Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 191-196

CRISTINA REGGIANI (*)

Doppie aggiunzioni e funtori biaggiunti (**)

1 - Introduzione

Sia $\boldsymbol{J}$ uno schema di diagrammi e $\boldsymbol{C}$ una categoria $\boldsymbol{J}$-completa e $\boldsymbol{J}$-cocompleta. Indicato con $\Delta: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{J}}$ il funtore diagonale, è ben noto che $\varinjlim_{J} \dashv \Delta \dashv \varprojlim_{J}$. Sia ora $U: \boldsymbol{R}\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ il funtore dimenticante. Allora $R \otimes - \dashv U \dashv \mathbf{Ab}[R, -]$. Appare evidente che in questi esempi siamo di fronte ad una situazione del seguente tipo: sono date due categorie $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ e tre funtori, $F, G: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ e $H: \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ con $F \dashv H \dashv G$. Ci sono in matematica numerosi altri esempi di « doppie aggiunzioni », nel senso precedente. Esempi banali sono forniti dalle equivalenze e dai funtori autoaggiunti, come le funzioni crescenti involutorie definite su un insieme ordinato. Si considerino poi i funtori P, Q: $\mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ che ad ogni insieme X associano rispettivamente lo spazio topologico discreto $P(X)$ e quello condensato $Q(X)$ su X; anche fra essi sussiste un legame di doppia aggiunzione, giacchè, indicato con $U': \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ il funtore dimenticante, si ha che $P \dashv U' \dashv Q$. Infine, è noto che i quantificatori $\exists$ e $\forall$ possono essere visti come aggiunti sinistro e destro di un opportuno funtore.

Le considerazioni che precedono hanno costituito il punto di partenza per la presente indagine. In questa nota, nel tentativo di generalizzare il concetto di doppia aggiunzione, si perviene al concetto di « biaggiunzione » per funtori F e G aventi lo stesso dominio e codominio. Dopo aver caratterizzato le biaggiunzioni mediante una trasformazione binaturale soddisfacente due condizioni di universalità, si dimostra che se $F \dashv H \dashv G$ allora F è biaggiunto sinistro di G. Tuttavia un semplice esempio prova che il concetto di biaggiun-

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A.(C.N.R.). — Ricevuto: 21-VII-1981.

zione costituisce una generalizzazione propria di quello di doppia aggiunzione. Successivamente si osserva che ogni biaggiunzione si può esprimere attraverso l'aggiunzione relativa (cfr. [**3**]) di opportuni funtori e si conclude provando che i funtori biaggiunti godono delle stesse proprietà di conservazione di limiti e colimiti dei funtori aggiunti.

2 - Doppie aggiunzioni e funtori biaggiunti

In tutto il lavoro, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ saranno due fissate categorie ed $F, G: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ due funtori.

Def. 1. Una coppia (σ, τ) si dirà una *biaggiunzione* da F a G, in simboli $(\sigma, \tau): F \longrightarrow\!\!\Vert\, G$, se

(1) per ogni $A \in \operatorname{Ob} \boldsymbol{A}$ ed ogni $B \in \operatorname{Ob} \boldsymbol{B}$,

$$\sigma_{B,A}: \boldsymbol{B}[B, G(A)] \to \operatorname{Nat}[h_B F, h_A] \ (^1)$$

è una biiezione naturale in A e in B;

(2) per ogni $A \in \operatorname{Ob} \boldsymbol{A}$ ed ogni $B \in \operatorname{Ob} \boldsymbol{B}$,

$$\tau_{A,B}: \boldsymbol{B}[F(A), B] \to \operatorname{Nat}[h^B G, h^A]$$

è una biiezione naturale in A e in B;

(3) presi comunque due morfismi $F(A) \xrightarrow{f} B$ e $B \xrightarrow{g} G(A')$ di $\boldsymbol{B}$, si ha $(\sigma_{B,A'}(g))_A(f) = (\tau_{A,B}(f))_{A'}(g)$.

Diremo che F è *biaggiunto sinistro* di G, in simboli $F \longrightarrow\!\!\Vert\, G$, se esiste una biaggiunzione $(\sigma, \tau): F \longrightarrow\!\!\Vert\, G$.

Teorema 1. *$F \longrightarrow\!\!\Vert\, G$ se e solo se esiste una trasformazione naturale φ: $\boldsymbol{B}[F-, G-] \xrightarrow{\cdot} \boldsymbol{A}[-,-]$ tale che per ogni $A \in \operatorname{Ob} \boldsymbol{A}$ le trasformazioni naturali $\varphi_{-,A}: h_{G(A)}F \xrightarrow{\cdot} h_A$ e $\varphi_{A,-}: h^{F(A)}G \xrightarrow{\cdot} h^A$ siano universali, nel senso che per ogni $B \in \operatorname{Ob} \boldsymbol{B}$ ed ogni $\varrho: h_B F \xrightarrow{\cdot} h_A$ e $\vartheta: h^B G \xrightarrow{\cdot} h^A$ esistano un unico morfismo $g: B \to G(A)$ ed un unico morfismo $f: F(A) \to B$ tali che*

$$\varphi_{-,A} \cdot h_g F = \varrho \quad e \quad \varphi_{A,-} \cdot h^f G = \vartheta \ (^2) .$$

---

(1) In tutto il lavoro, se $A \in \operatorname{Ob} \boldsymbol{A}$, indicheremo con h_A il funtore rappresentabile controvariante $\boldsymbol{A}[-, A]$ (cfr. [**2**]) e con h^A il funtore rappresentabile covariante $\boldsymbol{A}[A, -]$. Inoltre, se a è un morfismo di $\boldsymbol{A}$, indicheremo con h_a la trasformazione naturale $\boldsymbol{A}[-, a]$ e con h^a la trasformazione naturale $\boldsymbol{A}[a, -]$. Analogo significato avranno i simboli h_B e h^B, con $B \in \operatorname{Ob} \boldsymbol{B}$, e h_b e h^b, con b morfismo di $\boldsymbol{B}$.

(2) Indicheremo sempre con «·» la composizione verticale di trasformazioni naturali e con «$\circ$» la composizione di funzioni.

Dim. Supponiamo che sia $F \dashv\!\!\vdash G$. Dati $A, A' \in \mathrm{Ob}\,\boldsymbol{A}$, definiamo $\varphi_{A,A'}$: $\boldsymbol{B}[F(A), G(A')] \to \boldsymbol{A}[A, A']$ come segue

$$\varphi_{A,A'}(f) = \big(\sigma_{G(A'),A'}(1_{G(A')})\big)_A(f) \qquad (F(A) \xrightarrow{f} G(A'))\,.$$

Poichè $\varphi_{-,A'} = \sigma_{G(A'),A'}(1_{G(A')})$: $h_{G(A')}F \xrightarrow{\cdot} h_{A'}$, si ha che $\varphi_{A,A'}$ è naturale in A. Inoltre, in virtù della condizione (3) della definizione 1, è anche $\varphi_{A,A'}(f) = \big(\tau_{A,G(A')}(f)\big)_{A'}(1_{G(A')})$, ma, poichè τ è naturale nel secondo argomento, è $\tau_{A,G(A')} \circ \boldsymbol{B}[F(A), f](1_{F(A)}) = \mathrm{Nat}\,[h^f G, h^A] \circ \tau_{A,F(A)}(1_{F(A)})$ e quindi $\varphi_{A,A'}(f) = \big(\tau_{A,F(A)}(1_{F(A)})\big)_{A'}(f)$. Dunque $\varphi_{A,-} = \tau_{A,F(A)}(1_{F(A)})$ e perciò $\varphi_{A,A'}$ è naturale in A'. Si osservi poi che l'universalità di $\varphi_{-,A'}$ vuol dire che, per ogni $B \in \mathrm{Ob}\,\boldsymbol{B}$, è biunivoca la funzione che al generico morfismo $g\colon B \to G(A')$ associa la trasformazione naturale $\varphi_{-,A'} \cdot h_g F$. Ora, essendo $\varphi_{-,A'} \cdot h_g F = \sigma_{B,A'}(g)$, tale funzione risulta coincidere con $\sigma_{B,A'}$ che è biunivoca. Analoga dimostrazione vale per $\varphi_{A,-}$, utilizzando la biunivocità di τ.

Viceversa. Dati $A \in \mathrm{Ob}\,\boldsymbol{A}$ e $B \in \mathrm{Ob}\,\boldsymbol{B}$ definiamo

$$\sigma_{B,A}\colon \boldsymbol{B}[B, G(A)] \to \mathrm{Nat}\,[h_B F, h_A] \qquad \text{e} \qquad \tau_{A,B}\colon \boldsymbol{B}[F(A), B] \to \mathrm{Nat}\,[h^B G, h^A]$$

come segue

$$\sigma_{B,A}(g) = \varphi_{-,A} \cdot h_g F \qquad (B \xrightarrow{g} G(A))\,,$$

$$\tau_{A,B}(f) = \varphi_{A,-} \cdot h^f G \qquad (F(A) \xrightarrow{f} B)\,.$$

Evidentemente le funzioni $\sigma_{B,A}$ e $\tau_{A,B}$ così definite soddisfano la condizione (3) della Def. 1 e, in virtù dell'universalità di $\varphi_{-,A}$ e $\varphi_{A,-}$, sono biunivoche. Inoltre, dalla naturalezza di φ e dalla pienezza e fedeltà dell'immersione di Yoneda $h_-\colon \boldsymbol{A} \to \mathrm{Funct}\,(\boldsymbol{A}^{op}, \mathbf{Set})$ segue che $\sigma_{B,A}$ è naturale in A e in B. Da considerazioni analoghe segue che anche $\tau_{A,B}$ è naturale in A e in B.

Teorema 2. *Se F e G sono aggiunti, sinistro e destro rispettivamente, di un funtore $H\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$, allora F è biaggiunto sinistro di G.*

Dim. Indicate con $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_A \xrightarrow{\cdot} HF$ ed $\bar\varepsilon\colon \mathrm{Id}_B \xrightarrow{\cdot} GH$ le unità e con $\eta\colon FH \xrightarrow{\cdot} \mathrm{Id}_B$ ed $\bar\eta\colon HG \xrightarrow{\cdot} \mathrm{Id}_A$ le counità delle due aggiunzioni, definiamo

$$\varphi_{A,A'}\colon \boldsymbol{B}[F(A), G(A')] \to \boldsymbol{A}[A, A']\,,$$

come segue

$$\varphi_{A,A'}(f) = \bar\eta_{A'} H(f) \varepsilon_A \qquad (F(A) \xrightarrow{f} G(A'))\,.$$

Allora, poichè sia ε che $\bar{\eta}$ sono trasformazioni naturali, φ è una trasformazione naturale. Inoltre, per ogni $A' \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}$, $\varphi_{-,A'}: h_{G(A')}F \stackrel{.}{\to} h_{A'}$ è universale. Infatti, se $B \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{B}$ e $\varrho: h_B F \stackrel{.}{\to} h_{A'}$ è una trasformazione naturale, $\varrho_{H(B)}(\eta_B): H(B) \to A'$ è un morfismo di $\boldsymbol{A}$, quindi, per l'universalità di $\bar{\eta}_{A'}$, esiste un unico morfismo $g: B \to G(A')$ tale che

$$(1) \qquad \bar{\eta}_{A'} H(g) = \varrho_{H(B)}(\eta_B) .$$

L'asserto si riduce a dimostrare che la (1) equivale a

$$(2) \qquad \varphi_{-,A'} \cdot h_g F = \varrho .$$

Valga dunque la (1) e siano $A \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}$ ed $x: F(A) \to B$. Allora

$$\varphi_{A,A'} \circ \boldsymbol{B}[F(A), g](x) = \varphi_{A,A'}(gx) = \bar{\eta}_{A'} H(g) H(x) \varepsilon_A$$

$$= \varrho_{H(B)}(\eta_B) H(x) \varepsilon_A = \varrho_A\big(\eta_B F H(x) F(\varepsilon_A)\big) ,$$

essendo ϱ naturale. Poichè η è naturale, da $\eta F \cdot F\varepsilon = \mathrm{id}_F$ segue

$$\varrho_A\big(\eta_B F H(x) F(\varepsilon_A)\big) = \varrho_A(x) .$$

Dunque $\varphi_{A,A'} \circ \boldsymbol{B}[F(A), g](x) = \varrho_A(x)$, da cui la (2) per l'arbitrarietà di A e di x. Valga ora la (2). Ne segue, in particolare, che $\varphi_{H(B),A'} \circ \boldsymbol{B}[FH(B), g](\eta_B) = \varrho_{H(B)}(\eta_B)$ ovvero che $\bar{\eta}_{A'} H(g) H(\eta_B) \varepsilon_{H(B)} = \varrho_{H(B)}(\eta_B)$, da cui segue la (1) perchè $H\eta \cdot \varepsilon H = \mathrm{id}_H$. Analogamente si ha l'universalità di $\varphi_{A,-}$, $A \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}$.

È noto che i funtori tra categorie dell'ordine sono tutte e sole le funzioni crescenti. Si osservi poi che se $\boldsymbol{A} = (A, \leqslant)$ e $\boldsymbol{B} = (B, \leqslant)$ sono categorie dell'ordine, ed $f, g: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ sono funzioni crescenti, allora esiste una trasformazione naturale $\varphi: f \stackrel{.}{\to} g$ se e solo se $f(a) \leqslant g(a)$ per ogni $a \in A$. Ne segue che $f \dashv\vdash g$ si può esprimere mediante le seguenti

$$(1)' \qquad b \leqslant g(a) \quad \text{sse} \quad \forall x \in A \quad \big(f(x) \leqslant b \Rightarrow x \leqslant a\big),$$

$$(2)' \qquad f(a) \leqslant b \quad \text{sse} \quad \forall x \in A \quad \big(b \leqslant g(x) \Rightarrow a \leqslant x\big).$$

Si noti che per funtori tra categorie dell'ordine la condizione (3) della Def. 1 è sempre banalmente soddisfatta.

Oss. 1. Il concetto di biaggiunzione è una generalizzazione propria di quello di doppia aggiunzione, nel senso che esistono funtori F e G con $F \dashv\vdash G$

senza che questa biaggiunzione provenga da una doppia aggiunzione $F \dashv H \dashv G$ secondo il Teorema 2. Infatti, se $\boldsymbol{A}$ è la categoria discreta con due oggetti distinti, diciamo a_1 e a_2, ed $f, g: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ sono le funzioni definite da $f(a_i) = a_1$ e $g(a_i) = a_2$, $i = 1, 2$, è facile provare che $f \dashv\vdash g$. Tuttavia non esiste alcuna funzione h tale che sia $f \dashv h \dashv g$, perchè, nelle categorie discrete, $f \dashv h$ significa che f è una biiezione ed h la sua inversa, mentre in questo esempio f non è iniettiva.

Prop. 1. *Siano $F, G: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ due funtori tali che $F \dashv\vdash G$ e sia $H: \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$. Allora $F \dashv H$ se e solo se $H \dashv G$.*

Dim. Supponiamo che $F \dashv H$, ovvero che esista un isomorfismo naturale $\alpha: \boldsymbol{A}[-, H-] \dot{\to} \boldsymbol{B}[F-, -]$. Sia $(\sigma, \tau): F \dashv\vdash G$ una fissata biaggiunzione e siano $A \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{A}$ e $B \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{B}$ scelti in modo arbitrario. Allora $\sigma_{B,A}: \boldsymbol{B}[B, G(A)] \to \mathrm{Nat}\,[h_B F, h_A]$ è una biiezione naturale in A e in B. Inoltre, poichè $\alpha_{-,B}$ è un isomorfismo naturale, la funzione

$$\mathrm{Nat}\,[\alpha_{-,B}, h_A]: \mathrm{Nat}\,[h_B F, h_A] \to \mathrm{Nat}\,[h_{H(B)}, h_A]$$

è una biiezione e, come si verifica facilmente, è naturale in A e in B. Infine, per il lemma di Yoneda, esiste una biiezione $\beta_{B,A}: \mathrm{Nat}\,[h_{H(B)}, h_A] \to \boldsymbol{A}[H(B), A]$, sempre naturale in A e in B. Da ciò segue la tesi. L'altra implicazione si ottiene in modo analogo.

I funtori biaggiunti godono delle stesse proprietà di conservazione di limiti e colimiti dei funtori aggiunti, ovvero se $F \dashv\vdash G$, G conserva i limiti ed F i colimiti. Prima di dimostrarlo, allo scopo di semplificare le notazioni, richiamiamo il concetto di «aggiunzione relativa» (cfr. [**3**]), che ci permetterà di riformulare più sinteticamente quello di biaggiunzione.

Def. 2. Siano $\boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ tre categorie e $J: \boldsymbol{C}' \to \boldsymbol{C}$, $S: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ e $T: \boldsymbol{C}' \to \boldsymbol{D}$ tre funtori. Diremo che T è *aggiunto destro* di S *relativo* a J, in simboli $S \underset{J}{\dashv} T$, se per ogni $D \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{D}$ ed ogni $C' \in \mathrm{Ob}\, \boldsymbol{C}'$ esiste una biiezione $\varrho_{D,C'}$: $\boldsymbol{D}[D, T(C')] \to \boldsymbol{C}[S(D), J(C')]$ naturale in D e in C'.

Esempio. Sia $S: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ un funtore e sia $f: S(D) \to C$ una freccia universale da S a C. Sia $J: \mathbf{1} \to \boldsymbol{C}$ il funtore costante di valore C e sia $T: \mathbf{1} \to \boldsymbol{D}$ il funtore costante di valore D. Allora $S \underset{J}{\dashv} T$.

Oss. 2. Siano $F, G: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ due funtori e sia $\tilde{F}: \boldsymbol{B} \to \mathrm{Funct}\,(\boldsymbol{A}^{op}, \mathbf{Set})$ il funtore definito dalle relazioni

$$\tilde{F}(B) = h_B F\,, \qquad \tilde{F}(B \xrightarrow{b} B') = h_b F: h_B F \dot{\to} h_{B'} F\,.$$

Allora la condizione (1) della Def. 1 è soddisfatta se e solo se $\tilde{F} \underset{h_-}{\dashv} G$, dove $h_-: \boldsymbol{A} \to \mathrm{Funct}\,(\boldsymbol{A}^{op}, \mathbf{Set})$ è l'immersione di Yoneda. Considerazioni analoghe valgono per la condizione (2).

Ricordando che se $S \underset{J}{\dashv} T$, allora T è determinato in modo unico (a meno di ismorfismi) da S e J, si ha la seguente

Prop. 2. *Se $F \mathrel{-\!\!\!\parallel} G$, allora G è determinato in modo unico (a meno di isomorfismi) da F.*

Teorema 3. *Se $F \mathrel{-\!\!\!\parallel} G$, allora G conserva i limiti.*

Dim. Ricordiamo (cfr. [**3**]) che se $S \underset{J}{\dashv} T$ e J conserva i limiti, allora T conserva i limiti, mentre è noto che l'immersione di Yoneda conserva i limiti. Dunque dall'Oss. 2 segue la tesi.

Bibliografia

[1] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, Berlin 1971.

[2] B. Pareigis, *Categories and functors*, Academic Press, New York 1970.

[3] F. Ulmer, *Properties of dense and relative adjoint functors*, J. Algebra **8** (1968), 77-95.

Summary

Suppose $F, G: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ and $H: \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ are three functors such that $F \dashv H \dashv G$. It is possible to detect some properties which involve F, G and not H. We say that F is left biadjoint to G if these properties are satisfied. We investigate some simple features of biadjoint functors.

* * *