Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 125-131

R. Rosca (*)

Sous variété générique d'une variété sasakienne à champ vectoriel anti-invariant ϕ - récurrent (**)

Soit $x: M \to \tilde{M}(\phi, \tilde{\eta}, \tilde{g}, \xi)$ l'immersion d'une sous variété *générique* (dans le sens de K. Yano et M. Kon [**5**]$_2$) dans une variété sasakienne $\tilde{M}$ avant pour tenseurs de structure $\phi, \tilde{\eta}, \tilde{g}$ et ξ. Si $Z \in T_p(M)$ est un champ tangent quelconque à M ($T_p(M)$: espace tangent à M en $p \in M$), on pose [**5**]$_2$ $\phi Z = PZ + FZ$ où PZ est la partie tangentielle et FZ la partie normale de ϕZ. D'autre part pour tout couple Z, Z' de vecteurs tangents à M on a l'équation de Gauss $\tilde{\nabla}_Z Z' = \nabla_Z Z' + B(Z, Z')$ où B est la *seconde forme fondamentale* de M. Si B est de la forme

$$\text{(a)} \qquad B(Z, Z') = \eta(Z)B(Z', \xi) + \eta(Z')B(X, \xi) \, ,$$

la sous variété M est par définition [**5**]$_2$ *totalement contact-géodésique*. Dans cet ouvrage nous supposerons que $\tilde{M}$ est de dimension $2m + 1$ et la sous-variété M de codimension 2 (si $\dim M = n + 1 \Rightarrow n = 2m - 2$). Une pareille sous variété M est munie avec deux distribution.

L'une notée par D (distribution *horizontale*) est *invariante* par ϕ, soit $\phi D \subset T(M)$ et l'autre notée par $D^\perp$ (distribution *verticale*) est *anti-invariante* par ϕ, soit $\phi D^\perp \subset T(M)^\perp$.

Cette propriété fait que conformément à la définition de A. Bejancu [**1**] on peut considérer la sous-variété générique M comme étant une CR-sous variété. Conformément aux notations de [**5**]$_2$, on peut aussi écrire

$$D = \mathscr{L}; \qquad \mathscr{L}_p = \{Z \in T_p(M): FZ = 0\} \qquad \forall Z \in T_p(M);$$

$$D^\perp = \mathscr{T}; \qquad \mathscr{T}_p = \{Z \in T_p(M): PZ = 0 \text{ et } \eta(Z) = 0\} \, .$$

(*) Indirizzo: 59 Avenue Emile Zola, Bat. A apt. 9, Paris 15ème, France. (Dept. of Math., Institute of Tecnology, 323 High Street, Newark, New Jersey 07102, USA).

(**) Ricevuto: 6-V-1981.

Dans ces conditions nous disons que M porte un champ vectoriel X *anti-invariant ϕ-récurrent,* si $X \in \Phi T_p(M)^{\perp} = D_p^{\perp}$ satisfait à

(i) $\nabla X = \alpha \otimes \phi X \qquad \alpha \in \Lambda^1(M)$;

(ii) les conditions de récurrence dans l'espace $D \oplus T(M)^{\perp}$ sont satisfaites quel que soit X.

La variété M possède alors les propriétés suivantes:

(i) M est totalement contact géodésique;

(ii) le champ X est une direction géodésique et est un champ de Killing;

(iii) M est feuilletée par des hypersurfaces orthogonales à X;

(iv) la 2-forme simple unitaire qui correspond à la distribution D est harmonique et les sous-variétés intégrales correspondantes sont totalement géodésiques;

(v) la distribution $D = \mathscr{L}$ est elle aussi involutive.

1 – Soit $\tilde{M}$ une variété sasakienne à $2m+1$ dimensions, avec les tenseurs de structures $(\phi, \xi, \tilde{\eta}, \tilde{g})$. Ces tenseurs de structure satisfont sur $\tilde{M}$ à [**5**]$_1$

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} &\phi^2 \tilde{Z} = -\tilde{Z} + \tilde{\eta}(\tilde{Z})\xi\,, \quad \phi\xi = 0\,, \quad \tilde{\eta}(\xi) = 1\,, \quad \tilde{\eta}(\phi\tilde{Z}) = 0\,,\\ &\tilde{g}(\phi\tilde{Z}, \phi\tilde{Z}') = \tilde{g}(Z, Z') - \tilde{\eta}(\tilde{Z})\,\tilde{\eta}(\tilde{Z}') \qquad \forall \tilde{Z}, \tilde{Z}' \in T_{\tilde{p}}(\tilde{M})\,,\end{aligned}$$

($T_{\tilde{p}}(\tilde{M})$: espace tangent à $\tilde{M}$ en $\tilde{p} \in \tilde{M}$).

Soit $\mathcal{O}(\tilde{M})$ le fibré des repères orthonormés sur $\tilde{M}$, et notons respectivement par $\{e_A = A,\ B = 1, \ldots, 2m+1\}$ une base vectorielle d'un élément $\mathcal{O} \in \mathcal{O}(\tilde{M})$ et par $\{\tilde{\omega}^A\}$ la base duale. Si $\tilde{\nabla}$ est l'opérateur de dérivation covariante sur $\tilde{M}$ et $\tilde{\omega}_B^A = \tilde{\gamma}_{BC}^A \tilde{\omega}^C$ les formes de connexion sur $\mathcal{O}(\tilde{M})$, alors on a les équations de structure (E. Cartan) sont

$$(1.2)\qquad \mathrm{d}\tilde{p} = \tilde{\omega}^A \otimes e_A \qquad \text{(forme de soudure)}\,,$$

$$(1.3)\qquad \tilde{\nabla} e_A = \tilde{\omega}_A^B \otimes e_B \qquad \text{(équations de la connexion)}\,,$$

$$(1.4)\qquad \mathrm{d}\tilde{\omega}^A = \tilde{\omega}^B \otimes \tilde{\omega}_B^A \qquad \text{(premier groupe d'équations de structure)}\,,$$

$$(1.5)\qquad \mathrm{d}\tilde{\omega}_B^A = \tilde{\omega}_B^C \wedge \tilde{\omega}_C^A + \tilde{\Omega}_B^A \qquad \text{(second groupe d'équations de structure)}\,,$$

où $\tilde{\Omega}_B^A$ représentent les 2-formes de courbure.

On sait [5]₁ qu'on peut choisir sur $\tilde{M}$ un champ local $\mathcal{O}$, tel que $\{e_A\} = \{e_{2m+1} = \xi,\ e_a,\ e_a^* = \Phi e_a;\ a = 1, \ldots, m;\ a^* = a + m\}$ ce qui entraine

$$(1.6) \qquad \tilde{\omega}^{2m+1} = \tilde{\eta}\,, \qquad \tilde{\omega}_b^a = \tilde{\omega}_{b^*}^{a^*}\,, \qquad \tilde{\omega}_b^{a^*} = \tilde{\omega}_a^{b^*}, \qquad \tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}_{2m'+1}^{a^*}\, \tilde{\omega}^{a^*} = -\,\tilde{\omega}_{2m+1}^a\,.$$

Soit $x\colon M \to \tilde{M}$ l'immersion d'une sous-variété M de dimension $n + 1$ dans $\tilde{M}$ (nous conviendrons de noter les éléments induits par x, en omettant $\sim$).

Par définition [5]₂ M est dénommée une *sous-variété générique* de $\tilde{M}$ si $\phi T_p(M)^\perp \subset T_p(M)$ pour tout point $p \in M$ et si ξ est tangent à M. Dans ce cas l'espace tangent $T_p(M)$ de M se décompose en

$$(1.7) \qquad T_p(M) = H_p(M) \oplus \phi T_p(M)^\perp\,.$$

Supposons que l'on a $n = 2m - 2$ (codimension $M = 2$) et que M est définie par

$$(1.8) \qquad \omega^{2m} = 0\,, \qquad \omega^{2m-1} = 0\,.$$

Dans ce cas $\phi T_p(M)^\perp$ est de dimension 2 et est définie par les vecteurs e_m, e_{m-1}. Conformément à la définition donnée dans [1], il importe de remarquer que M est une CR sous-variété. En effet on a $\phi H_p(M) \subset T_p(M)$ et $\phi(\phi T_p(M))^\perp \subset T_p(M)^\perp$ ce qui montre que $H_p(M)$ est une distribution horizontale D_p (donc invariante) et $\phi T_p(M)^\perp$ est une distribution verticale $D_p^\perp$ (donc anti-invariante).

Si $\tilde{\nabla}$ et ∇ sont les opérateurs de dérivation covariante respectivement sur $\tilde{M}$ et M, alors l'équation

$$(1.9) \qquad \tilde{\nabla}_Z Z' = \nabla_Z Z' + B(Z, Z')$$

pour tout champs de vecteurs Z et Z' est l'*équation de Gauss* et B est appelée la *seconde forme fondamentale* de M. Si l'on a

$$(1.10) \qquad B(Z, Z') = \eta(Z)B(Z', \xi) + \eta(Z')B(Z, \xi)\,,$$

alors on dit [5]₂ que M est totalement *contact géodésique.*

Enfin pour tout champ des vecteurs sur M, on peut écrire

$$(1.11) \qquad \phi Z = PZ + FZ\,,$$

où PZ est la partie tangentielle et FZ est la partie normale de ϕZ.

2 – Déf. Nous disons qu'un champ vectoriel $X \in \phi T_p(M)^\perp = D_p^\perp$ est

anti-invariant ϕ-récurrent si il satisfait à

(i) $\nabla X = \alpha \otimes \Phi X \qquad \alpha \in \Lambda^1(M)$,

(ii) les conditions de récurrence dans l'espace $D_p \oplus T_p(M)^\perp$ sont satisfaites quel que soit X.

Dans ces conditions si nous posons

$$X = t_{m-1} e_{m-1} + t_m e_m \, ; \qquad t_{m-1}, t_m \in C^\infty(M) \, , \tag{2.1}$$

il vient

$$\phi X = t_{m-1} e_{2m-1} + t_m e_{2m} \in T_p(M)^\perp ; \tag{2.2}$$

de (i) on déduit

$$\begin{aligned} dt_{m-1} - t_m \omega_{m-1}^m &= 0 \, , \\ dt_m + t_{m-1} \omega_{m-1}^m &= 0 \, , \end{aligned} \tag{2.3}$$

et les conditions de récurrence dans l'espace $D_p \oplus T_p(M)^\perp$, soit

$$\begin{aligned} t_{m-1} \omega_i^{2m-1} + t_m \omega_i^{2m} &= 0 \, , \\ t_{m-1} \omega_{i*}^{2m-1} + t_m \omega_{i*}^{2m} &= 0 \, , \end{aligned} \tag{2.4}$$

et

$$\begin{aligned} t_{m-1} \omega_{m-1}^{2m-1} + t_m \omega_m^{2m-1} &= t_{m-1} \alpha \, , \\ t_{m-1} \omega_{m-1}^{2m} + t_m \omega_m^{2m} &= t_m \alpha \, . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dans (2.4) les indices i et $i^* = i + m$ correspondent à la distribution horizontale $H_p(M) = D$. En faisant usage de (1.4) et compte tenu de (2.4) et (2.5) la différentiation extérieure des équations (1.8) donne après calculs

$$\alpha = \eta \, . \tag{2.6}$$

D'autre part conformément à (ii) on déduit

$$\omega_i^{2m-1} = 0 \, , \quad \omega_{i*}^{2m-1} = 0 \, , \quad \omega_i^{2m} = 0 \, , \quad \omega_{i*}^{2m} = 0 \, . \tag{2.7}$$

Les équations (2.6) et (2.7) permettent de voir que sur une variété M portant un champ vectoriel X satisfaisant à (i) et (ii), l'équation (1.10) est satisfaite.

Il est facile de voir que réciproquement si sur une sous-variété générique M de codimension 2, les équations (2.7) et (2.8) sont satisfaites, alors M est totalement contact géodésique. On a donc le

Théorème. *Soit $x\colon M \to \tilde{M}$ l'immersion d'une sous-variété générique de codimension deux dans une variété sasakienne de dimension $2m+1$.*

Si M porte un champ vectoriel anti-invariant ϕ-récurrent, alors la variété M est totalement contact géodésique.

3 – De (2.1), (2.6) et (2.3) on déduit aussitôt

$$\nabla_X X = 0\,, \qquad |X|^2 = \mathrm{C^{te}}\,, \tag{3.1}$$

ce qui exprime que X est une *direction géodésique*.

En outre si $Z, Z' \in T_p(M)$ sont deux champs vectoriels quelconques il résulte encore de (2.1)

$$\langle \nabla_Z X, Z'\rangle + \langle \nabla_{Z'} X, Z\rangle = 0\,, \tag{3.2}$$

ce qui prouve d'une manière intrinsèque que X est un *champ de Killing*. Cette propriété est d'ailleurs en accord, en vertu d'une proposition connue [**4**], avec les conditions (3.1). D'autre part si j est l'isomorphisme canonique défini par la métrique g de M, posons

$$\omega = j(X) = t_{m-1}\omega^{m-1} + t_m\omega^m \in \Lambda^1(M)\,.$$

En faisant usage de (1.9) et compte tenu de (2.3) et (2.7), on obtient

$$d\omega = 0\,. \tag{3.3}$$

On peut donc dire en vertu de (3.3) que la variété M est *feuilletée* par des hypersurfaces orthogonales au champ X.

Soient maintenant les distributions $\mathscr{L}$ et $\mathscr{T}$ définies respectivement par

$$\mathscr{L}_p\colon \{Z \in T_p(M)\colon FZ' = 0\} \tag{3.4}$$

et

$$\mathscr{T}_p = \{Z \in T_p(M)\colon PZ = 0 \ \text{ et } \ \eta(Z) = 0\}\,. \tag{3.5}$$

Conformément à (1.11) on voit facilement que $\mathscr{L} = D$ et $\mathscr{T} = D^{\perp}$.

On sait [**1**] que la distribution $\mathscr{T}$ est complètement intégrable et sa variété intégrale maximale est une variété anti-invariante de $\widetilde{M}$, qui est orthogonale à ξ, et est de dimension $2m-n=2$.

Si nous notons par

$$\varphi = \omega^{m-1}\wedge\omega^{m} \tag{3.6}$$

la forme simple qui correspond à $\mathscr{T}_p$, on trouve rapidement à l'aide de (1.7) que l'on a

$$d\varphi = 0\,. \tag{3.7}$$

On peut donc dire que φ est une *forme pré-symplectique* [**3**] ($\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$) et eu égard à (2.3) on trouve facilement $L_X\varphi = 0$. Ainsi X est un *automorphisme infinitésimal* de φ. Si l'on note avec $*\,\varphi$, l'adjointe de φ par rapport à g, on voit facilement que $*\,\varphi$ est la forme simple qui correspond à la distribution $\mathscr{L}_p$. Mais à l'aide de (2.7) et (2.8) on trouve que l'on a quel que soient les champs vectoriels Z et Z' sur $\mathscr{L}_p$

$$B(PZ, Z') = B(Z, PZ')\,. \tag{3.8}$$

Conformément à [**5**]$_2$ cette relation prouve que la distribution $\mathscr{L}_p$ est aussi complément intégrable (elle a pour variétés intégrales des variétés invariantes M_I). Un calcul rapide donne d'ailleurs à l'aide de (1.7)

$$d*\varphi = 0\,. \tag{3.9}$$

Mais les équations (3.7) et (3.9) prouvent que la 2-forme φ est *harmonique* ($\Delta\varphi = (d\circ\delta+\delta\circ d)\varphi = 0$). Il suffit alors de se rapporter au théorème de Tachibana [**4**] sur les formes simples harmoniques, pour conclure que les sous-variétés anti-invariante M_A tangentes à $\mathscr{T}_p$ sont *minimales*. Un calcul simple permet de voir que les variétés M_A sont totalement géodésiques (les variétés invariantes M_I sont comme on sait [**5**]$_1$ toujours minimales).

Enfin de (2.2) et (2.3) on déduit encore

$$\nabla\phi X = -\eta\otimes X - \omega\otimes\xi\,; \quad (\nabla_y\,\phi X = (\nabla_y\phi)\,y + \phi\,\nabla_y X),$$

et cette expression de $\nabla\phi X$ montre que le vecteur normal ϕX est *parallèle dans le faisceau normal* $\cup\, T_p(M)$.

On trouve en outre que la seconde forme quadratique fondamentale $l_{\phi X} = -\langle dp, \nabla\phi X\rangle$, associée à ϕX a pour expression $l_{\phi X} = 2\eta \otimes \omega$, et cette forme de $l_{\phi X}$ pourve que $l_{\phi X}$ est une section *géodésique de contact.*

Théorème. *Soit $x\colon M \to \tilde{M}$ l'immersion d'une sous-variété M totalement contact géodésique dans une variété sasakienne $\tilde{M}$ et X le champ anti-invariant ϕ-récurrent qui définit x comme totalement de contact. Alors*:

(i) *X est une direction géodésique.*

(ii) *X est un champ de Killing.*

(iii) *M est feuilletée par des hypersurfaces orthogonales à X.*

(iv) *La 2-forme unitaire simple qui correspond à la distribution anti-invariante $\mathscr{T}_p$ est harmonique et les sous-variétés intégrales correspondantes sont totalement géodésiques.*

(v) *La distribution invariante $\mathscr{L}_p$ est elle aussi involutive.*

(vi) *Le champ normal ϕX est parallèle dans le faisceau normal et est une section géodésique de contact.*

Bibliografia

[1] A. Bejancu, *CR submanifolds of a Käehler manifold* (II), Trans. Amer. Math. Soc. **250** (1979), 333-345.

[2] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* (I), Interscience Publisher, N.Y., London 1963.

[3] I. M. Souriau, *Structures des systemes dynamiques*, Dunod, Paris 1970.

[4] S. Tachibana, *On harmonic simple forme*, Tensor (N.S.) **27** (1973), 123-130.

[5] K. Yano and M. Kon: $[\cdot]_1$ *Anti invariant submanifolds*, M. Dekker, Inc. N.Y. 1976; $[\cdot]_2$ *Generic submanifolds of Sasakian manifolds*, Kodai Math. J. **3** (1980), 163-196.

* * *