo* (*risp.*, *il massimo*) *punto fisso per* f *che sia* $\geqslant x_0$ (*risp.*, $\leqslant x_0$).

Ritengo sia il caso di osservare che da questo teorema ($T_{3.1}$) consegue che

($T_{3.2}$). *Se* f *è una funzione crescente di* $(X, \leqslant)$ *in sè per la quale*

($a_{3.2}$) *per ogni catena* $\mathscr{C}$ *di* X *non dotata di estremo superiore* (*risp.*, *inferiore*) *esiste un* $n \in N$ *tale che esiste il* $\sup f^n(\mathscr{C})$ (*risp.*, *l'*$\inf f^n(\mathscr{C})$),

($b_{3.2}$) $\exists x_0 \in X \colon x_0 \leqslant f(x_0)$ (*risp.*, $x_0 \geqslant f(x_0)$),

esiste il minimo (*risp.*, *il massimo*) *punto fisso per* f, $\geqslant x_0$ (*risp.*, $\leqslant x_0$).

---

(6) N rappresenta l'insieme degli interi positivi, n, ed f^n l'iterata n-esima di f.

Basta, per questo, applicare il teorema ($T_{3.1}$) considerando la restrizione di f all'insieme (non vuoto) $X_0 = \{x \in X\colon x_0 \leqslant x \leqslant f(x)\}$ (risp., $\{x \in X\colon x_0 \geqslant x \geqslant f(x)\}$).

Si rileva che il teorema ($T_{3.2}$) generalizza un teorema di Amann (cfr. [**1**], teor. (1.4) a p. 8), che contempla, al posto della ($a_{3,2}$), l'ipotesi, più forte: « ogni catena di X è dotata di estremo superiore (risp., inferiore) ». Il teorema ($T_{3.2}$) è, peraltro, una « reale » generalizzazione del citato teorema di Amann, come risulta da semplici esempi.

Si rileva infine che più generale del teorema ($T_{3.2}$) è il seguente

($T_{3.3}$). *Se* $F = (f_\alpha)_{\alpha \in I}$ *è una famiglia commutativa di funzioni crescenti di* $(X, \leqslant)$ *in sè per la quale*

($a_{3.3}$) *per ogni catena* $\mathscr{C}$ *di* X *non dotata di estremo superiore (risp., inferiore) esiste almeno un* $\alpha \in I$ *per il quale esiste il* $\sup f_\alpha(\mathscr{C})$ *(risp., l'*$\inf f_\alpha(\mathscr{C})$*)*,

($b_{3.3}$) $\exists x_0 \in X\colon x_0 \leqslant f_\alpha(x_0)\ \forall \alpha \in I$ *(risp.,* $x_0 \geqslant f_\alpha(x_0)\ \forall \alpha \in I$*)*,

esiste il minimo (risp., il massimo) punto fisso $\geqslant x_0$ *(risp.,* $\leqslant x_0$*).*

4 – Dal teorema ($T_{2.1}$) consegue inoltre il

($T_{4.1}$). *Se* $(X, \leqslant)$ *è un insieme ordinato completo* (⁷) *dotato del minimo,* $\bar{x}$, *e del massimo,* $\bar{\bar{x}}$, *ed* $F = (f_\alpha)_{\alpha \in I}$ *è una famiglia di funzioni crescenti di* X *in sè per la quale*

($b_{4.1}$) $x \leqslant f_\alpha(x)\ \forall x \in X,\ \forall \alpha \in I$ *(risp.,* $x \geqslant f_\alpha(x)\ \forall x \in X,\ \forall \alpha \in I$*)*,

l'insieme dei punti fissi comuni per F *ha* $\bar{\bar{x}}$ *come massimo (risp.,* $\bar{x}$ *come minimo) ed è altresì dotato del minimo (risp., del massimo).*

D i m. A norma del teorema ($T_{2.1}$), l'insieme dei punti fissi comuni per F è dotato del minimo (risp., del massimo) e d'altro canto $\bar{\bar{x}}$ (risp., $\bar{x}$) è ovviamente il massimo (risp., il minimo) dell'insieme dei punti fissi comuni per F.

Dal teorema ($T_{4.1}$) consegue infine il teorema seguente che esprime un risultato già ottenuto da A. Tarski ([**3**], teor. 2 a pag. 288).

($T_{4.2}$). *Se* $(X, \leqslant)$ *è un insieme ordinato completo dotato del minimo,* $\bar{x}$, *e del massimo,* $\bar{\bar{x}}$, *ed* $F = (f_\alpha)_{\alpha \in I}$ *è una famiglia commutativa di funzioni crescenti di* X *in sè, esistono in* X *il minimo ed il massimo punto fisso comune per* F.

(⁷) Un insieme ordinato $(X, \leqslant)$ si dice *completo* se è soddisfatta la condizione « ogni parte non vuota di X, superiormente limitata, ha estremo superiore » (o, equivalentemente, se « ogni parte non vuota di X, inferiormente limitata, ha estremo inferiore »).

Dim. L'insieme $Y = \{y \in X\colon y \leqslant f_\alpha(y) \;\; \forall \alpha \in I\}$, che ha evidentemente $\bar{\bar{x}}$ come minimo, è dotato anche di massimo, in quanto, posto $\bar{\bar{y}} = \sup Y$, si ha che $\bar{\bar{y}} \in Y$ dal momento che, essendo $f_\alpha(\bar{\bar{y}}) \geqslant f_\alpha(y) \geqslant y \;\; \forall y \in Y, \;\; \forall \alpha \in \boldsymbol{I}$, risulta $f_\alpha(\bar{\bar{y}}) \geqslant \bar{\bar{y}}$.

Per provare l'asserto basta allora, a norma del $(T_{4.1})$, provare che $f_\beta(Y) \subseteq Y$ $\forall \beta \in I$.

Orbene, dalla crescenza delle f_α e dalla commutatività di F segue, per ogni $\beta \in I$, che

$$f_\beta(y) \leqslant f_\beta(f_\alpha(y)) = f_\alpha(f_\beta(y)) \qquad \forall y \in Y, \;\; \forall \alpha \in I\,.$$

Poichè il teorema $(T_{4.2})$ è stato provato da Tarski senza l'uso del lemma di Zorn o di proposizioni equivalenti, ritengo utile fornire qui una nuova dimostrazione del teorema $(T_{4.2})$ che, pur essa indipendente dal lemma di Zorn, è nell'ordine di idee di questa nota. A tale scopo, poichè abbiamo dedotto il teorema $(T_{4.2})$ dal teorema $(T_{4.1})$ senza l'uso del lemma di Zorn, forniamo una dimostrazione del teorema $(T_{4.1})$ che prescinda dal lemma di Zorn.

Orbene, limitandoci al primo caso, ci basta osservare che $\bar{\bar{x}}$ è il massimo punto fisso comune per F e che, detto $\operatorname{Fix}(F)$ l'insieme dei punti fissi comuni per F e posto $h = \inf \operatorname{Fix}(F)$, la crescenza delle f_α implica che $\forall x \in \operatorname{Fix}(F)$ $f_\alpha(h) \leqslant f_\alpha(x) = x \;\; \forall \alpha \in I$, il che implica $f_\alpha(h) \leqslant h \;\; \forall \alpha \in I$, la qual cosa, insieme alla $(b_{4.1})$, assicura che $f_\alpha(h) = h \;\; \forall \alpha \in I$, e cioè che $h = \min \operatorname{Fix}(F)$.

Rileviamo infine che la proprietà di commutatività imposta ad F è essenziale nel teorema $(T_{4.2})$ per provare l'esistenza di almeno un punto fisso comune per F.

Tale «essenzialità» viene banalmente messa in luce, ad esempio, dalla famiglia (non commutativa) F delle funzioni di $[0, 1]$ in sè così definite

$$f(x) = c_1\,, \qquad g(x) = c_2 \qquad (c_1 \neq c_2),$$

per la quale è vuoto l'insieme dei punti fissi comuni, nonchè dalla famiglia delle funzioni così definite

$$f_1\colon x \in [0, 1] \to \begin{bmatrix} 0 & 0 \leqslant x \leqslant a & (0 < a < 1) \\ x & a < x \leqslant 1, & \end{bmatrix}$$

$$f_2\colon x \in [0, 1] \to \begin{bmatrix} a & 0 \leqslant x \leqslant a \\ x & a \leqslant x \leqslant 1, \end{bmatrix}$$

per la quale l'insieme dei punti fissi comuni è l'intervallo $]a, 1]$.

Bibliografia

[1] H. AMANN, *Order structures and fixed points*, SAFA 2, Atti del 2° Seminario di Analisi Funzionale e Applicazioni (1977), Università degli Studi della Calabria, Dipartimento di Matematica, Arcavacata di Rende, Cosenza 1979.

[2] A. BAKHTIN, *Existence of common fixed points for Abelian families of discontinuous operators*, Siberian Math. J. **13** (1972), 167-172.

[3] A. TARSKI, *A lattice-theoretical fix point theorem and its applications*, Pacific J. Math. **5** (1955), 285-309.

Summary

Some common least or greatest fixed point theorems in ordered sets for families of monotonic mappings are given. Moreover, a theorem of A. Bakhtin and one of H. Amann are generalized, and a theorem of A. Tarski is obtained again.

* * *