Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 173-177

MARIA ALBERTA MONTRUCCOLI (*)

La comonade Σ associata ad una varietà Σ^* di algebre (**)

Sia $\mathscr{L}$ un sistema di operatori e Σ un insieme di equazioni di $\mathscr{L}$; data una categoria $\boldsymbol{C}$ con prodotti finiti, indichiamo con $\mathscr{L}(\boldsymbol{C})$ la categoria delle $\mathscr{L}$-algebre e degli omomorfismi, con $\Sigma(\boldsymbol{C})$ la sottocategoria delle $\mathscr{L}$-algebre che soddisfano le equazioni di Σ. Se Σ_1 è l'insieme delle equazioni dei gruppi abeliani è noto che $\Sigma_1\Sigma_1(\mathbf{Set}) \approx \Sigma_1(\mathbf{Set})$, anzi, per ogni categoria $\boldsymbol{C}$ con prodotti finiti, il funtore dimenticante

$$U_{\Sigma_1(\boldsymbol{C})}\colon \Sigma_1\Sigma_1(\boldsymbol{C}) \xrightarrow{\approx} \Sigma_1(\boldsymbol{C}) \tag{1}$$

è un isomorfismo.

Nel tentativo di generalizzare la (1) ci si accorge che non vale per un insieme qualunque di equazioni; infatti se Σ_2 è l'insieme degli assiomi dei gruppi, si ha che $\Sigma_2(\mathbf{Set}) = \mathbf{Gr}$, mentre $\Sigma_2\Sigma_2(\mathbf{Set}) \approx \mathbf{Ab}$ (è chiaro che $\mathbf{Gr} \not\approx \mathbf{Ab}$). Abbiamo quindi analizzato più accuratamente il risultato espresso dalla (1); per questo, dato un insieme qualunque di equazioni Σ, abbiamo esteso l'operatore che ad ogni categoria $\boldsymbol{C}$ con prodotti finiti associa $\Sigma(\boldsymbol{C})$, ad un funtore

$$\Sigma\colon (\mathbf{Cat}) \to (\mathbf{Cat})\,,$$

dove $(\mathbf{Cat})$ è la categoria delle categorie con prodotti finiti e dei funtori che li conservano. Nel caso dei gruppi abeliani il funtore Σ_1, opportunamente completato è una comonade. Nel presente lavoro si perviene ad una generalizzazione di quest'ultimo risultato attraverso la seguente articolazione: in **1** si definisce il funtore Σ; successivamente, in **2**, si individua un insieme di equazioni Σ_0 che permetta di definire una trasformazione naturale $\gamma\colon \Sigma \dot{\to} \Sigma\Sigma$, per

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 9-VII-1981.

ogni $\Sigma \supset \Sigma_0$; in **3** si osserva che il funtore dimenticante $U_{\boldsymbol{C}}: \Sigma(\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{C}$ è naturale in $\boldsymbol{C}$ e si dimostra che la terna $(\Sigma, \gamma, U_{(-)})$ è una comonade in **(Cat)**. Sempre in **3** si dimostra che (contrariamente a quanto affermato in [**2**]) il funtore dimenticante $U_{\Sigma(\boldsymbol{C})}: \Sigma\Sigma(\boldsymbol{C}) \to \Sigma(\boldsymbol{C})$ non è pieno, non può essere dunque una equivalenza e tanto meno un isomorfismo, confermando così l'impossibilità di generalizzare la (1). La caratterizzazione delle coalgebre per la comonade Σ conclude il lavoro.

1 – Sia Σ un insieme di equazioni; definiamo un funtore Σ: **(Cat)** $\to$ **(Cat)** come segue $\Sigma: \boldsymbol{C} \mapsto \Sigma(\boldsymbol{C})$, e se $F: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, allora $\Sigma(F)$ è così definito

$$\Sigma(F): A \mapsto \big(FU(A), \ldots, F(f^A)\alpha_A^n, \ldots\big)\,, \tag{2}$$

dove α_A^n è l'isomorfismo canonico: $F(A)^n \xrightarrow{\approx} F(A^n)$; si osservi che dal fatto che F conserva i prodotti finiti segue che $\Sigma(F)(A) \in \Sigma(\boldsymbol{B})$ (si confronti ad esempio [**1**]); se $h: A \to B$ (1), si ponga

$$\Sigma(F)(h) = F(h)\,. \tag{3}$$

Notiamo infine che, poichè h è un omomorfismo e $\alpha_n: F(-)^n \dot{\to} F(-^n)$, $\Sigma(F)(h)$ è un omomorfismo.

Teorema 1. *Il funtore $\Sigma(F)$ conserva i prodotti finiti.*

Dim. Posto $\beta = \langle \Sigma(F)(\varepsilon_1), \Sigma(F)(\varepsilon_2)\rangle$, è immediato verificare che $\beta = \langle F(\varepsilon_1), F(\varepsilon_2)\rangle$, e questo è un isomorfismo perchè F conserva i prodotti finiti.

Ricordando la definizione degli isomorfismi canonici si dimostra che Σ conserva le identità e la composizione, risultando così un funtore da **(Cat)** in **(Cat)**.

2 – Esaminando la dimostrazione della (1), si osserva che, nel caso dei gruppi abeliani, l'associativa e la commutativa assicurano che ciascuna operazione è un omomorfismo. In generale possiamo considerare la sottoclasse di $\mathscr{L}(\boldsymbol{C})$ costituita dalle algebre A tali che

$$f^A: A^n \to A \qquad \text{per ogni simbolo funzionale } f\,. \tag{4}$$

Per ora cerchiamo di tradurre in equazioni la condizione (4).

(1) Con l'abituale abuso di linguaggio identifichiamo ogni omomorfismo con il morfismo sottogiacente.

Iniziamo con l'introdurre alcune notazioni: per h, $k \geqslant 2$, consideriamo la matrice $h \times k$ delle hk proiezioni (hk)-arie, il cui elemento di posto i, j è $\varepsilon_{i+(j-1)h}$; indichiamo con μ_j l'acuta della j-ma riga e con η_i l'acuta della i-ma colonna. Siano ora $A \in \Sigma(\boldsymbol{C})$, f un simbolo funzionale h-ario e g un simbolo funzionale k-ario con h, $k \geqslant 2$;

$$\begin{tikzcd}
(A^h)^k \arrow[r, "g^{A^h}"] \arrow[d, "(f^A)^k"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & A^h \arrow[d, "f^A"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & A^{hk} \arrow[l, "\langle g^{A^h}\eta_1, \ldots, g^{A^h}\eta_h \rangle"'] \arrow[d, "\langle f^A\mu_1, \ldots, f^A\mu_k \rangle"] \\
A^k \arrow[r, "g^A"'] & A & A^k \arrow[l, "g^A"]
\end{tikzcd}$$

chiedere che f^A sia compatibile con g, è chiedere che sia commutativo il diagramma (I). La commutatività di (I) equivale alla commutatività di (II) come si vede componendo con gli isomorfismi canonici. A sua volta il diagramma (II) è commutativo se e solo se in A valgono le equazioni

$$(5) \qquad f\langle g\eta_1, \ldots, g\eta_h \rangle = g\langle f\mu_1, \ldots, f\mu_k \rangle .$$

Equazioni analoghe si ottengono considerando valori di h e k anche minori di 2. È chiaro che la richiesta che tutte le operazioni di A siano omomorfismi equivale a quella che in A valgano tutte le equazioni della forma (5).

Da ora in poi indicheremo con Σ *un insieme di equazioni contenente quelle della forma* (5). Ne segue che in ogni algebra di $\Sigma(\boldsymbol{C})$ ogni operazione è un omomorfismo, cioè un morfismo di $\Sigma(\boldsymbol{C})$.

Definiamo ora un funtore $\gamma_{\boldsymbol{C}}: \Sigma(\boldsymbol{C}) \to \Sigma\Sigma(\boldsymbol{C})$ nel modo seguente

$$(6) \quad \gamma_{\boldsymbol{C}}: A \mapsto (A, \ldots, f^A, \ldots) , \qquad\qquad (7) \quad \gamma_{\boldsymbol{C}}: h \mapsto h .$$

Mostriamo che $\gamma_{\boldsymbol{C}}$ risulta naturale in $\boldsymbol{C}$, ovvero che per ogni $F: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$, si ha

$$(8) \qquad \Sigma\Sigma(F)\gamma_{\boldsymbol{C}} = \gamma_{\boldsymbol{B}}\Sigma(F) .$$

Sia $A \in \Sigma(\boldsymbol{C})$, tenendo presente le definizioni (2) e (6), tutto si riduce a dimostrare che $\Sigma(F)(f^A) = F(f^A)$, e questa è ovvia per la (3). Se poi $h: A \to B$, utilizzando la (7) e la (3), si ha subito che $\Sigma\Sigma(F)\gamma_{\boldsymbol{C}}(h) = \gamma_{\boldsymbol{B}}\Sigma(F)(h)$. Otteniamo così una trasformazione naturale $\gamma: \Sigma \xrightarrow{\cdot} \Sigma\Sigma$.

3 - È di facile verifica il fatto che $U_C\colon \Sigma(\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{C}$ è naturale in $\boldsymbol{C}$, perciò abbiamo un'altra trasformazione naturale $U_{(\_)}\colon \Sigma \xrightarrow{\cdot} \mathrm{Id}_{(\mathbf{Cat})}$.

Teorema 2. *La terna* $(\Sigma, \gamma, U_{(\_)})$ *è una comonade in* (**Cat**).

Dim. Dimostriamo che

$$\Sigma(\gamma_C)\gamma_C = \gamma_{\Sigma(C)}\gamma_C\,. \tag{8}$$

Sia $A \in \Sigma(\boldsymbol{C})$; ricordando la (6) e la (2), basta dimostrare che $\big(\gamma_C(A), \ldots, \gamma_C(f^A)\alpha_A^n, \ldots\big) = \big(\gamma_C(A), \ldots, f^A, \ldots\big)$ e questa segue dalla (7); sia ora $h\colon A \to B$, per la (7) e la (3) $\Sigma(\gamma_C)\gamma_C(h) = \gamma_{\Sigma(C)}\gamma_C(h)$. Resta così provata la (8). Rimane da dimostrare che

$$U_{\Sigma(C)}\gamma_C = I_{\Sigma(C)}\,, \tag{9}$$

$$\Sigma(U_C)\gamma_C = I_{\Sigma(C)}\,; \tag{10}$$

sia $A \in \Sigma(\boldsymbol{C})$, allora $U_{\Sigma(C)}\gamma_C(A) = U_{\Sigma(C)}(A, \ldots, f^A, \ldots) = A$, e anche, se $h\colon A \to B$, allora $U_{\Sigma(C)}\gamma_C(h) = h$ come segue dalla (7). La (10) si dimostra in modo analogo.

A conclusione del paragrafo mostriamo con un esempio che $U_{\Sigma(C)}$ non è necessariamente un'equivalenza. In un linguaggio costituito da un unico simbolo funzionale binario, sia Σ l'insieme delle equazioni dei semigruppi abeliani. È chiaro che Σ contiene le equazioni della forma (5). Siano $A = (A, +) \in \Sigma(\mathbf{Set})$ e $\mathfrak{A} = (A, *) \in \Sigma\Sigma(\mathbf{Set})$ definiti da $A = \{1, 2\}$, $x * x = 2 = 2 + 2$, $x + 1 = 1 + x = 1$. Si vede facilmente che $+$ e $*$ sono commutative e associative; notiamo che $(a + b) * (a' + b') = (a * a') + (b * b')$, dunque $*$ è un omomorfismo.

Prendendo ora h costante di valore 1, è facile verificare che h è un endomorfismo di A, ma non è un endomorfismo di $\mathfrak{A}$, giacchè $1 = h(a * b) \neq 2 = h(a) * h(b)$.

4 – Teorema 3. *Sia* $F\colon \boldsymbol{A} \to \Sigma(\boldsymbol{A})$ per $\boldsymbol{A} \in (\mathbf{Cat})$. *Condizione necessaria e sufficiente perchè* $(\boldsymbol{A}, F)$ *sia una* Σ*-coalgebra è che*

$$U_A F = 1_A\,. \tag{11}$$

Dim. Ricordiamo che per definizione, $(\boldsymbol{A}, F)$ è una Σ-coalgebra se e solo se oltre la (11) soddisfa anche la

$$\gamma_A F = \Sigma(F)F\,. \tag{12}$$

Osserviamo che la (11) significa che: (i) *per ogni* $A \in \mathrm{Ob}\,\boldsymbol{A}$, *l'algebra* $F(A)$

ha come oggetto sottogiacente A *stesso*; (ii) F *opera in modo identico sui morfismi.*

Il teorema è provato una volta provato che dalla (11) deriva la (12).

Sia $h: A \to B$, e dimostriamo che

$$\gamma_A F(h) = \Sigma(F)F(h) . \tag{13}$$

Dalla (11) abbiamo che $F(h) = FU_A F(h)$, da cui, mediante la (7) e la (3), otteniamo la (13). Sia ora $A \in \mathrm{Ob}\,\boldsymbol{A}$ e dimostriamo che $\gamma_A F(A) = \Sigma(F)F(\boldsymbol{A})$ cioè che

$$\big(F(A), \dots, f^{F(A)}, \dots\big) = \big(FU_A F(A), \dots, F(f^{F(A)})\alpha_A^n, \dots\big) ,$$

ricordando la (11), basterà dimostrare che $\alpha_A^n = 1_{A^n}$ e questa segue dalla definizione di prodotto diretto di algebre e dalla proprietà universale del prodotto.

Bibliografia

[1] T. Montali, *Un'osservazione sui funtori che conservano i prodotti finiti*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 239-243.

[2] M. Montruccoli, *Una comonade e relative coalgebre*, Tesi di laurea, Università di Parma, Marzo 1981.

Summary

For Σ a set of equations and **(Cat)** *the category of all categories with finite products, let* Σ: **(Cat)** $\to$ **(Cat)** *be the functor which assigns to each* $\boldsymbol{C} \in$ **(Cat)** *the category* $\Sigma(\boldsymbol{C})$ *whose objects are the models of Σ in* $\boldsymbol{C}$. *For suitable Σ, we find a natural transformation* γ: $\Sigma \to \Sigma\Sigma$, *such that* $(\Sigma, \gamma, U_{(-)})$ *is a comonad, if* $U_{\boldsymbol{C}}: \Sigma(\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{C}$ *is the forgetfull functor. We find a necessary and sufficient condition for a functor* $F: \boldsymbol{A} \to \Sigma(\boldsymbol{A})$ *to be a coalgebra for* Σ.

* * *