Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 265-273

RITA CAMPANINI (*)

Operatori integrali di Fredholm invarianti rispetto a gruppi di congruenze nello spazio (**)

1 - Introduzione

Sia A un aperto limitato dello spazio cartesiano E^3, $\mathscr{G}$ un gruppo di congruenze di E^3 che mutano A in sè stesso, $H(A)$ lo spazio dei vettori a tre componenti funzioni di quadrato integrabile in A.

In un recente lavoro L. Bassotti ha introdotto, per gli operatori lineari di $H(A)$ in sè, una definizione di invarianza rispetto al gruppo $\mathscr{G}$ (1). Tale definizione, applicata in particolare ad un operatore integrale L con matrice nucleo $K(x, y)$ continua in $A \times A$

$$(1.1) \qquad Lu = \int_A K(x, y)\, u(y)\, \mathrm{d}y \ (^2) ,$$

permette di stabilire che L è invariante rispetto a $\mathscr{G}$ se e solo se il suo nucleo $K(x, y)$ verifica le condizioni

$$(1.2) \qquad \gamma K(x, y) = K(\gamma x, \gamma y)\gamma$$

in ogni punto di $A \times A$ e per ogni matrice ortogonale γ del terzo ordine rappresentante una congruenza di $\mathscr{G}$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 12-I-1982.
(1) Si confronti [1] n. 4.
(2) Si suppone che $K(x, y)$ verifichi le ulteriori ipotesi necessarie perchè L sia un operatore di $H(A)$ in $H(A)$.

Sorge allora il problema di caratterizzare le matrici $K(x, y)$ verificanti le condizioni (1.2). Se il gruppo $\mathscr{G}$ è finito, tale caratterizzazione si ottiene facilmente. Per i gruppi infiniti presenta alcune difficoltà, come è già stato mostrato per l'analogo problema nel piano (3).

Questo lavoro è dedicato alla caratterizzazione dei nuclei $K(x, y)$ degli operatori (1.1) invarianti rispetto ai principali gruppi infiniti di congruenze di E^3. Vengono in particolare presi in esame i gruppi delle rotazioni attorno ad un asse e ad un punto O, e il gruppo di tutte le congruenze che lasciano fisso O.

2 – Sia fissato in E^3 un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. È ben noto che le congruenze di E^3 che lasciano fisso un punto (che, senza restrizioni, supporremo essere l'origine O) costituiscono un gruppo isomorfo al gruppo $\mathscr{O}$ delle matrici ortogonali del terzo ordine. È lecito quindi identificare le matrici di $\mathscr{O}$ con le congruenze che esse rappresentano: in questo lavoro ciò verrà fatto sistematicamente.

Verrà indicato con $\mathscr{R}_h$ il sottogruppo di $\mathscr{O}$ che rappresenta le rotazioni attorno all'asse x_h, con $\mathscr{R}$ il sottogruppo delle matrici di $\mathscr{O}$ a determinante uno (che rappresenta le rotazioni attorno all'origine).

Sia $\mathscr{G}$ un sottogruppo di $\mathscr{O}$ (in particolare $\mathscr{R}_h$, $\mathscr{R}$ ovvero $\mathscr{O}$ stesso), A un aperto di E^3 mutato in sè dalle congruenze di $\mathscr{G}$.

Si considerino le funzioni reali f definite in $A \times A$, verificanti in $A \times A$, e per ogni γ di $\mathscr{G}$, le condizioni

$$f(\gamma x, \gamma y) = (\det \gamma)^s f(x, y) \tag{2.1}$$

per $s = 0$ o $s = 1$. Le funzioni verificanti le (2.1) per $s = 0$ saranno dette *invarianti* rispetto a $\mathscr{G}$, quelle verificanti le (2.1) per $s = 1$, *seminvarianti* rispetto a $\mathscr{G}$.

Si verifica facilmente che la combinazione lineare e il prodotto di funzioni invarianti rispetto a $\mathscr{G}$ sono funzioni invarianti rispetto a $\mathscr{G}$.

Si stabiliscono ora alcuni teoremi che caratterizzano le funzioni invarianti e seminvarianti rispetto a $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_h$, e $\mathscr{O}$.

I. *Sia A un aperto mutato in sè dalle congruenze di $\mathscr{R}$. Le funzioni reali definite in $A \times A$ e invarianti rispetto a $\mathscr{R}$ sono tutte e sole le funzioni reali delle variabili $\|x\|$, $\|y\|$, $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Ogni funzione invariante rispetto a $\mathscr{R}$ è invariante rispetto ad $\mathscr{O}$.*

---

(3) Si confronti [4].

Dim. Diciamo equivalenti due elementi (x, y) e (x', y') di $A \times A$ quando esiste una matrice γ di $\mathscr{R}$ tale che $(\gamma x, \gamma y) = (x', y')$, e indichiamo con B l'insieme quoziente di $A \times A$ rispetto a tale relazione di equivalenza e con φ l'applicazione canonica di $A \times A$ su B.

Una funzione reale f definita in $A \times A$ invariante rispetto a $\mathscr{R}$ determina una funzione reale F definita in B e viceversa; si ha $f = F \circ \varphi$.

Al variare di (x, y) in $A \times A$, il punto di coordinate $\|x\|$, $\|y\|$, $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ descrive un sottoinsieme C di E^3. Se all'elemento di B determinato da (x, y) si fa corrispondere il punto di C di coordinate $\|x\|$, $\|y\|$, $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$, si ottiene una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di B e di C e quindi ad ogni funzione reale definita in B resta associata una funzione reale definita in C e viceversa.

Dunque le funzioni reali definite in $A \times A$ e invarianti rispetto a $\mathscr{R}$ corrispondono alle funzioni reali delle variabili $\|x\|$, $\|y\|$, $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

Si verifica immediatamente che tali funzioni sono anche invarianti rispetto ad $\mathscr{O}$. Ne segue la tesi.

Dal teorema I segue subito

II. *Non esistono funzioni seminvarianti rispetto al gruppo* $\mathscr{O}$ (4).

Sia h, i, j una permutazione circolare degli indici 1, 2, 3; sussiste il seguente teorema (che si dimostra in modo analogo al Teorema I).

III. *Sia A un campo di rotazione attorno all'asse x_h. Le funzioni reali, definite in $A \times A$, invarianti rispetto a $\mathscr{R}_h$ sono tutte e sole le funzioni reali delle variabili* $x_i^2 + x_j^2$, $y_i^2 + y_j^2$, x_h, y_h, $x_i y_j - x_j y_i$, $x_i y_i + x_j y_j$.

Osservando infine che ogni matrice di $\mathscr{R}$ si può sempre ottenere come prodotto di matrici dei tre gruppi $\mathscr{R}_h$ si deduce

IV. *Una funzione invariante rispetto a $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_3$, è invariante rispetto a $\mathscr{R}$ e viceversa.*

3 – In questo numero saranno caratterizzati i nuclei di operatori integrali invarianti rispetto ad un gruppo $\mathscr{R}_h$. Pertanto A sarà supposto un campo di rotazione attorno all'asse x_h.

---

(4) Questo risultato non sussiste nel caso di E^2.

Per fissare le idee si consideri il gruppo $\mathscr{R}_3$. Gli elementi γ_λ di $\mathscr{R}_3$ sono le matrici di elementi γ_{ij} dati da

$$\gamma_{11}=\gamma_{22}=\cos\lambda;\qquad \gamma_{21}=-\gamma_{12}=\operatorname{sen}\lambda;\qquad \gamma_{33}=1;\qquad \gamma_{13}=\gamma_{23}=\gamma_{31}=\gamma_{32}=0\,.$$

Le condizioni (1.2) per ogni γ_λ di $\mathscr{R}_3$ equivalgono alle seguenti condizioni per gli elementi $K_{ij}(x, y)$ della matrice $K(x, y)$:

(a) *le funzioni* $K_{11}+K_{22}$, $K_{12}-K_{21}$, K_{33} *sono invarianti rispetto a* $\mathscr{R}_3$;

(b) *le coppie di funzioni* (K_{31}, K_{32}), (K_{13}, K_{23}) *soddisfano, per ogni numero reale* λ, *il sistema*

$$f_h(\gamma_\lambda x, \gamma_\lambda y)=a_{h1}(\lambda)f_1(x, y)+a_{h2}(\lambda)f_2(x, y)\qquad (h=1, 2)\,, \tag{3.1}$$

nelle incognite $f_h(x, y)$ *con coefficienti* $a_{hk}(\lambda)$ *così definiti*

$$a_{hh}(\lambda)=\cos\lambda\,,\qquad a_{21}(\lambda)=-a_{12}(\lambda)=\operatorname{sen}\lambda; \tag{3.2}$$

(c) *la coppia di funzioni* $(K_{11}-K_{22}, K_{12}+K_{21})$ *soddisfa per ogni* λ *reale il sistema* (3.1) *con coefficienti*

$$a_{hh}(\lambda)=\cos 2\lambda\,,\qquad a_{21}(\lambda)=-a_{12}(\lambda)=\operatorname{sen}2\lambda\,. \tag{3.3}$$

Conviene allora considerare i seguenti lemmi.

I. *Tutte e sole le coppie di funzioni verificanti per ogni* λ *reale il sistema* (3.1) *con coefficienti* (3.2) *sono le seguenti*

$$\begin{aligned} &x_1 g_1(x, y)+y_1 g_2(x, y)+x_2 g_3(x, y)+y_2 g_4(x, y)\,,\\ &x_2 g_1(x, y)+y_2 g_2(x, y)-x_1 g_3(x, y)-y_1 g_4(x, y)\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

dove $g_r(x, y)$ *è un'arbitraria funzione invariante rispetto a* $\mathscr{R}_3$ [5].

Dim. Introdotto in E^3 un sistema di coordinate cilindriche ϱ, ϑ, x_3, siano $(\varrho, \vartheta, x_3)$ e (σ, φ, y_3) le coordinate di due punti x e y; si ponga poi $\vartheta+\varphi=\alpha$, $\vartheta-\varphi=\beta$ e, per $h=1, 2$,

---

[5] Si osservi che la forma (3.4) può essere modificata moltiplicando uno o più addendi (in entrambe le coppie) per arbitrarie funzioni invarianti rispetto a $\mathscr{R}_3$ (ad esempio x_3 o y_3).

$$(3.5) \qquad Z_h(\varrho,\, \alpha, x_3, \sigma, \beta, y_3)$$
$$= f_h\Big(\varrho \cos\frac{\alpha+\beta}{2},\ \varrho \operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2},\ x_3,\ \sigma\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \sigma\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2},\ y_3\Big).$$

Al sistema (3.1) si può allora sostituire il seguente sistema lineare alle differenze finite nella variabile α

$$(3.6) \qquad Z_h(\varrho, \alpha + 2\lambda, x_3, \sigma, \beta, y_3)$$
$$= a_{h1}(\lambda)\, Z_1(\varrho, \alpha, x_3, \sigma, \beta, y_3) + a_{h2}(\lambda)\, Z_2(\varrho, \alpha, x_3, \sigma, \beta, y_3)\,.$$

Consideriamo due soluzioni (linearmente indipendenti) di (3.6): $(\cos\alpha/2, \operatorname{sen}\alpha/2)$ e $(-\operatorname{sen}\alpha/2, \cos\alpha/2)$; si ottiene che le soluzioni di (3.6) sono tutte e sole le combinazioni lineari di queste con coefficienti $G_h(\varrho, \alpha, x_3, \sigma, \beta, y_3)$ funzioni periodiche rispetto ad α di periodo 2λ [6]. Ne segue pertanto la tesi.

In modo analogo si dimostra che

II. *Tutte e sole le coppie di funzioni verificanti per ogni λ reale il sistema* (3.1) *con coefficienti* (3.3) *sono le seguenti*

$$(3.7) \qquad \begin{aligned} &(x_1 y_1 - x_2 y_2)\, a(x, y) - (x_2 y_1 + x_1 y_2)\, b(x, y)\,, \\ &(x_2 y_1 + x_1 y_2)\, a(x, y) + (x_1 y_1 - x_2 y_2)\, b(x, y)\,, \end{aligned}$$

con $a(x, y)$ e $b(x, y)$ arbitrarie funzioni invarianti rispetto a $\mathcal{R}_3$.

Dai lemmi I e II segue allora il teorema

III. *Sia A un campo di rotazione attorno all'asse x_3. Condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice $K(x, y)$ verifichi le condizioni* (1.2) *per ogni γ di $\mathcal{R}_3$ è che risulti:*

(a) $K_{33}(x, y)$, $K_{11}(x, y) + K_{22}(x, y)$, $K_{12}(x, y) - K_{21}(x, y)$, *funzioni invarianti rispetto a $\mathcal{R}_3$;*

(b) $\big(K_{13}(x, y), K_{23}(x, y)\big)$, $\big(K_{31}(x, y), K_{32}(x, y)\big)$, *coppie di funzioni del tipo* (3.4);

(c) $\big(K_{11}(x, y) - K_{22}(x, y), K_{12}(x, y) + K_{21}(x, y)\big)$, *coppia di funzioni del tipo* (3.7).

([6]) **Si confronti ad esempio [3], cap. XIII.**

Osservazione. *Per i gruppi $\mathscr{R}_1$ e $\mathscr{R}_2$ valgono risultati analoghi, che si ottengono da quelli del teorema* III *con opportuno scambio di indici* (7).

4 – Questo numero è dedicato alla caratterizzazione dei nuclei $K(x, y)$ invarianti rispetto ai gruppi $\mathscr{R}$ e $\mathscr{O}$. Pertanto A è un campo mutato in sè dalle congruenze di $\mathscr{R}$ (ad esempio un campo sferico oppure uno strato sferico di centro O).

Conviene introdurre due matrici $M(x, y)$ e $N(x)$ e studiarne le proprietà come nuclei di operatori integrali. Siano

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}, \qquad N(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Si verifica facilmente che la matrice $M(x, y)$ e la sua trasposta $M^T(x, y)$ sono nuclei di operatori invarianti rispetto ad $\mathscr{O}$, mentre per la matrice $N(x)$ sussistono per ogni γ di $\mathscr{O}$ le relazioni

$$\gamma N(x) = (\det \gamma)\, N(\gamma x)\, \gamma\,. \tag{4.2}$$

Dalle (4.2) segue che la matrice $N(x)$ è nucleo di un operatore integrale invariante rispetto a $\mathscr{R}$ ma non invariante rispetto ad $\mathscr{O}$.

Indicheremo con I la matrice identica del terzo ordine.

Sussistono i seguenti teoremi che permettono di caratterizzare in modo semplice le matrici $K(x, y)$ nuclei di operatori invarianti rispetto ai gruppi $\mathscr{R}$ e $\mathscr{O}$.

I. *Le matrici $K(x, y)$ verificanti le condizioni* (1.2) *per ogni γ di $\mathscr{R}$ sono tutte e sole quelle del tipo*

$$\begin{aligned} K(x, y) = a_1(x, y)\, I + a_2(x, y)\, M(x, y) + a_3(x, y)\, M^T(x, y) \\ + a_4(x, y)\, N(x) + a_5(x, y)\, N(y)\,, \end{aligned} \tag{4.3}$$

con $a_r(x, y)$ arbitrarie funzioni invarianti rispetto a $\mathscr{R}$

---

(7) È facile vedere che, nel caso di $\mathscr{R}_2$, si dovranno scambiare fra loro gli indici 2 e 3, nel caso di $\mathscr{R}_1$, si dovrà operare l'ulteriore scambio degli indici 2 e 1. Tali scambi andranno effettuati anche nelle formule (3.4) e (3.7).

Dim. Dalle proprietà delle matrici $M(x, y)$ e $N(x)$ segue facilmente che ogni matrice $K(x, y)$ della forma (4.3) verifica le condizioni (1.2) per ogni γ di $\mathscr{R}$. Dimostriamo il viceversa. Sia dunque $K(x, y)$ una matrice verificante le condizioni (1.2) per ogni γ di $\mathscr{R}$: la matrice $K(x, y)$ verifica in particolare le (1.2) per ogni γ di $\mathscr{R}_h$ $(h = 1, 2, 3)$ e quindi gli elementi $K_{ij}(x, y)$ devono soddisfare le condizioni del teorema III del n. **3** e contemporaneamente le analoghe condizioni per i gruppi $\mathscr{R}_1$ e $\mathscr{R}_2$: Confrontando tali condizioni si ha allora che

$$K_{ii}(x, y) = a_1(x, y) + x_i y_i (a_2(x, y) + a_3(x, y)) \qquad (i = 1, 2, 3) , \tag{4.4}$$

con $a_r(x, y)$ funzioni invarianti rispetto a $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_3$ e quindi rispetto a $\mathscr{R}$; inoltre, per $i \neq j$

$$K_{ij}(x, y) = x_i y_j a_2(x, y) + x_j y_i a_3(x, y) + (-1)^p (x_h a_4(x, y) + y_h a_5(x, y)) , \tag{4.5}$$

con $a_s(x, y)$ funzioni invarianti rispetto a $\mathscr{R}$ e con $p = 0$ oppure $p = 1$ a seconda che i, j, h rappresenti una permutazione degli indici 1, 2, 3 rispettivamente di classe pari o di classe dispari. Con semplici calcoli si ottiene allora per $K(x, y)$ la forma (4.3).

II. *Le matrici $K(x, y)$ verificanti le condizioni* (1.2) *per ogni γ di $\mathscr{O}$ sono tutte e sole quelle del tipo*

$$K(x, y) = a_1(x, y) I + a_2(x, y) M(x, y) + a_3(x, y) M^T(x, y) , \tag{4.6}$$

con $a_r(x, y)$ arbitrarie funzioni invarianti rispetto a $\mathscr{O}$.

Dim. È conseguenza del teorema precedente, delle (4.2) e del teorema II del n. **2**.

5 – Consideriamo infine alcuni casi particolari.

Le formule (4.3) e (4.6) si semplificano notevolmente per matrici $K(x, y)$ *simmetriche* o *emisimmetriche*. Si prova facilmente che, se $K(x, y)$ è simmetrica, riesce nelle (4.3) e (4.6)

$$a_4(x, y) = a_5(x, y) = 0 , \qquad a_3(x, y) = a_2(x, y) , \tag{5.1}$$

mentre, se $K(x, y)$ è emisimmetrica, risulta

$$a_1(x, y) = 0 , \qquad a_3(x, y) = - a_2(x, y) . \tag{5.2}$$

Nelle applicazioni intervengono spesso operatori lineari integrali *autoaggiunti*, cioè tali che, per ogni punto di $A \times A$ si abbia

$$K^T(x, y) = K(y, x) . \tag{5.3}$$

Si verifica subito che le matrici $M(x, y)$ e $M^T(x, y)$ soddisfano le (5.3); inoltre risulta $N^T(x) = - N(x)$. Dai teoremi I e II del n. **4** segue allora

I. *I nuclei di operatori integrali autoaggiunti e invarianti rispetto a* $\mathscr{R}$, *sono del tipo* (4.3) *con*

$$a_i(y, x) = a_i(x, y) \quad (i = 1, 2, 3) ; \qquad a_5(x, y) = - a_4(y, x) . \tag{5.4}$$

In particolare per $a_4(x, y) = 0$ *si ottengono i nuclei degli operatori autoaggiunti invarianti rispetto ad* $\mathscr{O}$.

6 – Concludiamo accennando brevemente ai risultati, analoghi ai precedenti, nel caso bidimensionale. Tale problema è già stato studiato in [**4**] da Maria Tanzi Cattabianchi, ma un errore di calcolo ha condotto l'autore ad alcune conclusioni non esatte ([8]).

Sia dunque $\mathscr{O}$ l'insieme di tutte le congruenze di E^2 in sè che lasciano fissa l'origine O, e $\mathscr{R}$ il sottogruppo delle rotazioni attorno ad O. Si considerino le seguenti matrici del secondo ordine

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M'(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 - x_2 y_2 & x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 & x_2 y_2 - x_1 y_1 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

$$M''(x, y) = \begin{pmatrix} -x_1 y_2 - x_2 y_1 & x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ x_1 y_1 - x_2 y_2 & x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix},$$

che risultano nuclei di operatori integrali invarianti rispetto a $\mathscr{R}$, come facilmente si verifica.

Sia I la matrice identica del secondo ordine. Vale il seguente teorema

I. *Le matrici* $K(x, y)$, *nuclei di operatori integrali invarianti rispetto al gruppo* $\mathscr{R}$ *sono del tipo*

$$K(x, y) = f_1(x, y)\, I + f_2(x, y)\, J + f_3(x, y)\, M'(x, y) + f_4(x, y)\, M''(x, y) , \tag{6.2}$$

([8]) Nella formula (6.3), pag. 243, si deve porre $g_1(x, \xi) = f_2(x, \xi)$ e $g_2(x, \xi) = - f_1(x, \xi)$ e analogamente nelle formule che si deducono da questa.

con $f_r(x, y)$ funzioni invarianti rispetto a $\mathscr{R}$. In particolare i nuclei di operatori integrali invarianti rispetto ad $\mathcal{O}$ sono del tipo (6.2) *con $f_1(x, y)$ e $f_3(x, y)$ funzioni invarianti rispetto ad $\mathcal{O}$ e $f_2(x, y)$ e $f_4(x, y)$ seminvarianti rispetto ad $\mathcal{O}$.*

Bibliografia

[1] L. Bassotti Rizza, *Operatori lineari invarianti rispetto ad un gruppo di congruenze*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **5** (1979), 453-470.

[2] N. Bourbaki, (II), *Topologie générale* (*Chapitres* 1 *et* 2), Hermann, Paris 1961.

[3] L. M. Milne-Thomson, *The calculus of finite differences*, Macmillan and Co., London 1951.

[4] M. Tanzi Cattabianchi, *Caratterizzazione degli operatori integrali di Fredholm invarianti rispetto a gruppi di congruenze nel piano*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 233-245.

[5] E. P. Wigner, *Group theory*, Acad. Press, New York 1959.

Summary

Let $\mathcal{O}$ be the group of all orthogonal transformations of E^3, $\mathscr{R}$ and $\mathscr{R}_h$ the subgroups of $\mathcal{O}$ consisting of space rotations about the origin or about the axis x_h respectively.

Characterization theorems are given for kernels of linear integral operators invariant by L. Bassotti with respect to the groups $\mathcal{O}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_h$.

* * *